

УДК 539.374

Э. И. СТАРОВОЙТОВ, Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Исследован цилиндрический изгиб прямоугольной трехслойной пластины с линейным вязкоупругим наполнителем в температурном поле. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель – легкий. Для решения задачи использован метод температурно-временной аналогии в вязкоупругих средах. Проведен численный анализ решений.

Введение. Широкое применение трехслойных конструкций в современных отраслях промышленности обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Результаты, связанные с деформированием трехслойных элементов конструкций, получены в работах [1, 2]. Деформирование прямоугольных трехслойных ортотропных пластин под действием локальных нагрузок рассмотрено в [3]. Цилиндрический изгиб подобных пластин с нелинейно упругим наполнителем рассмотрен в [4]. Здесь рассматривается цилиндрический изгиб прямоугольной трехслойной пластины с линейно вязкоупругим наполнителем в температурном поле.

1 Постановка и решение упругой задачи. Рассмотрим несимметричную по толщине упругую прямоугольную трехслойную ортотропную пластину. Введем прямоугольную систему координат x, y, z , связанную со срединной плоскостью наполнителя (рисунок 1). Полагаем, что размер пластины вдоль оси Oy достаточно велик, и она нагружена постоянной в направлении этой оси поперечной нагрузкой $p = p(x)$, $q = q(x)$. Вдоль оси Ox нагрузка может меняться произвольно.

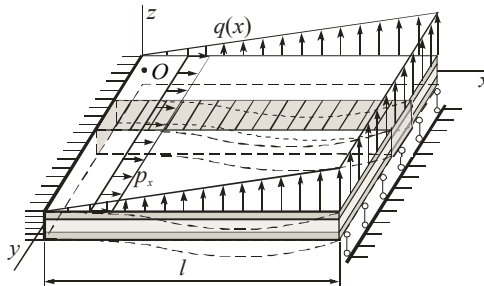


Рисунок 1 – Расчетная схема цилиндрического изгиба прямоугольной трехслойной ортотропной пластины

Через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя вдоль координатной оси x ; h_k – толщина k -го слоя, $k = 1, 2, 3$ ($h_3 = 2c$); l – ширина пластины вдоль оси x .

Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол, составляющий с координатной осью x величину $\psi(x)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Деформации малые.

Уравнения равновесия в перемещениях для упругой прямоугольной трехслойной ортотропной пластины при цилиндрическом изгибе приняты в виде [4]:

$$\begin{aligned} a_3 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} + p &= 0, \\ a_7 u_{,xxx} + a_{17} \psi_{,xxx} - a_{21} w_{,xxxx} + q &= 0, \\ a_6 u_{,xx} + a_{24} \psi_{,xx} - a_{17} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \psi &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате.

2 Решение задачи линейной вязкоупругости. Далее принимаем, что одинаковые по материалу несущие ортотропные слои являются упругими, а изотропный заполнитель – линейно вязкоупругим. Физические уравнения состояния для заполнителя принимаются в следующем виде:

$$s_{ij}^{(3)}(t) = 2G_3 \left(\varepsilon_{ij}^{(3)}(t) - \int_0^t R_3(t-\tau) \varepsilon_{ij}^{(3)}(\tau) d\tau \right), \quad \sigma^{(3)}(t) = 3K_3 \varepsilon^{(3)}(t),$$

где $s_{ij}^{(3)}$, $\sigma^{(3)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}^{(3)}$, $\varepsilon^{(3)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; G_3 – модуль сдвиговой деформации материала заполнителя; K_3 – модуль объемной деформации материала заполнителя; R_3 – ядро релаксации материала заполнителя.

В результате получим систему линейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} = -p + p_v, \\ a_6 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \psi = h_v, \\ a_7 u_{,xxx} + a_3 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} = -q + q_v. \end{cases} \quad (2)$$

Слагаемые, соответствующие неупругим деформациям в правой части уравнений (2), вычисляются по формулам

$$p_v = N_{,x}^{(3)v}, \quad h_v = (M_{,x}^{(3)v} - Q^{(3)v}), \quad q_v = M_{,xx}^{(3)v}.$$

Полученная система интегро-дифференциальных уравнений (2) является линейной, однако ее решение связано с существенными математическими

трудностями. Подобная система уравнений равновесия трехслойного стержня с линейно вязкоупругим наполнителем решена в [1] с помощью экспериментально-теоретического метода Ильюшина. Однако отсутствие результатов испытаний определению функций g_β не позволяет провести численный анализ приведенных там соотношений.

Воспользуемся методом итераций, основанном на методе упругих решений Ильюшина, при котором для любого n -го приближения получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_3 u_{,xx}^{(n)} + a_6 \psi_{,xx}^{(n)} - a_7 w_{,xxx}^{(n)} = -p + p_v^{(n-1)}, \\ a_6 u_{,xx}^{(n)} + a_{24} \psi_{,xx}^{(n)} - a_{17} w_{,xxx}^{(n)} - G_3 c \psi^{(n)} = h_v^{(n-1)}, \\ a_7 u_{,xxx}^{(n)} + a_{17} \psi_{,xxx}^{(n)} - a_{24} w_{,xxx}^{(n)} = -q + q_v^{(n-1)}. \end{cases} \quad (3)$$

В правых частях уравнений системы (3) величины $p_v^{(n-1)}$, $h_v^{(n-1)}$, $q_v^{(n-1)}$ называют *дополнительными «внешними» нагрузками*. Они соответствуют неупругим составляющим и на первом шаге приближения ($n = 1$) полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения по следующим формулам:

$$\begin{aligned} p_v^{(n-1)} &= N_{,x}^{(3)v(n-1)}, & h_v^{(n-1)} &= (M_{,x}^{(3)v(n-1)} - Q^{(3)v(n-1)}), & q_v^{(n-1)} &= M_{,xx}^{(3)v(n-1)}, \\ N^{(3)v(n-1)} &= \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \int_0^t R_3(t-\tau) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} d\tau dz, & M^{(3)v} &= \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \int_0^t R_3(t-\tau) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} d\tau z dz, \\ Q^{(3)v} &= 2G_3 \int_{-c}^c \int_0^t R_3(t-\tau) \psi^{(n-1)} d\tau dz. \end{aligned} \quad (4)$$

В результате на каждом шаге приближения получаем линейную задачу теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками (4).

3 Решение задачи термовязкоупругости. Рассмотрим деформирование трехслойной пластины с линейно вязкоупругим наполнителем в стационарном температурном поле T . Принимаем, что упругие характеристики материалов слоев в выбранном диапазоне температуры остаются постоянными, в физических уравнениях состояния наполнителя ядро релаксации зависит от температуры:

$$s_{ij}^{(3)}(t, T) = 2G_3 \left(\varepsilon_{ij}^{(3)}(t) - \int_0^t R_3(t-\tau, T) \varepsilon_{ij}^{(3)}(\tau) d\tau \right), \quad \sigma^{(3)}(t) = 3K_3 \varepsilon^{(3)}(t).$$

Для решения задачи воспользуемся методом температурно-временной аналогии (ТВА) в вязкоупругих средах [5]. В соответствии с ТВА в решении задачи вязкоупругости реальное время t заменяется условным модифицированным t' :

$$t' = \frac{t}{\alpha_T(T)},$$

где t – время наблюдения, c ; T – температура, К; $\alpha_T(T)$ – функция температурно-временного сдвига (формула Вильямса–Ландела–Ферри [6])

$$\lg a_T = C_1 \frac{T - T_0}{C_2 + T - T_0};$$

C_1, C_2 – экспериментальные константы, их рекомендуемые значения [6] $C_1 = 8,86$; $C_2 = 101,6$ К; T_0 – базовая температура в Кельвинах, при которой получены параметры вязкоупругого материала.

Тогда решение задачи об изгибе трехслойной консоли с вязкоупругим заполнителем в температурном поле имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)}(x, t') &= \tilde{N}_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + \tilde{N}_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \\ &+ \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u^{(n)}(x, t') &= \gamma_3 \Psi^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} \left[-a_{21} L_2^{-1} (p - p_v^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1} (q - q_v^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2 \right] + \\ &+ C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}, \\ w^{(n)}(x, t') &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \Psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1} (p - p_v^{(n-1)}) + a_3 L_4^{-1} (q - q_v^{(n-1)}) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и линейные интегральные операторы $L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$ определены в [1]; $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$ – константы интегрирования.

Если края пластины шарнирно оперты, то константы интегрирования будут следующие:

$$\begin{aligned} C_1^{(n)}(t) &= \frac{1}{l} \left(L_2^{-1} (q - q_v^{(n-1)}) \Big|_{x=0} - L_2^{-1} (q - q_v^{(n-1)}) \Big|_{x=l} \right), \\ C_2^{(n)}(t) &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\operatorname{ch}(\beta l)}{\operatorname{sh}(\beta l)} \left(\int g^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=l} - \int g^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} \right) - \int g^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx \Big|_{x=l} \right], \\ C_3^{(n)}(t) &= \frac{1}{\beta} \int g^{(n)}(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0}, \\ C_4^{(n)}(t) &= \frac{a_7}{a_{21}} \left(D_1^{(n)} \Big|_{x=0} - D_1^{(n)} \Big|_{x=l} \right) - \frac{1}{a_{21}} L_2^{-1} (q - q_v^{(n-1)}) \Big|_{x=0}, \\ C_5^{(n)}(t) &= D_2^{(n)} \Big|_{x=0} - D_2^{(n)} \Big|_{x=l} - \frac{a_7 l}{2a_{21}} \left(D_1^{(n)} \Big|_{x=0} - D_1^{(n)} \Big|_{x=l} \right) - \frac{l}{2a_{21}} L_2^{-1} (q - q_v^{(n-1)}) \Big|_{x=0}, \end{aligned}$$

$$C_6^{(n)}(t) = \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(p - p_v^{(n-1)}) \Big|_{x=0} - \frac{a_3}{\alpha_2} L_4^{-1}(q - q_v^{(n-1)}) \Big|_{x=0} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int \psi^{(n)} dx \Big|_{x=0},$$

$$C_7^{(n)}(t) = D_1^{(n)} \Big|_{x=0} - D_1^{(n)} \Big|_{x=l},$$

$$C_8^{(n)}(t) = \frac{a_{21}}{\alpha_2} L_2^{-1}(p - p_v^{(n-1)}) \Big|_{x=0} - \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(q - q_v^{(n-1)}) \Big|_{x=0}, \quad (6)$$

где $D_1^{(n)}(t) = \frac{a_7 l}{l \alpha_2} L_3^{-1}(q - q_v^{(n-1)}) - \frac{a_7 l}{2 \alpha_2} L_2^{-1}(q - q_v^{(n-1)}) - \frac{a_{21}}{l \alpha_2} L_2^{-1}(p - p_v^{(n-1)})$,

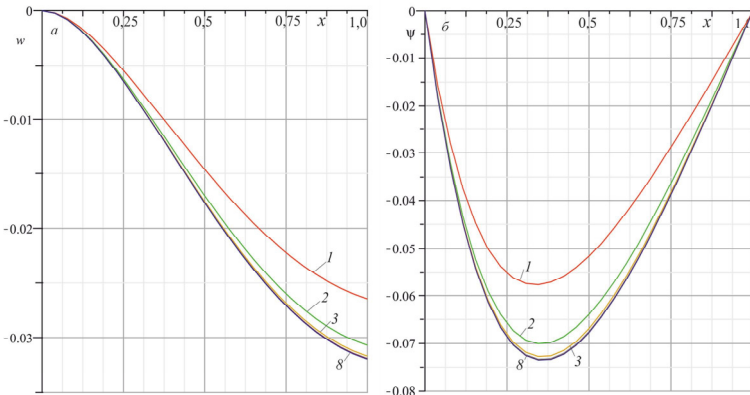
$$D_2^{(n)}(t) = \frac{a_3}{l \alpha_2} \left(\int \psi^{(n)} dx + L_4^{-1}(q - q_v^{(n-1)}) \right) - \frac{a_2 l}{6 \alpha_2} L_2^{-1}(q - q_v^{(n-1)}) - \frac{a_7}{l \alpha_2} L_3^{-1}(p - p_v^{(n-1)}).$$

4 Численный анализ. Численные результаты получены для шарнирно закрепленной пластины, набранной из материалов УВЭС–фторопласт–УВЭС, толщины слоев которой: $h_1 = h_2 = 0,05$; $c = 0,05$; интенсивности равномерно распределенной нагрузки $p = 0$, $q = 2,5$ МПа. Ядро релаксации принималось в виде, предложенном Ржаницыным:

$$R_3(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1},$$

где для фторопласта $A = 0,02366$, $\beta = 3,33 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 0,05$.

Рисунок 2 иллюстрирует практическую сходимость метода упругих решений (5), (6) для задачи линейной термовязкоупругости.



$1 - n = 1$; $2 - n = 2$, $3 - n = 3$; $8 - n = 8$.

Рисунок 2 – Сходимость метода упругих решений:
 a – прогиб w [м]; b – относительный сдвиг ψ вдоль оси x

Как видно из графиков перемещений (a – прогиба w [м], b – относительного сдвига ψ в заполнителе) в результате нагружения пластины в течение пяти минут при температуре 350 К, решение довольно быстро сходится. Так,

результаты четвертой итерации отличаются от третьей лишь на 0,1 %, а восьмой, принятой за искомое решение, от седьмой – менее чем на 0,01 %.

На рисунке 3 показано изменение a – прогиба w [м], b – относительного сдвига ψ в заполнителе, через пять минут после приложения нагрузки при различных температурах: 1 – $T = 300$ К; 2 – $T = 320$ К ($\alpha_T(320) = 0,23288$); 3 – $T = 330$ К ($\alpha_T(330) = 0,13269$); 4 – $T = 350$ К ($\alpha_T(350) = 0,053817$). При нагреве пластины на 20° перемещения возрастают на 5 %, при нагреве на 30° – 7 %, на 50° – 8 %.

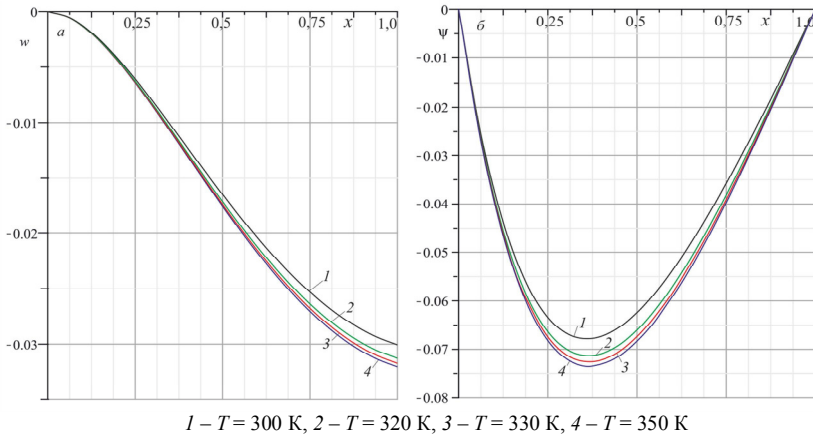


Рисунок 3 – Расчетные значения прогиба w , m (a), относительного сдвига ψ в заполнителе (b) через пять минут после приложения нагрузки в зависимости от температуры

Рисунок 4, a иллюстрирует изменение экстремальных значений прогиба w [м], рисунок 4, b – относительного сдвига ψ в заполнителе вязкоупругой пластины с течением времени t при различных температурах: 1 – $T = 300$ К; 2 – $T = 320$ К; 3 – $T = 330$ К.

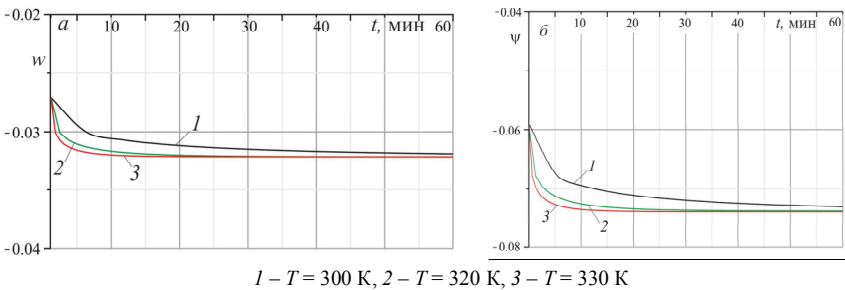


Рисунок 4 – Изменение во времени экстремумов: a – прогиба w [м], b – относительного сдвига ψ при различных температурах

Как видно из графиков, вязкоупругие свойства проявляются тем больше, чем выше температура. При достаточно длительном времени значения перемещений при различных температурах асимптотически сближаются, что обусловлено исчерпанием вязкоупругих свойств материала.

Выводы. Таким образом, решена задача о цилиндрическом изгибе прямоугольной трехслойной ортотропной пластины с линейно вязкоупругим наполнителем в температурном поле. Численная апробация аналитических решений показала практическую сходимость предложенного метода последовательных приближений и характер влияния температуры на перемещения.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Механика, техническая диагностика, металлургия» (задание 1.24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Старовойтов, Э. И.** Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 379 с.

3 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование прямоугольных трехслойных ортотропных пластин под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро // Вестник Самарского государственного университета. – 2008. – № 8 / 1(67). – С. 469–478.

4 **Протуро, И. И.** Цилиндрический изгиб ортотропной трехслойной пластины с нелинейно-упругим наполнителем / И. И. Протуро // Теоретическая и прикладная механика. – Мн.: БНТУ, 2011. – № 26. – С. 189–195.

5 **Ильюшин, А. А.** Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации / А. А. Ильюшин. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

6 **Ферри, Дж.** Вязкоупругие свойства полимеров / Дж. Ферри. – М.: ИЛ, 1963. – 538 с.

E. I. STAROVOITOV, D. V. LEONENKO

CYLINDRICAL BENDING OF RECTANGULAR SANDWICH PLATES IN THE TEMPERATURE FIELD

Cylindrical bending of rectangular sandwich plate with a linear viscoelastic filler in the temperature field is investigated. To describe the kinematics of the asymmetric across the thickness package the hypothesis of broken normal is accepted. Filler is light. To solve the problem, the method of temperature-time analogy in viscoelastic media is used. The numerical analysis of solutions is performed.

Получено 28.11.2014