ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 8. Гомель, 2014

УДК 539.3

Д. А. ИВАНЫЧЕВ, О. П. БУЗИНА
Липецкий государственный технический университет, Россия

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Метод граничных состояний применен для решения задач изгиба анизотропных пластинок. Разработана идеология, выполнено и проанализировано решение задачи изгиба пластинки треугольной, круговой и прямоугольной формы в частном случае анизотропии.

В механике твердого тела определение характеристик напряженно-деформированного состояния тел из анизотропных материалов составляет сложную задачу, даже если рассматривается частный случай. Для решения задач изгиба и кручения анизотропных пластинок из материала, обладающего плоскостью упругой симметрии, предлагается использовать метод граничных состояний (МГС).

Его основу составляют понятия пространств внутренних и граничных состояний. Эти пространства являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. Строятся базисы таких пространств с учетом топографии области и реологии среды; проводится их ортогонализация. Искомое состояние раскладывается в ряд по элементам ортонормированного базиса и суть задачи составляет отыскание коэффициентов линейной комбинации, т. е. коэффициентов Фурье. Основной трудностью является построение базиса внутренних состояний.

Эффективность МГС в задачах статики изотропных тел определена рядом присущих методу черт [1]:

1) исходный базис пространства состояний строится для класса топологически эквивалентных тел: ограниченных односвязных, неограниченных односвязных, двусвязных и т. п.;

2) «тело в смысле МГС», под которым понимается ортонормированный базис внутренних состояний, строится однократно, и может использоваться для решения различных краевых задач.

3) граничные условия содержатся в результирующем граничном состоянии, что служит основой проверки адекватности решения;

4) решение имеет аналитическую форму, что позволяет легко проводить анализ.

Рассмотрим анизотропную пластинку, которая в каждой точке имеет плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Примем срединную плоскость недеформированной пластинки за плоскость xy. На боковой поверхности заданы усилия, приводящие к скручивающим и изгибающим моментам. Объемные силы отсутствуют.

Лехницким [2] получено общее решение данной задачи, выражающее компоненты тензора напряжений и вектора перемещений через две комплексные переменные, сопряженные аффинными преобразованиями:

$$w = 2\,\mathrm{Re}[w_1(z_1) + w_2(z_2)];$$

$$M_x = -2\,\mathrm{Re}[p_1 w_1''(z_1) + p_2 w_2''(z_2)];\; M_y = -2\,\mathrm{Re}[q_1 w_1''(z_1) + q_2 w_2''(z_2)];$$

$$H_{xy} = H_{yx} = -2\,\mathrm{Re}[r_1 w_1''(z_1) + r_2 w_2''(z_2)];$$

$$N_x = -2\,\mathrm{Re}[\mu_1 s_1 w_1'''(z_1) + \mu_2 s_2 w_2'''(z_2)];\; N_y = 2\,\mathrm{Re}[s_1 w_1'''(z_1) + s_2 w_2'''(z_2)];$$

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3}z;\; \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3}z;\; \tau_{xy} = \frac{12H_{xy}}{h^3};$$

$$\tau_{xz} = \frac{6N_x}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right);\; \tau_{yz} = \frac{6N_y}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right).$$

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y},$$

где w – функция прогиба; $z_1 = x + \mu_1 y$, $z_2 = x + \mu_2 y$ – обобщенные комплексные переменные; μ_1, μ_2 – комплексные корни векового уравнения:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0;$$

M_x, M_y – изгибающие моменты; H_{xy}, H_{yx} – скручивающие моменты; N_x, N_y – перерезывающие силы; h – толщина пластинки, p_i, q_i, s_i, D_{ij} – константы, определяемые параметрами анизотропии, функции $w_i(z_i)$ – аналитические по своим переменным. Производные от функции прогиба берутся в обычном смысле.

Внутреннее состояние в методе граничных состояний определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений:

$$\xi = \{\{u, v, w\}, \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xy}\}, \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}\}\}.$$

Базисные наборы внутренних состояний можно конструировать, генерируя возможные варианты для аналитических функций. Для ограниченного односвязного сечения можно использовать фундаментальную систему многочленов Вейерштрасса:

$$\begin{pmatrix} w_1(z_1) \\ w_2(z_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} z_1{}^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_2{}^k. \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} iz_1{}^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz_2{}^k \end{pmatrix}, \ldots;\, k = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний можно определить через внутреннюю энергию упругого деформирования

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_D \left(\sigma_x^1 \varepsilon_x^2 + \sigma_y^1 \varepsilon_y^2 + \sigma_z^1 \varepsilon_z^2 + 2\sigma_{xz}^1 \varepsilon_{xz}^2 + 2\sigma_{yz}^1 \varepsilon_{yz}^2 + 2\sigma_{xy}^1 \varepsilon_{xy}^2\right) ds.$$

На границе тела напряжения оставляют след в виде поверхностных усилий p_x, p_y, которые вкупе с граничными значениями перемещений образуют граничное состояние $\gamma = \{\{u, v, w\}, \{p_x, p_y\}\}$. В пространстве граничных состояний Γ скалярное произведение выражает работу внешних сил:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\partial D} ({p_x}^1 u^2 + {p_y}^1 v^2)\; dl.$$

В силу теорем Бетти, Сомильяны и принципа возможных перемещений оба пространства Ξ, Γ сопряжены гильбертовым изоморфизмом, что позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от краевых условий; в общем случае проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения искомых состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса, но в случаях первой и второй основных задач сводится к рутинному вычислению определенных интегралов. Соответственно, при заданных на границе перемещениях u_0, v_0 либо усилиях p_{x0}, p_{y0} коэффициенты Фурье рассчитываются так:

$$c_j = \int_{\partial D} \left(p_x^j u_0 + p_y^j v_0\right) dl\,; \qquad c_j = \int_{\partial D} \left(p_{x0} u^j + p_{y0} v^j\right) dl\,.$$

Рассмотрен изгиб пластинок треугольной (рисунок 1) и круглой (рисунок 2) формы под действием распределенных по контуру моментов.

На рисунке 3 приведены поверхность и изолинии компоненты вектора перемещения w для треугольной пластины. Результаты расчетов поверхности и изолиний компоненты вектора перемещения w для круглой пластины представлены на рисунке 4. Приведенные схемы дают представление о влиянии анизотропии на деформации пластин.

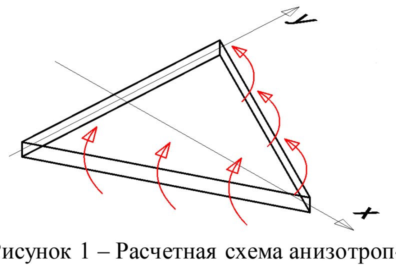

Рисунок 1 – Расчетная схема анизотропной треугольной пластинки

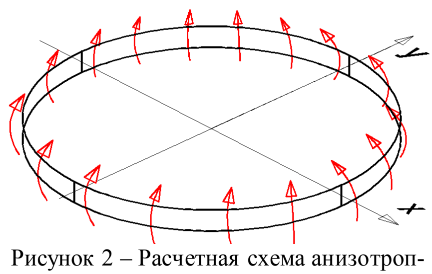

Рисунок 2 – Расчетная схема анизотропной круглой пластинки

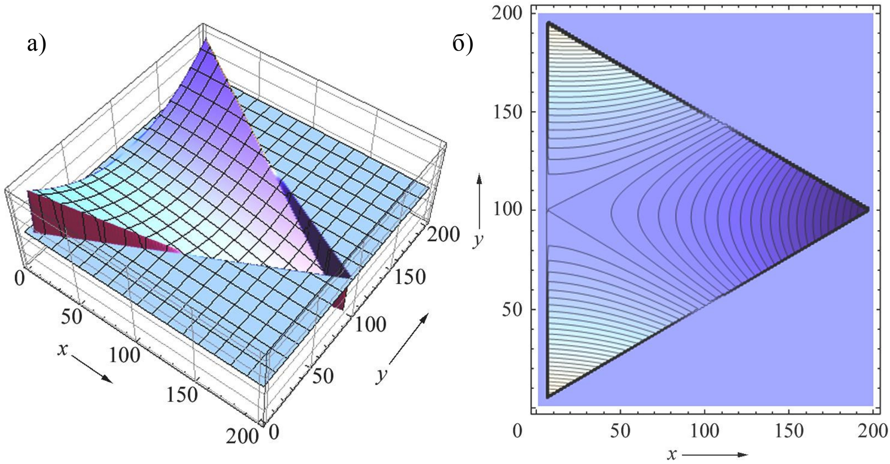

Рисунок 3 – Компонента вектора перемещения *w* треугольной пластинки:
а – поверхность, *б* – изолинии

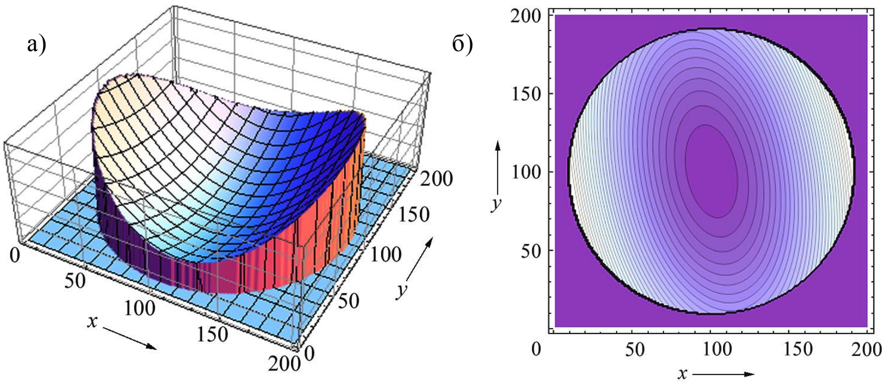

Рисунок 4 – Компонента вектора перемещения *w* круглой пластинки:
а – поверхность, *б* – изолинии

Также рассмотрено решение второй основной задачи для анизотропной пластинки прямоугольной формы. В качестве граничных условий, заданы предельные значения следующих компонент вектора перемещения:

$$u = -4xz;\ v = -6yz;\ w = 2x^2 + 3y^2.$$

Полученные поля напряжений:

$$\sigma_x = -63{,}159z;\ \sigma_y = -170{,}31z;\ \sigma_{yz} = 0;\ \sigma_{xz} = 0;\ \sigma_{xy} = 13{,}61.$$

На рисунке 5 приведены поверхность и изолинии компоненты вектора перемещения *w*.

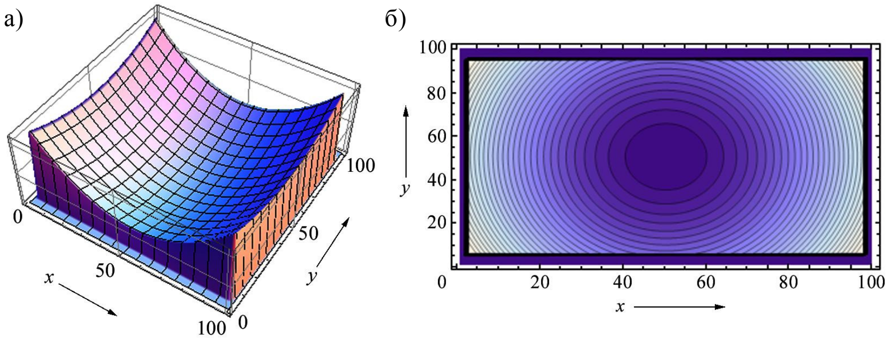

Рисунок 5 – Компонента вектора перемещения *w* прямоугольной пластины:
а – поверхность, *б* – изолинии

Таким образом, выполненные расчеты показывают, что метод граничных состояний может быть успешно использован для решения задач об изгибе анизотропных пластин. С его помощью получены решения некоторых частных задач для пластин треугольной, круглой и прямоугольной формы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Пеньков, В. Б.** Метод граничных состояний для решения задач линейной механики / В. Б. Пеньков, В. В. Пеньков // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2, № 2. – С. 115–137.

2 **Лехницкий, С. Г.** Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 463 с.

3 **Лехницкий, С. Г.** Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

4 **Иванычев, Д. А.** Метод граничных состояний в задачах теории анизотропной упругости / Д. А. Иванычев. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG Dudweiler Landstr, 2011. – 99 с.

D. A. IVANYCHEV, O. P. BUZINA

INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF ANISOTROPIC PLATES BY THE BOUNDARY STATES METHOD

Method of boundary states is applied to solve the problems of the anisotropic plates bending. The ideology is developed, the problem solution for the bending of the triangular, circular and rectangular configuration of the plate at the particular case of anisotropy is performed and analyzed.

Получено 14.02.2014