

УДК 621.8:534.83

*Д. А. ЧЕРНОВС*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЕТАЛЕЙ МАШИН НА ОСНОВЕ ОДНОМАССОВОЙ МОДЕЛИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ВЯЗКОУПРУГИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА**

Составлены динамические уравнения колебаний груза, прикрепленного к стержню из материала с вязкоупругими свойствами. Получены выражения для коэффициентов жесткости и вязкого сопротивления в одномассовой модели рассматриваемой системы при продольных, изгибных и крутильных установившихся вынужденных колебаниях. Сформулирован способ учета вязкости материала в рамках одномассовой модели вибраций элементов конструкций произвольной конфигурации.

**Введение.** При функционировании машин их детали подвергаются периодическим силовым воздействиям, вызывающим деформационные (продольные, крутильные и изгибные) колебания элементов конструкций. Эти колебания являются, в частности, одним из основных источников шума в зубчатых передачах [1, 2].

Наиболее распространенный подход к описанию и прогнозированию вибраций деталей машин основан на использовании упрощенной одномассовой динамической модели [3–5]. Характеристики элементов данной модели определяются геометрическими и инерционными параметрами моделируемой системы, а также механическими характеристиками материалов, из которых изготовлены детали машины. В настоящее время в конструкциях различных механизмов широко используются полимерные материалы и дисперсно-армированные композиты на их основе [4, 6]. Деформационное поведение подобных материалов характеризуется рядом отличительных особенностей. В качестве одной из таких особенностей следует отметить ярко выраженные вязкие свойства полимерного материала, обуславливающие высокую демпфирующую способность полимерных элементов конструкций.

В известных научных публикациях [1–6], посвященных описанию вибраций механических передач, не приводится достаточно подробный анализ влияния релаксационных и вязкоупругих характеристик полимеров на виброакустические параметры машин. Исследование такого влияния позволит более эффективно выбирать рецептуру конструкционных полимерных композитов для снижения динамической нагруженности и уровня шума, создаваемого при работе различных механизмов. В связи с вышесказанным целью настоящей работы является установление зависимости параметров колебаний элементов одномассовой динамической модели детали машины от вязкоупругих характеристик материала, используемого в моделируемой конструкции.

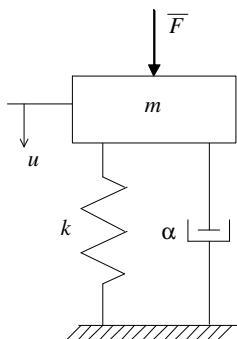


Рисунок 1 – Одномассовая динамическая модель

**Описание модели.** Упрощенная одномассовая динамическая модель (рисунок 1) детали машины включает материальную точку массой  $m$ , упругий элемент (пружину) с коэффициентом жесткости  $k$  и вязкий элемент (демпфер) с коэффициентом вязкого сопротивления  $\alpha$ . На материальную точку действует вынуждающая гармоническая сила  $F$  с частотой  $\omega$  и амплитудой  $F_0$ .

Смещение  $u$  материальной точки удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{u} + \alpha\dot{u} + ku = F_0 \sin(\omega t). \quad (1)$$

Точка над символом здесь и далее обозначает производную по времени от соответствующей величины.

Решение уравнения (1) для установившихся вынужденных колебаний имеет вид

$$u = \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} \left[ (k - m\omega^2) \sin(\omega t) - \alpha\omega \cos(\omega t) \right].$$

Амплитудное значение скорости колебаний, определяющее уровень звукового давления при вибрации [4], задается соотношением

$$v_{\max} = \frac{F_0\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}}. \quad (2)$$

Коэффициенты  $k$  и  $\alpha$  определяются вязкоупругими характеристиками материалов, из которых изготовлены детали моделируемого механизма.

**Вязкоупругие характеристики материала.** Линейно вязкоупругое деформирование изотропного материала описывается физическими уравнениями вида [7]

$$s_{ij}(t) = 2G \left[ v_{ij}(t) - \int_0^t v_{ij}(x) R(t-x) dx \right], \quad \sigma = K\Delta, \quad (3)$$

где  $t$  – время;  $s_{ij}$ ,  $v_{ij}$  – компоненты девиатора тензора напряжения и деформации соответственно;  $\sigma$  – гидростатическое давление;  $\Delta$  – объемная деформация;  $G$  – мгновенный модуль сдвига материала;  $K$  – объемный модуль материала;  $R(t)$  – ядро релаксации материала при сдвиговом деформировании.

В рамках настоящей работы будем использовать ядро релаксации в виде суммы экспоненциальных функций

$$R(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\tau_i} \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right), \quad (4)$$

где  $\tau$  – время релаксации;  $\delta$  – безразмерный параметр ядра релаксации;  $n$  – количество описываемых релаксационных процессов.

Наряду с константами  $G$  и  $K$  для характеристики механических свойств изотропных материалов часто используют модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$

$$E = \frac{9KG}{3K+G}, \quad \nu = \frac{3K-2G}{6K+2G}. \quad (5)$$

При анализе циклического нагружения материала удобно наряду с уравнениями (3) использовать комплексный динамический модуль сдвига [7]. Если угол сдвига  $\gamma$  для рассматриваемого материала изменяется по гармоническому закону  $\gamma = \gamma_0 \sin(\omega t)$ , то соответствующее сдвиговое напряжение  $s$  будет определяться соотношением

$$s = G'(\omega)\gamma_0 \sin(\omega t) + G''(\omega)\gamma_0 \cos(\omega t). \quad (6)$$

Здесь  $G'(\omega)$ ,  $G''(\omega)$  – действительная и мнимая компоненты комплексного динамического модуля сдвига соответственно. При использовании ядра релаксации в виде (4) для функций  $G'(\omega)$ ,  $G''(\omega)$  можно получить

$$G'(\omega) = G \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \right], \quad G''(\omega) = G \omega \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \tau_i}{1 + \tau_i^2 \omega^2}. \quad (7)$$

В случае установившихся гармонических деформаций физические уравнения (3) можно переписать в виде

$$s_{ij}(t) = 2G'(\omega)v_{ij}(t) + \frac{2}{\omega}G''(\omega)\dot{v}_{ij}(t), \quad \sigma = K\Delta. \quad (8)$$

Если колебания реализуются в условиях одноосного напряженного состояния, то связь осевого напряжения  $\sigma_x$  с продольной деформацией  $\epsilon_x$  описывается дифференциальным уравнением

$$\sigma_x = E'(\omega)\epsilon_x + \frac{1}{\omega}E''(\omega)\dot{\epsilon}_x. \quad (9)$$

Здесь  $E'$ ,  $E''$  – действительная и мнимые компоненты комплексного динамического модуля Юнга. Функции  $E'(\omega)$ ,  $E''(\omega)$  определяются следующим образом

$$E' = 9K \frac{3KG' + (G')^2 + (G'')^2}{(3K+G')^2 + (G'')^2}, \quad E'' = \frac{27K^2 G''}{(3K+G')^2 + (G'')^2}. \quad (10)$$

**Примеры определения коэффициентов модели.** В качестве модельных примеров вибраций элементов конструкций рассмотрим продольные (рисунок 2, а), изгибные (рисунок 2, б) и крутильные (рисунок 2, в) колебания стержня.

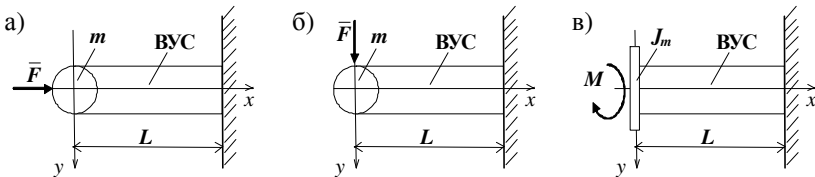


Рисунок 2 – Схемы продольных (а), изгибных (б) и крутильных (в) колебаний вязкоупругого стержня (ВУС)

*Продольные колебания.* На вязкоупругий стержень длины  $L$  с площадью поперечного сечения  $S$  действует гармоническая продольная сила  $F = F_0 \sin(\omega t)$  (см. рисунок 2, а). В точке приложения силы к стержню крепится точечная масса  $m$ . Динамическое уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\ddot{u} = F - P. \quad (11)$$

Здесь  $u$  – смещение материальной точки;  $P$  – сила, действующая на материальную точку со стороны стержня. Стержень находится в одноосном напряженном состоянии. При этом  $P = \sigma_x S$ ,  $u = \epsilon_x L$ . Используя совместно уравнения (8) и (9), получим

$$m\ddot{u} + \frac{S}{L\omega} E''(\omega) \dot{u} + \frac{S}{L} E'(\omega) u = F_0 \sin(\omega t).$$

Сопоставив данное выражение с уравнением (1), определим коэффициенты модели в рассматриваемом примере

$$k = \frac{S}{L} E'(\omega), \quad \alpha = \frac{S}{L\omega} E''(\omega). \quad (12)$$

*Изгибные колебания.* Консольно закрепленный вязкоупругий стержень имеет длину  $L$  и осевой момент поперечного сечения  $J_z$ . На свободном конце стержня ( $x = 0$ ) закреплен точечный груз  $m$  и действует поперечная гармоническая сила  $F = F_0 \sin(\omega t)$  (см. рисунок 2, б). Динамическое уравнение материальной точки в проекциях на ось  $y$  имеет вид

$$m\ddot{u} = F - P. \quad (13)$$

Здесь  $u$  – вертикальное смещение материальной точки;  $P$  – сила, действующая со стороны стержня. Изгиб стержня под действием силы  $P$  будем описывать без учета сдвиговых деформаций. При этом

$$\epsilon_x = y \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = y u_y''.$$

Здесь  $u_y$  – вертикальное смещение точек средней линии стержня, зависящее от времени и координаты  $x$ . Помножив обе части равенства (9) на  $y$  и проинтегрировав по площади поперечного сечения, получим

$$Px = J_z E'(\omega) u_y'' + \frac{J_z}{\omega} E''(\omega) \dot{u}_y''.$$

Решение данного уравнения будем искать в виде  $u_y(x,t)=f_x(x)f_t(t)$ . Пусть функция времени  $f_t$  удовлетворяет уравнению

$$P=E'(\omega)f_t+\frac{1}{\omega}E''(\omega)\dot{f}_t. \quad (14)$$

Тогда для функции координаты  $f_x$  получим:  $x=J_z f_x''$ .

Решение данного уравнения при граничных условиях консольного закрепления ( $f(L)=f'(L)=0$ ) имеет вид

$$f_x=\frac{1}{2J_z}\left(\frac{x^3}{3}-L^2x\right)+\frac{L^3}{3J_z}.$$

Следовательно,  $f_x(0)=\frac{L^3}{3J_z}$ . Домножая и деля правую часть равенства (14) на  $f_x(0)$ , получаем

$$P=\frac{1}{f_x(0)}E'(\omega)f_t f_x(0)+\frac{1}{f_x(0)\omega}E''(\omega)\dot{f}_t f_x(0)=\frac{3J_z}{L^3}E'(\omega)u+\frac{3J_z}{L^3\omega}E''(\omega)\dot{u}.$$

Здесь  $u=u_y(0,t)=f_x(0)f_t(t)$  – вертикальное смещение материальной точки. С учетом динамического уравнения (13) получим

$$m\ddot{u}+\frac{3J_z}{L^3}\frac{E''(\omega)}{\omega}\dot{u}+\frac{3J_z}{L^3}E'(\omega)u=F_0\sin(\omega t).$$

Сопоставив последнее равенство с уравнением (1), определим коэффициенты жесткости и вязкого сопротивления

$$k=\frac{3J_z}{L^3}E'(\omega), \quad \alpha=\frac{3J_z}{L^3}\frac{E''(\omega)}{\omega}. \quad (15)$$

*Крутильные колебания.* При моделировании крутильных колебаний (рисунков 2, с) уравнение (1) переписывается в виде

$$J_m\ddot{\phi}+\alpha_\phi\dot{\phi}+k_\phi\phi=M_0\sin(\omega t).$$

Здесь  $M_0$  – амплитуда крутящего момента;  $J_m$  – момент инерции твердого тела;  $\phi$  – угол поворота;  $k_\phi$ ,  $\alpha_\phi$  – угловые коэффициенты жесткости и вязкого сопротивления соответственно. Можно показать, что в случае установившихся вынужденных гармонических крутильных колебаний консольно закрепленного стержня длины  $L$  коэффициенты  $k_\phi$  и  $\alpha_\phi$  определяются соотношениями

$$k_\phi=\frac{J_x}{L}G'(\omega), \quad \alpha_\phi=\frac{J_x}{L}\frac{G''(\omega)}{\omega}, \quad (16)$$

где  $J_x$  – полярный момент инерции поперечного сечения стержня.

### Способ учета вязкости материала в рамках одномассовой модели.

В таблице 1 приведены известные из курса «Сопротивление материалов» [8] соотношения для коэффициента жесткости консольно закрепленного линейно упругого стержня. В режиме растяжение-сжатие на свободный конец консоли действует продольная сила  $F_x = \text{const}$ . Коэффициент жесткости определяется как отношение данной силы к продольному смещению точки ее приложения. В режиме изгиба на конце консоли действует поперечная сила  $F_y = \text{const}$ . При этом коэффициент жесткости равен отношению данной силы к максимальному прогибу средней линии стержня. В режиме кручения на стержень действует концевой момент  $M_{yz} = \text{const}$  в плоскости  $yz$ , перпендикулярной средней линии. Коэффициент жесткости при этом равен отношению момента к максимальному углу поворота поперечного сечения.

Сопоставив выражения, приведенные в таблице 1, с полученными соотношениями (12), (15) и (16), можно отметить следующее:

1 Если в выражении для коэффициента жесткости линейно упругого стержня при статическом нагружении заменить модуль упругости действительной компонентой соответствующего комплексного динамического модуля, то получим коэффициент жесткости вязкоупругого стержня при гармоническом нагружении.

2 Коэффициент вязкого сопротивления вязкоупругого стержня при гармоническом нагружении также может быть определен из соотношения для коэффициента жесткости линейно упругого стержня. Для этого модуль упругости следует заменить отношением мнимой компоненты комплексного динамического модуля к частоте деформирования.

**Таблица 1 – Коэффициенты жесткости упругого стержня при различных режимах статического нагружения**

| Режим нагружения  | Коэффициент жесткости   |
|-------------------|---|
| Растяжение-сжатие | $k = \frac{F_x}{u_{x\max}} = \frac{S}{L} E$                   |
| Изгиб             | $k = \frac{F_y}{u_{y\max}} = \frac{3J_z}{L^3} E$              |
| Кручение          | $k_\varphi = \frac{M_{yz}}{\varphi_{\max}} = \frac{J_x}{L} G$ |

Данный способ перехода от анализа упругого деформирования к описанию вязкоупругого гармонического деформирования справедлив не только для консольно закрепленного стержня, но и для любого элемента конструкции. В частности, жесткость пластин при изгибе, как и жесткость большинства контактных пар, определяется комбинацией упругих характеристик ма-

териала  $D = \frac{E}{1-\nu^2}$ . В данном случае согласно равенствам (5) при расчете коэффициента жесткости следует произвести замену

$$\frac{E}{1-\nu^2} \rightarrow G'(\omega) + 9K \frac{3KG'(\omega) + 4[(G'(\omega))^2 + (G''(\omega))^2]}{(3K + 4G'(\omega))^2 + 16(G''(\omega))^2}.$$

При расчете коэффициента вязкого сопротивления используется замена

$$\frac{E}{1-\nu^2} \rightarrow \frac{G'(\omega)}{\omega} + \frac{1}{\omega} \frac{27K^2 G''(\omega)}{(3K + 4G'(\omega))^2 + 16(G''(\omega))^2}.$$

При использовании сформулированного способа учета вязкости материала в одномассовой модели следует учитывать, что определяемый при этом коэффициент вязкого сопротивления отражает только те механические потери, которые обусловлены внутренним трением.

**Пример использования одномассовой модели.** В качестве расчетного примера использования полученных соотношений рассмотрим продольные колебания стержня длины  $L = 0,1$  м с площадью поперечного сечения  $S = 50$  см<sup>2</sup>. На конце стержня крепится материальная точка массы  $m = 0,1$  кг, и действует продольная гармоническая сила с амплитудой  $F_0 = 10$  кН. В таблице 2 приведены значения вязкоупругих характеристик политетрафторэтилена (ПТФЭ) и полиэтилентерефталата (ПЭТФ). Данные полимеры будем рассматривать в качестве материалов стержня.

Таблица 2 – Вязкоупругие характеристики полимерных материалов

| Материал | $K$ , ГПа | $G$ , ГПа | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\tau_1$ , с | $\tau_2$ , с | Источник |
|----------|-----------|-----------|------------|------------|--------------|--------------|----------|
| ПТФЭ     | 4,7       | 0,032     | 0,154      | 0,165      | 0,078        | 3,448        | [9]      |
| ПЭТФ     | 6,05      | 1,376     | 0,34       | 0,39       | 0,01         | 3,48         | [10]     |

Одной из основных характеристик колебательного процесса является амплитудное значение скорости колебаний материальной точки. Для определения величины  $v_{max}$  достаточно подставить выражения (12) в равенство (2). Действительная и мнимая компоненты комплексного модуля Юнга в (12) определяются соотношениями (10) с учетом (7). Для сравнения получим также расчетную оценку амплитуды скорости колебаний без учета вязкости материала стержня. При этом

$$k = \frac{S}{L} E, \quad \alpha = 0. \quad (17)$$

Здесь  $E$  – мгновенный модуль Юнга, определяемый выражениями (5).

На рисунке 3 представлены расчетные частотные зависимости амплитуды скорости материальной точки. Можно отметить, что пренебрежение вязкостью материала стержня не позволяет адекватно прогнозировать парамет-

ры колебательного процесса вблизи собственной частоты системы. Вне зоны резонанса влияние вязкости незначительно.

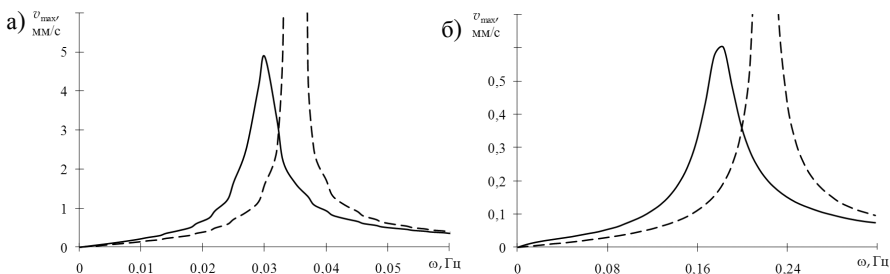


Рисунок 3 – Зависимость амплитудного значения скорости колебаний от частоты вынуждающей силы для стержня из ПТФЭ (а) и ПЭТФ (б). Сплошные кривые – использование соотношений (12); пунктирные кривые – соотношений (17)

**Закключение.** Предложен способ учета реономных свойств материала, из которого изготовлена деталь механизма, в рамках одномассовой динамической модели вибраций данного механизма. Показано, что для этого в выражениях для коэффициента жесткости упругие модули материала следует заменить действительными компонентами соответствующих комплексных динамических модулей. При расчете коэффициента вязкого сопротивления в тех же выражениях для коэффициента жесткости модули упругости заменяются отношением мнимой компоненты динамического модуля к частоте деформирования. Данная замена правомерна только при моделировании установившихся гармонических колебаний. Определяемый при этом коэффициент вязкого сопротивления позволяет учесть только часть механических потерь, обусловленную внутренним трением в материале.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Вибрация механизмов с зубчатыми передачами** / под ред. М. Д. Генкина и Э. Л. Айрапетова. – М. : Наука, 1978. – 127 с.
- 2 **Ишин, Н. Н.** Динамика и вибромониторинг зубчатых передач / Н. Н. Ишин. – Минск : Беларус. навука, 2013. – 432 с.
- 3 **Басинюк, В. Л.** Об улучшении виброакустических характеристик прямозубых зубчатых передач путем введения в конструкцию упругоподатливых и демпфирующих элементов / В. Л. Басинюк // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2005. – № 3. – С. 19–24.
- 4 **Черноус, Д. А.** Особенности расчета уровня шума для полимерных деталей машин / Д. А. Черноус, А. О. Шимановский // Новые технологии и материалы, автоматизация производства: материалы междунар. науч.-тех. конф., Брест, 29–30 окт. 2014 г. – С. 76–79.



5 **Айрапетов, Э. Л.** Возбуждение колебаний в прямозубых передачах. Ч. 1. Теоретические исследования / Э. Л. Айрапетов, Р. Л. Иоффе, О. И. Косарев // Передачи и трансмиссии = Gearings and transmissiom. – 1994, № 1. – С. 5–14.

6 **Белый, В. А.** Металлополимерные зубчатые передачи / В. А. Белый, В. Е. Старжинский, С. В. Щербаков – Минск : Наука и техника, 1981. – 352 с.

7 **Ferry, J. D.** Viscoelastic properties of polymers / J. D. Ferry. – New York-London, 1961. – 530 p.

8 **Беляев, Н. М.** Соппротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1976. – 608 с.

9 **Черноус, Д. А.** Модифицированная модель Такаянаги деформирования дисперсно-наполненных композитов. Часть 3. Определение термовязкоупругих параметров полимерной матрицы / Д. А. Черноус, С. В. Шилько // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 124–131.

10 **Шилько, С. В.** Метод определения термовязкоупругих параметров полимеров и эластомеров / С. В. Шилько, Д. А. Черноус, С. В. Панин // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 4. – С. 949–952.

*D. A. CHERNOUS*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **DETERMINATION OF THE MACHINE PARTS FORCED VIBRATIONS PARAMETERS BASED ON THE SINGLE-MASS MODEL CONSIDERING THE VISCOELASTIC MATERIAL PROPERTIES**

There were composed the oscillations dynamic equations for the load, attached to the rod made of material with viscoelastic properties. The expressions for the stiffness coefficients and the viscous resistance for single-mass model of the considered system were obtained for longitudinal, flexural and torsional steady forced vibrations. There was formulated a method of the material viscosity accounting for the single-mass model of vibrations of structural elements with arbitrary configuration.

Получено 29.06.2015