

УДК 531/532; 577.3

*Н. Н. КИЗИЛОВА, В. А. ЧЕРЕВКО**Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина***МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ
НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ СУСПЕНЗИЙ МИКРО- И НАНОЧАСТИЦ
В МИКРОКАНАЛАХ**

Обсуждаются постановки задач о течении жидкостей в микро- и наноразмерных каналах с учетом проскальзывания на стенках за счет диффузионного отражения частиц на шероховатой стенке. Получено решение задачи о течении Куэтта трех несмешивающихся жидкостей с разными концентрациями частиц между движущимися параллельными пластинами. Проведены расчеты объемного расхода и напряжения сдвига при разных параметрах жидкостей и частиц. Показано, что при определенных комбинациях значений параметров объемный расход жидкости может быть существенно увеличен, что можно использовать для повышения эффективности соответствующих микрожидкостных и наножидкостных устройств.

В последние годы большое внимание уделяется разработке различных микроэлектромеханических систем (МЭМС), в которых используются течения однородных жидкостей, разбавленных и концентрированных суспензий наночастиц в системах микро- ($h \sim 10\text{--}500$ мкм) и наноразмерных ($h \sim 10\text{--}500$ нм) каналов. Такие системы используются для проведения медицинской диагностики на микроскопических образцах биологических жидкостей и мягких тканей (lab-on-a-chip), для очистки микрообъемов жидкостей или, наоборот, смешивания разнородных жидкостей. При соединении несмешивающихся жидкостей в сходящихся микро- и нанотрубках можно получать высокооднородные эмульсии, а при разделении во внешнем электрическом, магнитном или ультразвуковом поле – проводить очистку высокого уровня [1]. Основная трудность разработки микро- и наножидкостных технологий связана с тем, что объемный расход, вязкая диссипация и другие характеристики течения не соответствуют таковым, рассчитанным на основании классических уравнений Навье-Стокса.

Экспериментальные результаты. Было показано, что при течении жидкостей (1-, 2-пропанол и 1-, 3-пентанол) по силиконовым микроканалам с диаметрами $D_h = 5; 12; 25$ мкм коэффициент трения на 5–30 % выше, чем рассчитанный для классических жидкостей с теми же плотностями ρ и вязкостями μ [2]. Величина отклонения зависела от температуры (в эксперименте рассматривался диапазон $T = 0 \dots 85^\circ\text{C}$). Экспериментальное исследование течений воды при числах Рейнольдса $Re = 100 \dots 2000$ по стальным и силиконовым микротрубкам с диаметрами $D = 50 \dots 254$ мкм и относительной шероховатостью $\varepsilon/D = 0,69 \dots 3,5\%$, где ε – характерная высота шероховатостей, также

показало более высокие значения потерь на трение, чем предсказываемые уравнениями Навье-Стокса [3]. Различие между теорией и экспериментальными измерениями возрастало с уменьшением D и ростом Re . В прямоугольных каналах шириной $W = 150 \dots 600$ мкм и высотой $H = 22,7 \dots 26,3$ мкм, выполненных из металлов, наблюдалось увеличение коэффициента трения на ~20 % по сравнению с расчетным [4]. Аналогичное отклонение коэффициента трения на 8–38 % было зафиксировано и в трапециевидных силиконовых микроканалах с $D_h = 51,3 \dots 168,9$ мкм и $\varepsilon/D = 1,76 \dots 2,85$ % в диапазоне $Re < 1500$ [5]. С увеличением относительной шероховатости ε/D до 5% для поддержания Пуазейлевского течения жидкости в наноканале необходимо приложить перепад давления на 65 % выше, чем предсказываемый формулой Пуазейля. Как показали экспериментальные исследования последних лет, основная причина расхождений связана с невыполнением условий прилипания на стенке для частиц микро- и наножидкостей.

Условие проскальзывания на стенке. Если ширина канала h соизмерима с диаметром частиц суспензии, протекающей по каналу, то шероховатость стенки оказывает существенное воздействие на взаимодействие частиц суспензии, а в наноканалах – и молекул несущей фазы, со стенкой. При этом за счет диффузного отражения частицы могут приобретать импульс в продольном и тангенциальном по отношению к стенке направлениях, что соответствует проскальзыванию частиц относительно стенки [6]. В качестве граничных условий при этом могут быть использованы условия проскальзывания первого (для микрожидкостей) и второго (для наножидкостей) порядков, которые были предложены Дж. Максвеллом для течений разреженных газов у стенок каналов и твердых поверхностей.

Для суспензий микрочастиц условия проскальзывания первого порядка на поверхности Γ имеют вид [6]

$$\left(u - u_w - \frac{2 - \sigma}{\sigma} Kn \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

где u_w – скорость движения стенки; σ – безразмерный импульс, приобретенный частицей при столкновении со стенкой; $Kn = \lambda/h$ – число Кнудсена; λ – длина свободного пробега; n – нормаль к поверхности; $\sigma = 2$ для классической жидкости и $\sigma = 1$ при диффузионном отражении [7]. Условие (1) получено путем разложения скорости жидкости в ряд Тэйлора с точностью до производных второго порядка.

Влияние проскальзывания на поле скоростей существенно для области внутри некоторого тонкого слоя у стенки (слой Кнудсена), толщина которого может быть вычислена на основании модели твердых сфер [8]

$$\delta = \frac{k_B T}{\pi d_p^2 p}, \quad (2)$$

где p – гидростатическое давление; T – температура; k_B – постоянная Больцмана; d_p – диаметр частиц.

Модель (1) используется в диапазоне $0,01 < \text{Kn} \leq 0,1$, что соответствует микроканалам. При $\text{Kn} < 0,01$ влиянием частиц можно пренебречь, поскольку условия прилипания на стенке дают хорошее соответствие экспериментальных измерений теоретическим расчетам [9]. В диапазоне $0,1 < \text{Kn} \leq 1$ граничное условие (1) должно быть уточнено с сохранением вторых производных в разложении скорости в ряд Фурье и имеет вид

$$\left(u - u_w - a \text{Kn} \frac{\partial u}{\partial n} - b \text{Kn}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_{\Gamma} = 0. \quad (3)$$

В ходе экспериментов на суспензиях наночастиц Al_2O_3 , CuO , SiO_2 , ZnO с диаметрами $d_p = 20 \dots 60$ нм и концентрациями $C = 0 \dots 4\%$ на основе воды, глицерина и этиленгликоля, а также на водных суспензиях фуллеренов C_{60} ($d_p = 1,6 \dots 1,8$ нм) были проведены оценки диапазонов значений констант a , b в (3): $a \in [1; 1,1466]$, $b \in [0,5; 1,309]$ [6].

Исследование влияния условий проскальзывания (1) на характеристики течений суспензий микрочастиц (микрожидкостей) имеет большое значение для интерпретации экспериментов по течению биологических жидкостей, которые являются суспензиями клеток, везикул, молекулярных комплексов, полимерных структур и других микрочастиц. Для течений суспензий неорганических и органических наночастиц, а также микрожидкостей с добавлением наночастиц большой интерес представляет изучение решений уравнений Навье-Стокса с условиями (3) на стенках.

В данной работе рассматривается постановка задачи, которая имеет непосредственное отношение к методике измерения эффективных вязкостей микро- и наножидкостей в ротационных вискозиметрах.

Постановка и решение задачи.

Рассмотрим ламинарное течение трех несмешивающихся вязких жидкостей между двумя движущимися параллельными пластинами (рисунок 1). Будем считать, что течение поддерживается только за счет движения пластин и $p^+ = p^- = 0$ (течение Куэтта), причем для определенности положим $U_1 < U_2$. В соответствии с известным решением уравнений Навье-Стокса для скорости жидкости в каждом из слоев получим:

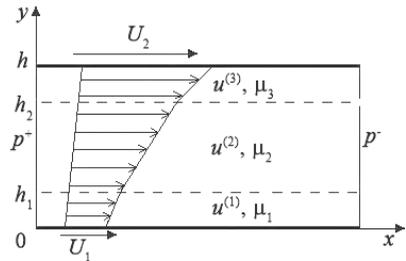


Рисунок 1 – Схема слоистого течения Куэтта несмешивающихся жидкостей между подвижными пластинами

$$u^{(j)} = C_1^{(j)} y + C_2^{(j)}, \quad (4)$$

где $j = 1, 2, 3, \dots$ $C_{1,2}^{(j)}$ – постоянные интегрирования, которые могут быть найдены из условий проскальзывания, причем шероховатости верхней и нижней пластин будем считать разными:

$$\left(u^{(1)} - a_1 \text{Kn} \frac{du^{(1)}}{dy} \right) \Big|_{y=0} = U_1, \quad \left(u^{(2)} - a_2 \text{Kn} \frac{du^{(2)}}{dy} \right) \Big|_{y=h} = U_2, \quad (5)$$

где $a_{1,2} = (2 - \sigma_{1,2}) / \sigma_{1,2}$ и условий непрерывности скорости и сил трения на границах раздела жидкостей:

$$\begin{aligned} \left(u^{(1)} - u^{(3)} \right) \Big|_{y=h_1} = 0, \quad \left(\mu_1 \frac{du^{(1)}}{dy} - \mu_3 \frac{du^{(3)}}{dy} \right) \Big|_{y=h_1} = 0, \\ \left(u^{(2)} - u^{(3)} \right) \Big|_{y=h_2} = 0, \quad \left(\mu_2 \frac{du^{(2)}}{dy} - \mu_3 \frac{du^{(3)}}{dy} \right) \Big|_{y=h_2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Выше использованы условия проскальзывания первого порядка (1), поскольку в рамках теории эффективного проскальзывания для течений с линейным профилем скорости в (3) значения $b \approx 0$ [6]. Подставляя (4) в условия (5)–(6) и находя константы $C_{1,2}^{(1,2,3)}$, получим следующие выражения для скоростей слоев (в безразмерной форме)

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\Delta_c} [\beta_3 + \beta_2 - \beta_1 + \eta_2(u-1)Y], \\ v_2 &= \frac{1}{\Delta_c} [\beta_3 + \beta_2 u - \beta_1 u + \eta_1(u-1)Y], \\ v_3 &= \frac{1}{\Delta_c} [\beta_3 + \beta_2 u - \beta_1 + \eta_1 \eta_2(u-1)Y], \end{aligned} \quad (7)$$

где $v_{1,2,3} = u^{(1,2,3)} / U_1$ – безразмерные скорости; $Y = y/h$ – безразмерная координата; $\Delta_c = l_1 \eta_2 (1 - \eta_1) - l_2 \eta_1 (1 - \eta_2) + \eta_1 + (\alpha_1 \eta_2 - \alpha_2 \eta_1) \text{Kn}$; $l_{1,2} = h_{1,2} / h$; $\eta_{1,2} = \mu_{1,2} / \mu_3$; $\alpha_{1,2} = a_{1,2} / h$; $u = U_2 / U_1 > 1$; $\beta_1 = \eta_1 l_2 (l - \eta_2)$; $\beta_2 = \eta_2 l_1 (l - \eta_1)$; $\beta_3 = \eta_1 (l - \alpha_2 \text{Kn}) + \eta_2 \alpha_1$.

Используя (7), вычислим объемный расход между пластинами

$$Q = \int_0^{h_1} u^{(1)}(y) dy + \int_{h_1}^{h_2} u^{(2)}(y) dy + \int_{h_2}^h u^{(3)}(y) dy.$$

Тогда для безразмерного расхода $q = Q / (U_1 h)$ получим выражение

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2\Delta} [\eta_2 (1 - \eta_1) (2u - (1 - u)l_1)l_1 - \eta_1 (1 - \eta_2) (2u - (1 - u)l_2)l_2 + \\ &+ \eta_1 (1 + u) + 2(\eta_2 \alpha_1 u - \eta_1 \alpha_2) \text{Kn}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя в (7), (8) значения $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, $\eta_1 = \eta_2 = 1$, что соответствует отсутствию внешних слоев, для скорости и расхода получим выражения

$$v = \frac{1 + (u\alpha_1 - \alpha_2)Kn}{1 + (\alpha_1 - \alpha_2)Kn} - \frac{1 - u}{1 + (\alpha_1 - \alpha_2)Kn} Y, \quad q = \frac{1 + u + 2(u\alpha_1 - \alpha_2)Kn}{2(1 + (\alpha_1 - \alpha_2)Kn)},$$

которые совпадают с соответствующими выражениями для течения Куэтта слоя однородной вязкой микрожидкости [6].

Численные расчеты и анализ результатов. Численные расчеты профиля скорости течения жидкостей между пластинами и объемного расхода проводились по формулам (7) и (8) соответственно при следующих значениях параметров, соответствующих различным техническим и биологическим суспензиям микрочастиц: $l_{1,2} = 0,1; 0,2; 0,3$, $u = 1; 2; 5; 8$, $\alpha = 0,5; 1,1; 1,5$, $Kn = 0,02; 0,05; 0,08; 0,2; 0,5; 0,8$, $\eta_{1,2} = 0,25; 0,5; 1,2; 4$. На рисунке 2 приведены зависимости безразмерного объемного расхода q от одного из параметров u , $\alpha_{1,2}$, $\eta_{1,2}$, $l_{1,2}$ модели (7), (8), когда для остальных параметров модели u , $\alpha_{1,2}$, $\eta_{1,2}$, $l_{1,2}$ сохраняются фиксированные значения $u = 1$, $\alpha_{1,2} = 1$, $l_{1,2} = 0,1$, $\eta_{1,2} = 1$.

С ростом разницы в скоростях движений верхней и нижней пластин расход ожидаемо увеличивается пропорционально числу Kn , которое определяет смещение частиц среды за счет проскальзывания. Максимальное различие в 2 раза зафиксировано между значениями $Kn = 0,02$ и $Kn = 0,8$ (рисунок 2, *а* кривые $Kn = 0,02$ и $Kn = 0,8$). С увеличением скорости проскальзывания α_2 объемный расход растет, поскольку проскальзывание ведет к приобретению частицами дополнительного импульса в направлении движения (рисунок 2, *б*).

Приведенная на рисунке 2, *в* зависимость $q(\eta_1)$ рассчитывалась при $\eta_2 = 1$, а зависимость $q(\eta_2)$ (рисунок 2, *г*) – при $\eta_1 = 1$. Таким образом, в каждом случае течение формально было двухслойным. При увеличении вязкости слоя u более быстро движущейся пластины расход снижается (рисунок 2, *в*), однако при течении в наноканалах наблюдается аномальное поведение ($Kn = 0,8$ на рисунках 2 *в*, *г*). Нетрудно проверить, что при разных наборах значений u , $\alpha_{1,2}$, $\eta_{1,2}$, $l_{1,2}$ знак $\partial q / \partial \eta_{1,2}$ может быть как положительным, так и отрицательным.

При расчетах зависимостей $q(l_{1,2})$ полагалось $\eta_1 = 0,25$, $\eta_2 = 2$. С увеличением толщины более быстро движущегося слоя с низкой вязкостью расход заметно увеличивается (рисунок 2, *д*), а для медленно движущегося слоя с более высокой вязкостью чем в ядре течения, расход изменяется несущественно (рисунок 2, *е*).

Следует заметить, что в случае $U_1 = U_2$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ скорость течения постоянная и сдвиговые деформации отсутствуют. Для случая несмещающихся жидкостей поле скоростей остается линейным, что следует из (7) после подстановки $u = 1$.

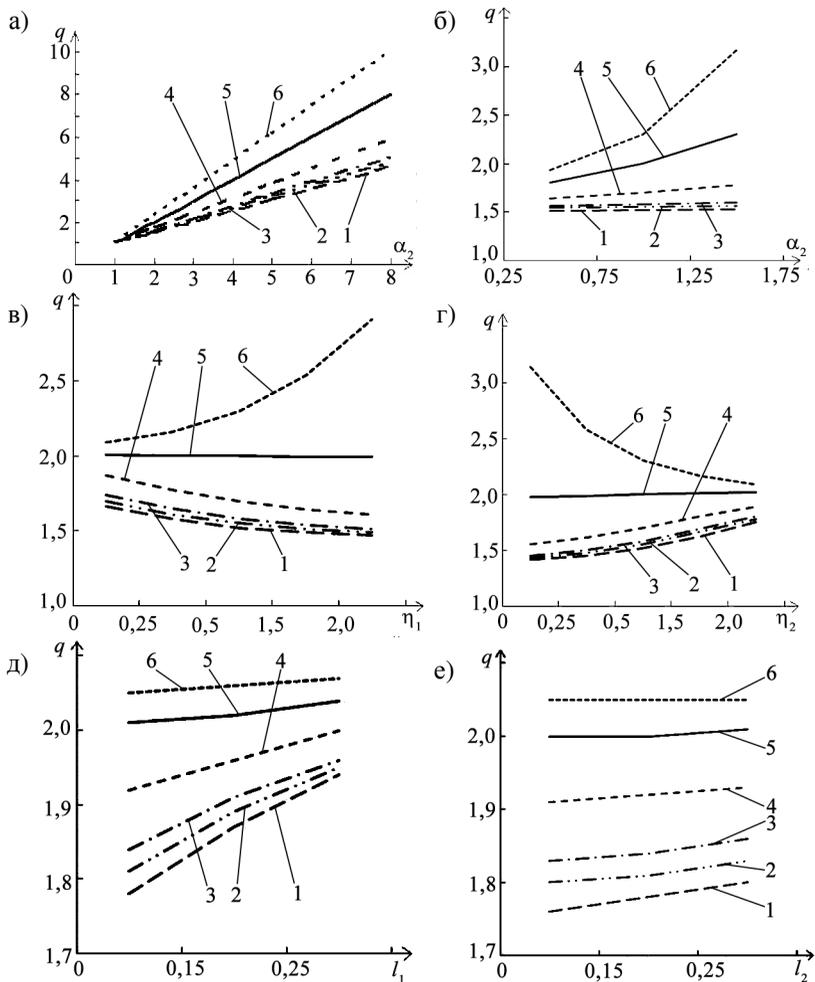


Рисунок 2 – Зависимости $q(u, \alpha_{1,2}, \eta_{1,2}, l_{1,2})$ от u (а), α_2 (б), η_1 (в), η_2 (г), l_1 (д), l_2 (е) для разных значений Kn : 1 – $Kn = 0,02$; 2 – $Kn = 0,05$; 3 – $Kn = 0,08$; 4 – $Kn = 0,2$; 5 – $Kn = 0,5$; 6 – $Kn = 0,8$

Заключение. В работе приведены результаты исследования течения Куэрта несмешивающихся вязких жидкостей между параллельными пластинами с учетом условия проскальзывания (первого порядка) жидкости на стенках в микро- ($0,01 < Kn \leq 0,1$) и наноканалах ($0,1 < Kn \leq 1$). Показано, что объемный расход сложным образом зависит от соотношений между вязкостями и толщинами слоев жидкостей, а также от проскальзывания на пластинах. Полу-

ченные соотношения позволяют задавать наборы параметров, обеспечивающих существенное увеличение расхода жидкости, что ведет к увеличению эффективности соответствующих микро- и наножидкостных устройств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Gad-el-Hak, M.** The MEMS Handbook. 2nd ed. / M. Gad-el-Hak. – New York : CRC Press, 2006. – 1720 p.

2 **Urbanek, W.** An investigation of the temperature dependence of Poiseuille numbers in microchannel flow / W. Urbanek, J. N. Zemel, H. Bau // Journal of Micromechanics and Microengineering. – 1993. Vol 3. № 4 – P. 206–208.

3 **Mala, G. M.** Flow characteristics of water in microtubes / G. M. Mala, D. Q. Li // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 1999. – Vol. 20, № 2. – P. 142–148.

4 **Effects of rectangular microchannel aspect ratio on laminar friction constant** / I. Papautsky [et al] // Proceedings of the Society of Photo-optical Instrumentation Engineers (SPIE). – 1999. – Vol. 3877. – P. 147–158.

5 **Qu, W. L.** Pressure-driven water flows in trapezoidal silicon microchannels / W. L. Qu, G. M. Mala, D. Q. Li // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2000. – Vol. 43, № 3. – P. 353–364.

6 **Karniadakis, G. E.** Governing Equations and Slip Models / G. E. Karniadakis, A. Beskok, N. Aluru // Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation (Series Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 29). – New York : Springer-Verlag, 2005. – P. 51–77.

7 **Application of lattice Boltzmann method to simulate microchannel flows** / C. Y. Lim [et al] // Physics of Fluids. – 2002. – Vol. 14, № 7. – P. 2299–2308.

8 **Gusarov, A. V.** Gas-dynamic boundary conditions of evaporation and condensation: Numerical analysis of the Knudsen layer / A. V. Gusarov, I. Smurov // Physics of Fluids. – 2002. – Vol. 14, № 12. – P. 4242–4255.

9 **Bird, G. A.** Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows / G. A. Bird. – Oxford : Clarendon Press, 1994. – 458 p.

N. N. KIZILOVA, V. A. CHEREVKO

V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov, Ukraine

MODELING OF LAMINAR FLOW OF IMMISCIBLE SUSPENSIONS OF MICRO AND NANOPARTICLES IN MICROCHANNELS

Problem formulations for fluid flows of micro- and nano scaled channels accounting for the velocity slip conditions at the walls due diffusive reflections of the particles at the wall roughness. The solution of the problem on Couette flow of three immiscible liquids with different concentrations of particles between the parallel plane plates that move at different speeds is obtained. Numerical calculations of the flow distributions and volumetric flow rates have been carried out at a variety of the materials parameters and flow regimes. It is shown that at some sets of the parameters the flow rate could be significantly increased, that can be used for more efficient work of the microfluidic and nanofluidic devices.

Получено 14.02.2016