

УДК 004.94:531.52

*А. Е. ЖЕЛТКОВИЧ, А. И. ВЕРЕМЕЙЧИК, В. В. ГАРБАЧЕВСКИЙ*  
*Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАДЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С БОЛЬШИХ ВЫСОТ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ С УЧЁТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА**

В работе получено численное решение системы трёх связанных линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих изменение траектории и скорости движения твердых тел в поле притяжения Земли в зависимости от влияния на относительное движение тела вращения Земли и сопротивления воздуха, изменяющегося по высоте (сопротивление учитывалось, начиная с границы стратосферы).

**Введение.** Задача об определении величины отклонения при падении материального тела, находящегося в северном полушарии Земли, падающего с высоты 500 метров, когда точка находится на некоторой параллели, была сформулирована в книге [1]. Некоторые подходы к её решению рассмотрены в работе [2], однако в ней при решении задачи о свободном падении материальной точки пренебрегают двумя проекциями относительной скорости на оси  $x$  и  $y$  и влиянием на относительное движение точки в этих направлениях вращения Земли, что на наш взгляд достоверно отражает ситуацию лишь в случаях, когда изучается движение материальных тел, брошенных с нулевой начальной скоростью и с небольшой высоты. Точное решение по определению траектории движения точки, а также её скорости представлено в [3], где были получены уравнения движения падающего тела, находящегося в гравитационном поле Земли, но без учёта сопротивления воздуха. Решение построено на базе аналитических уравнений (высота точки сбрасывания 500 м и 300 км, начальная относительная скорость – нулевая).

Когда же речь идёт о падении тел со значительной высоты, принятое допущение не даёт достаточную для практики точность, так как не учитывается значительное изменение плотности и давления воздуха, стремительно возрастающих начиная с определённой высоты стратосферы (30 км) и влияющих на коэффициент сопротивления среды.

**Постановка задачи.** Рассмотрим падение материального тела массой  $m = 12$  кг с высоты  $h = 300$  км без начальной скорости с учетом силы сопротивления воздуха, пропорциональной квадрату скорости [4]. Будем полагать, что тело, имеющее форму шара диаметром  $d = 0,16$  м, движется поступательно, поэтому рассмотрим его движение как движение материальной точки. Коэффициент сопротивления среды зависит от плотности воздуха, которая, в свою очередь, определяется по формуле

$$\rho(h) = \frac{\mu \cdot P(h)}{R \cdot T(h)}, \quad (1)$$

где  $\mu = 29$  г/моль – молярная масса воздуха;  $R = 8,314$  Дж/К·моль – универсальная газовая постоянная;  $T(h)$  – изменение температуры воздуха, К, по высоте  $h$ ;  $P(h)$  – давление воздуха, Па.

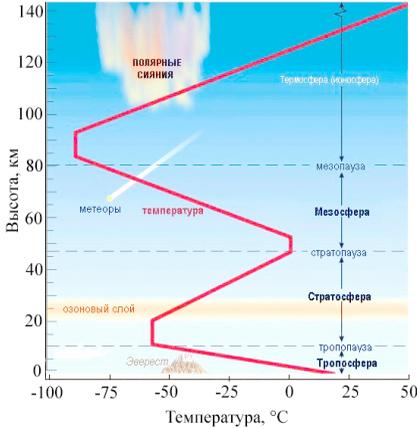


Рисунок 1 – Распределение температур по высоте атмосферного слоя

Давление воздуха в зависимости от высоты  $P(h)$  определяется по известной барометрической формуле:

$$P(h) = P_0 e^{-\frac{\mu g}{R \cdot T(h)} h}, \quad (2)$$

где  $P_0 = 101,325$  кПа – давление воздуха на уровне моря;  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободного падения;  $h$  – высота подъема над уровнем моря. Вертикальное распределение температуры в атмосфере приведено на рисунке 1.

В работе полагалось, что температура зависит от высоты следующим образом:

$$T(h) = \begin{cases} 20 + 273, & \text{если } h \leq 0, \\ 20 + 273 - 6,5 \cdot \frac{h}{10^3}, & \text{если } 0 \leq h \leq 10 \cdot 10^3, \\ 228, & \text{если } 10 \cdot 10^3 \leq h \leq 20 \cdot 10^3, \\ \frac{1}{600} h + \frac{584}{3}, & \text{если } 20 \cdot 10^3 \leq h \leq 47 \cdot 10^3, \\ 273, & \text{если } h \geq 47 \cdot 10^3. \end{cases}$$

На рисунке 2 приведена полученная зависимость плотности воздуха по высоте атмосферного слоя. Зависимость плотности от температуры рассматривалась как по усредненному значению  $T = 288$  К, так и с учетом изменения температуры по высоте.

Сила сопротивления воздуха находится по формуле

$$R_c = k S \rho(h) v^2, \quad (3)$$

где  $k = 0,24$  Н·с<sup>2</sup>/(м·кг) – коэффициент аэродинамического сопротивления для шара гладкой поверхности;  $S$  – площадь проекции тела на плоскость перпендикулярную продольной оси;  $v$  – скорость тела.

Расчетная схема с указанием направлений скоростей и действующих сил приведена на рисунке 3.

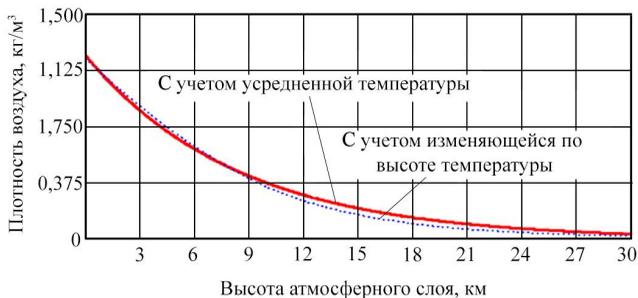


Рисунок 2 – Зависимость плотности воздуха от высоты

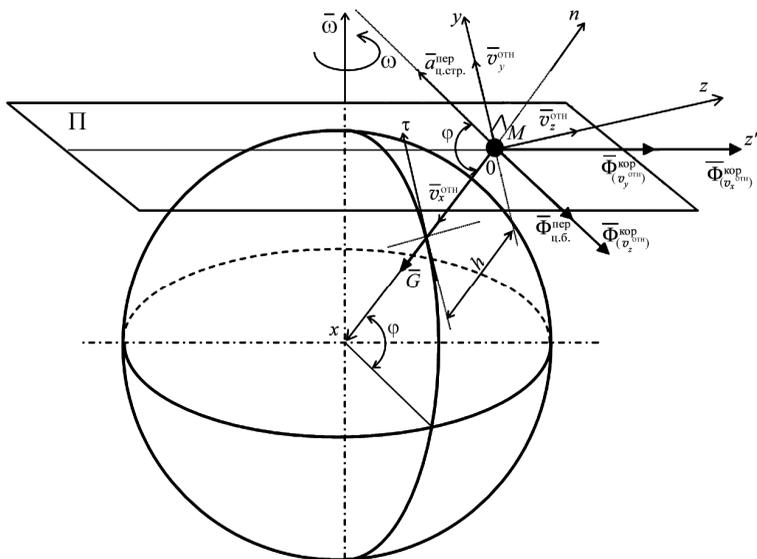


Рисунок 3 – Расчетная схема падения материального тела с высоты  $h$

Получены дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} ma_x = m\ddot{x} = G - \Phi_{(v_z^{отн})}^{кор} \cdot \cos\varphi - \Phi_{ц.б.}^{пер} \cdot \cos\varphi - R_c(x), \\ ma_y = m\ddot{y} = -\Phi_{(v_z^{отн})}^{кор} \cdot \sin\varphi - \Phi_{ц.б.}^{пер} \cdot \sin\varphi - R_c(y), \\ ma_z = m\ddot{z} = \Phi_{(v_x^{отн})}^{кор} + \Phi_{(v_y^{отн})}^{кор} - R_c(z), \end{cases} \quad (4)$$

где  $m$  – масса точки;  $\varphi$  – угол, обозначающий данную параллель северного полушария (географическая широта);  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  – проекции относительных

ускорений на оси координат  $x, y, z$ ;  $v_x^{\text{отн}}$ ,  $v_y^{\text{отн}}$ ,  $v_z^{\text{отн}}$  – проекции относительных скоростей на оси  $x, y, z$ ;  $\Phi_{(v_z^{\text{отн}})}^{\text{кор}}$ ,  $\Phi_{(v_x^{\text{отн}})}^{\text{кор}}$ ,  $\Phi_{(v_y^{\text{отн}})}^{\text{кор}}$  – составляющие Кориолисовой силы инерции от скоростей  $v_z^{\text{отн}}$ ,  $v_x^{\text{отн}}$ ,  $v_y^{\text{отн}}$  соответственно;  $\Phi_{\text{ц.б.}}^{\text{пер}}$  – переносная центробежная сила инерции;  $R_c(x)$ ,  $R_c(y)$ ,  $R_c(z)$  – проекции силы сопротивления воздуха на оси координат;  $\Pi$  – плоскость, параллельная экваториальной.

Из (4) получена система дифференциальных уравнений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}(t) = g - 2\omega\dot{z}(t)\sin 90^\circ \cos \varphi - \omega^2(R_3 + h - x(t))\cos \varphi \cos \varphi - \\ \quad - \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|}k(\dot{x}(t))^2 \text{Sp}(h - x(t)), \\ \ddot{y}(t) = -2\omega\dot{z}(t)\sin 90^\circ \sin \varphi - \omega^2(R_3 + h - x(t))\cos \varphi \sin \varphi - \\ \quad - \frac{\dot{y}(t)}{|\dot{y}(t)|}k(\dot{y}(t))^2 \text{Sp}(h - x(t)), \\ \ddot{z}(t) = -2\omega\dot{x}(t)\sin(90^\circ + \varphi)\sin \varphi - 2\omega\dot{y}(t)\sin \varphi - \\ \quad - \frac{\dot{z}(t)}{|\dot{z}(t)|}k(\dot{z}(t))^2 \text{Sp}(h - x(t)), \end{array} \right. \quad (5)$$

где  $R_3$  – радиус Земли (среднее значение 6300 км).

**Некоторые результаты и их обсуждение.** Проведено численное решение представленных дифференциальных уравнений в программном пакете MathCAD с учётом сопротивления воздуха, изменяющегося по высоте атмосферного слоя (в данной постановке влияние изменения температуры по высоте слоя на плотность не учитывается, температура принимается средней в границах от 0 до 30 км). Решение системы уравнений (5) выполнено для начальных условий: при  $t = 0$ :  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $v_x(0) = 0$ ;  $v_y(0) = 0$ ;  $v_z(0) = 0$ . Полученные графики изменения координат и проекций скорости материальной точки представлены на рисунках 4–6.

Как видно из рисунка 5 (а), при сбрасывании тела (имеющего массу во много раз меньше Земной) с 300 километровой высоты (с нулевой начальной относительной скоростью) материальная точка будет отклоняться от прямой «отвесной» траектории на юг (к экватору) на 620 м преимущественно за счёт центробежной силы инерции. Падение продолжается 283 секунды до соприкосновения с Землей. В работе [2] это отклонение не учитывалось. На рисунке 5 (б) видно, что отклонение на восток (по широте) составило 2476 м за счёт кориолисовой силы инерции. В работе [3] падение длилось 248 секунд и тело за это время успело отклониться на восток только на 1798 м.

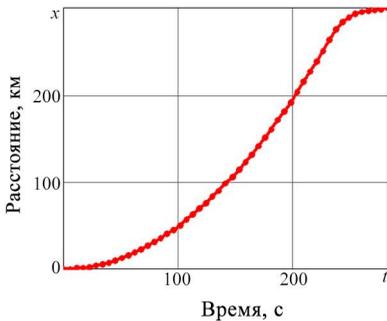


Рисунок 4 – Закон изменения координаты  $x$  при падении тела с высоты 300 км

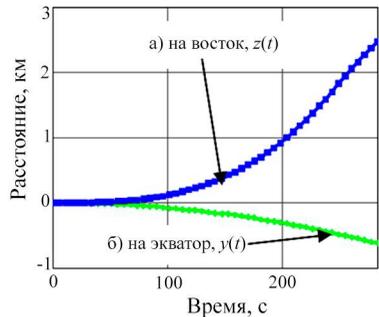


Рисунок 5 – Законы изменения координат  $y$  (а) и  $z$  (б) при падении с высоты 300 км

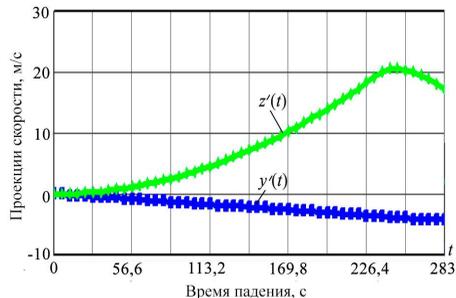
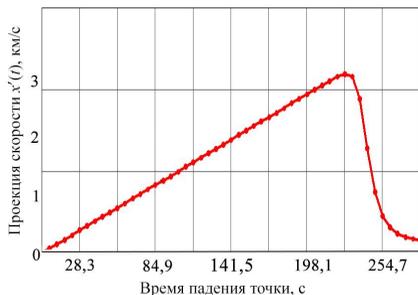


Рисунок 6 – Проекции скорости при падении тела с высоты 300 км

Это можно объяснить тем, что с 226 секунды (рисунок 6) тело достигает плотных слоёв атмосферы (высоты 30 км, что также хорошо просматривается на рисунке 4) и начинает стремительно замедляться (тормозиться о воздух). Задержка составляет 45 секунд в сравнении с расчётом, в котором не учитывается сопротивление воздуха [3]. За это время тело успевает отклониться на восток значительно дальше, что не учитывалось в работе [3].

Исследовано влияние массы тела на его движение. На рисунке 7 приведена типичная зависимость отклонения тела по оси  $x$  при различных массах и размерах:

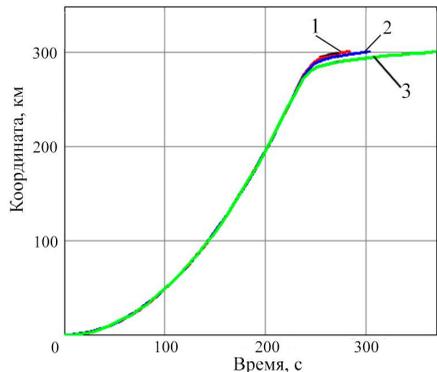


Рисунок 7 – Зависимость отклонения тела по оси  $x$  при различных массах и размерах:  
 1 –  $m = 12$  кг,  $d = 0,16$  м; 2 –  $m = 24$  кг,  $d = 0,2$  м;  
 3 –  $m = 120$  кг,  $d = 0,345$  м

Из рисунка 7 видно, что до 226 секунды масса не влияет на характер движения (отсутствует сопротивление). Начиная с 226 секунды, тело с большей массой получает большее отклонение.

Данное решение может быть адаптировано и для любых других начальных условий, если точно установлено, что на подлётной траектории проникновение тела в атмосферу Земли произойдёт под заданным углом при известной начальной скорости.

**Заключение.** Область применения данного решения может быть распространена на решение прикладных задач, связанных с расчётом точной скорости, траектории и места падения сводимых с орбиты неуправляемых космических объектов (спутники различного назначения, мусор, оставшийся от пилотируемых станций, ступени разгонных блоков ракет), представляющих в настоящий момент серьёзную проблему для орбитальной навигации существующих спутников и международной космической станции [5].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Мещерский, И. В. Курс теоретической механики / И. В. Мещерский. – Петроград : Типо-лит. И. Трофимова, 1915. – Ч. 2. – 383 с.

2 **Теоретическая механика. Динамика. Практикум.** В 2 ч.: Ч. 1. Динамика материальной точки / В. А. Акимов [и др.]. – Минск : Новое знание; М. : ЦУПЛ, 2010. – 528 с.

3 **Моделирование падения материальной точки в гравитационном поле Земли** // А. Е. Желткович [и др.] // Вестник Брестского государственного технического университета: Физика, математика, информатика. – 2013. – № 5 (83). – С. 57–60.

4 Герасимов, С. А. Динамический режим аэродинамического сопротивления / С. А. Герасимов // Современные наукоемкие технологии. – 2007. – № 8. – С. 19–22.

5 Палий, А. С. Методы и средства увода космических аппаратов с рабочих орбит (состояние проблемы) / А. С. Палий // Техническая механика. – 2012. – № 1. – С. 94–102.

*A. E. ZHELTKOVICH, A. I. VEREMEICHIK, V. V. GARBACHEVSKY*  
*Brest State Technical University, Brest, Belarus*

### **MODELLING OF THE RIGID BODY FALLING FROM A GREAT HEIGHT IN THE EARTH'S GRAVITATIONAL FIELD CONSIDERING AIR RESISTANCE**

In the paper there was obtained the numerical solution for a two coupled non-homogeneous linear second-order differential equations system describing the trajectory and velocity of the rigid bodies movement in the Earth's gravity field. There was considered the influence on the relative motion of the Earth's rotation and air resistance that varies for different heights (the resistance was taken into account from the stratosphere border).

Получено 18.09.2015