УДК 539.3

ТЕРМОСИЛОВОЙ ПЕРЕМЕННЫЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ,
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Ю. М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ,
ИММПС им. В. А. Белого НАН Беларуси, г. Гомель

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация

Нагружение из естественного состояния. Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень. Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя.

На стержень действуют поверхностная поперечная нагрузка $q(x)$ и тепловой поток интенсивности q_t, направленный перпендикулярно внешнему слою. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей *несущих* слоёв, через которые выражаются перемещения в слоях стержня. Температурное поле считаем заданным.

В слоях стержня используются физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций Ильюшина, с учетом температуры:

$$s_i^{(k)} = 2G_k(1-\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k))э_i^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3(1-\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_k))э_{xz}^{(3)},$$
$$\sigma^{(k)} = 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k) \qquad (i = x, z;\ k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где $s_i^{(k)}, э_i^{(k)}$, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $s_{xz}^{(3)}, э_{xz}^{(3)}$ – тангенциальное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материала k-го слоя; $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – термозависимая функция нелинейности (пластичности); $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения; T_k – температура в k-м слое.

Система нелинейных уравнений равновесия рассматриваемого стержня следуют из вариационного принципа Лагранжа. Для ее решения применяется метод упругих решений, что позволяет записать ее в следующем итерационном виде:

$$a_1u_1^n - a_1u_2^n - a_4u_1^n{}_{,xx} - a_5u_2^n{}_{,xx} + a_2w_1^n{}_{,x} + a_3w_2^n{}_{,x} - 2a_6w_1^n{}_{,xxx} + a_7w_2^n{}_{,xxx} = p + p_\omega^{(n-1)},$$
$$-a_1u_1^n + a_1u_2^n - a_5u_1^n{}_{,xx} - a_9u_2^n{}_{,xx} - a_{10}w_1^n{}_{,x} - a_{17}w_2^n{}_{,x} - a_6w_1^n{}_{,xxx} + 2a_7w_2^n{}_{,xxx} = h_\omega^{(n-1)},$$
$$-a_2u_1^n{}_{,x} + a_{10}u_2^n{}_{,x} + 2a_6u_1^n{}_{,xxx} + a_6u_2^n{}_{,xxx} + a_{11}w_1^n{}_{,xx} - a_{12}w_2^n{}_{,xx} + a_{15}w_1^n{}_{,xxxx} - a_{16}w_2^n{}_{,xxxx} + a_8w_1^n - a_8w_2^n = q + q_\omega^{(n-1)},$$
$$-a_3u_1^n{}_{,x} + a_{17}u_2^n{}_{,x} - a_7u_1^n{}_{,xxx} - 2a_7u_2^n{}_{,xxx} - a_{12}w_1^n{}_{,xx} + a_{14}w_2^n{}_{,xx} - a_{16}w_1^n{}_{,xxxx} + a_{13}w_2^n{}_{,xxxx} - a_8w_1^n + a_8w_2^n = g_\omega^{(n-1)}, \tag{2}$$

где q_t – температурные добавки; $a_1, \ldots, a_{17}$ – коэффициенты, определяемые геометрическими и упругими параметрами слоев и учитывающие их температурную зависимость; n – номер линейного приближения; $p_\omega^{(n-1)}$, $h_\omega^{(n-1)}$, $q_\omega^{(n-1)}$, $g_\omega^{(n-1)}$ – дополнительные нагрузки, которые учитывают нелинейность материалов слоев и на первом шаге принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущей итерации:

На торцах стержня принимаются кинематические граничные условия свободного опирания на неподвижные в пространстве жесткие опоры, т.е. при $x = 0$, l:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \qquad k = 1, 2\ . \tag{3}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (2) принимается в виде разложения в тригонометрические ряды, удовлетворяющие условиям (3)

$$u_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad u_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right),$$

$$w_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad w_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \tag{4}$$

где U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n – искомые амплитуды перемещений.

Повторное знакопеременное нагружение. Пусть, начиная с момента t_1, осуществляется мгновенная разгрузка и повторное нагружение усилиями обратного знака p'', q'', изменяющимися по тому же закону, что и при нагружении из естественного состояния. Эти усилия создадут в k-м слое стержня поле перемещений $u_i''(x)$, $w_i''(x)$, деформации $\varepsilon_{ij}''^{(k)}$ и напряжения $\sigma_{ij}''^{(k)}(x,z)$. При этом будем предполагать, что за время разгрузки и последующего переменного нагружения температура во всех точках тела остается неизменной. Она совпадает с полем температуры к моменту начала разгрузки, т. е. $T'(z) = T(z, t_1)$ и модули упругости материалов слоев приняли фиксированные значения при этой температуре.

Для всех параметров напряженно-деформированного состояния и нагрузки ведем разности, в которых величины с одним штрихом – перемещения и нагрузки в стержне перед разгрузкой, два штриха – второй полуцикл:

$$u_i^* = u_i' - u_i'', \quad w_i^* = w_i' - w_i', \quad q^* = q' - q'' \quad (k = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия для перемещений со звездочками в итерационном виде будет по виду совпадать с системой (2), граничные условия – с (3). Внешняя нагрузка и дополнительные усилия со звездочками также представляются в виде разложений в тригонометрические ряды.

Искомые амплитуды перемещений U_{1m}^n, U_{2m}^{*n}, W_{1m}^{*n}, W_{2m}^{*n} определяются по той же схеме, что и при однократном нагружении. Затем вычисляются искомые перемещения со звездочками. Соответствующее решение задачи на втором полуцикле получим из соотношений (5):

$$u_k''(x,z) = u_k'(x,z) - u_k^*(x,z), \quad w_k'(x,z) = w_k'(x,z) - w_k^*(x,z) \quad (k = 1, 2).$$

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16Р-010).

УДК 539.37

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ ОТВЕРСТИЙ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Е. А. СТОРОЖУК, И. С. ЧЕРНЫШЕНКО, С. Б. ХАРЕНКО
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Введение. Тонкостенные элементы современных конструкций находят широкое применение в ракетной технике, на транспорте, в промышленном и гражданском строительстве. В большинстве случаев эти элементы по конструктивным или технологическим соображениям имеют отверстия различной формы.

Основные результаты по проблеме концентрации напряжений в оболочках с отверстиями при действии разного вида нагрузок получены на основе решения линейных задач [1]. Большинство исследований по данной проблеме с учетом нелинейных факторов проведено для оболочек с одним отверстием. Для инженерной практики представляют интерес исследования напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций в случае нескольких отверстий.

Постановка задачи. Основные уравнения. Тонкую оболочку толщины h, изготовленную из однородного изотропного материала и ослабленную несколькими криволинейными отверстиями, отнесем к ортогональной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$.

Деформирование оболочки опишем соотношениями теории непологих оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява. Выражения для компонент мембранной (ε_{ij}) и изгибной (μ_{ij}) деформаций представим в векторной форме [2]: