$$
q_k:\begin{cases}\begin{bmatrix}3\cdot sh\left(q\,ln\frac{R}{r_0}\right)=2q\cdot ch\left(q\,ln\frac{R}{r_0}\right),q>0,\ \frac{R}{r_0}>e^{2/3}\\ 0,\ \frac{R}{r_0}=e^{2/3}\end{bmatrix} & \frac{R}{r_0}\geq e^{2/3},k=0\\ 3\cdot sin\left(q\,ln\frac{R}{r_0}\right)=2q\cdot cos\left(q\,ln\frac{R}{r_0}\right),q>0 & k=\overline{1,\infty}\end{cases} \quad (4)
$$

После применения интегрального преобразования, одномерная задача принимает вид

$$
\begin{cases}\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\,\frac{du_{\phi q}}{d\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}u_{\phi q}+(q_k^2-1/4)u_{\phi q}=0 \quad 0<\theta<\alpha<\frac{\pi}{2}\\ u_{\phi q}\big|_{\theta=0}=0 \quad \left(\frac{du_{\phi q}}{d\theta}-ctg\theta u_{\phi q}\right)\Big|_{\theta=\alpha}=f_q\end{cases} \quad (5)
$$

Её решением является функция

$$
u_{\phi q}=\sin\alpha\,f_q\frac{P_\nu^1(\cos\theta)}{\nu P_{\nu+1}^1(\cos\alpha)-(\nu+2)\cos\alpha\,P_\nu^1(\cos\alpha)}=
$$

$$
=f_q\sin\theta\ {}_2F_1\left(\nu+2;1-\nu;2:\frac{1-\cos\theta}{2}\right)\times
$$

$$
\times\left((\nu+2)\left({}_2F_1\left(\nu+3;-\nu;2:\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)-\cos\alpha\ {}_2F_1\left(\nu+2;1-\nu;2:\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)\right)\right)^{-1}. \quad (6)
$$

Было доказано, что особая точка решения $\nu=-2$ не входит в область определения решения. После обратного интегрального преобразования приходим к необходимости подсчёта ряда:

$$
u_\phi=\sum_{j=0}^{\infty}u_{\phi q}\cdot\frac{\mathrm{K}(r,q_j)}{||\mathrm{K}(r,q_j)||^2}. \quad (7)
$$

Одним из основных результатов решения данной задачи было обнаружение существования особых решений, зависящих от соотношения площади поверхности конуса и его объёма. Эти решения были истолкованы с помощью аппарата дифференциальной геометрии, в частности [4] и [5], как необходимые для сохранения изоморфности деформации.

Список литературы

1 **Попов, Г. Я.** Построение точного решения одной задачи кручения упругого вала переменного поперечного сечения / Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 2002. – 38, № 8. – С. 83–89.

2 **Попов, Г. Я.** О расширении возможностей метода интегральных преобразований при решении задач механики / Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 1980. – 44, № 1. – С. 130–142.

3 **Попов, Г. Я.** Осесимметричная смешанная задача теории упругости для усечённого кругового полого конуса / Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, № 3. – С. 431–433.

4 **Погорелов А. И.** Дифференциальная геометрия / А. И. Погорелов. – 6-е изд. – М. : Наука, 1974.

5 **Рашевский, П. К.** Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – 3-е изд. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1950.

УДК 539.3, 539.8

МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНОДИФФУЗИИ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ И ДИФФУЗИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

С. А. ДАВЫДОВ, А. В. ЗЕМСКОВ, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация

Рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругой диффузии для однородного N-компонентного слоя, ограниченного поверхностями $x_1=0$ и $x_1=L$ ($Ox_1x_2x_3$ – прямоугольная декартова система координат), с учётом ненулевых времён релаксации. Одномерные физикомеханические процессы в среде описываются локально-равновесной моделью связанной термоупругой диффузии [1–9] (штрих обозначает производную по пространственной переменной x, а точки – производные по времени τ):

$$\ddot{u} = u'' - b_u\theta' - \sum_{q=1}^{N}\alpha_q\eta'_q, \quad \dot{\theta} + \tau_T\ddot{\theta} = k\theta'' - b_T \;\; \dot{u}' + \tau_T\ddot{u}' \;\; - \sum_{q=1}^{N}\beta_q \;\; \dot{\eta}_q + \tau_T\ddot{\eta}_q \;\; ; \qquad (1)$$

$$\dot{\eta}_q + \tau_{q\eta}\ddot{\eta}_q = D_q\eta''_q - \Lambda_q u''' - M_q\theta'' \qquad q = \overline{1,N} \;\; ;$$

$$u\big|_{x=0} = f_1 \;\; \tau \;\; , \quad \theta'\big|_{x=0} = f_2 \;\; \tau \;\; , \quad \Lambda_q u'' - M\theta' - D_q\eta'_q \;\; \Big|_{x=0} = f_3 \;\; \tau \;\; ;$$

$$u\big|_{x=1} = 0, \;\; \theta'\big|_{x=1} = 0, \quad \Lambda_q u'' - M\theta' - D_q\eta'_q \;\; \Big|_{x=1} = 0; \qquad (2)$$

$$u\big|_{\tau=0} = \dot{u}\big|_{\tau=0} = \theta\big|_{\tau=0} = \eta_q\big|_{\tau=0} = 0. \qquad (3)$$

Здесь и далее используются следующие безразмерные величины в (1)–(3) (при одинаковом начертании они обозначены звёздочкой, которая в остальных формулах опускается):

$$x = \frac{x_1}{L}, \quad u = \frac{u_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{q}}{C_{1111}}, \quad D_q = \frac{D_{11}^{q}}{CL}, \quad \tau_T = \frac{Ct_T}{L}, \quad \tau_{\eta q} = \frac{Ct_{\eta}^{q}}{L},$$

$$\theta^* = \frac{\theta}{T_0}, \quad \Lambda_q = \frac{m^{q} n_0^{q} D_{11}^{q}\alpha_{11}^{q}}{\rho R T_0 CL}, \quad M_q = \frac{n_0^{q} D_{11}^{q} \ln\left[n_0^{q}\gamma^{q}\right]}{CL}, \quad \kappa = \frac{\kappa_{11}}{\rho c_0 LC}, \quad \beta_q = \frac{n_0^{q} R\ln\left[n_0^{q}\gamma^{q}\right]}{m^{(q)}c_0},$$

$$b_u = \frac{b_{11}T_0}{C_{1111}}, \quad b_T = \frac{b_{11}}{\rho c_0}, \quad f_{1k} \;\; \tau \;\; = \frac{f_{1k}^{*} \;\; t}{L}, \quad f_{2k} \;\; \tau \;\; = \frac{Lf_{2k}^{*} \;\; t}{T_0}, \quad f_{q+2,k} \;\; \tau \;\; = \frac{f_{q+2,k}^{*} \;\; t}{n_{0q}c} \;\; k = 1,2 \;\; ,$$

где t – время; x_1 – декартова координата; u_1 – компонента вектора перемещений; L – толщина слоя; q – номер компоненты вещества в составе N-компонентной среды; $\eta^{q} = n^{q} - n_0^{q}$ – приращение концентрации; n_0^{q} и n^{q} – начальная и актуальная концентрации; $t_{\text{т}}$ – время тепловой релаксации; t_{η}^{q} – время диффузионной релаксации; C_{1111} – упругая постоянная; ρ – плотность; b_{11} – температурная постоянная, характеризующая тепловые деформации; $\alpha_{11}^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D_{11}^{(q)}$ – коэффициент самодиффузии; $m^{(q)}$ – молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; $\theta^* = T - T_0$ – приращение температуры; T и T_0 – актуальная и начальная температура; κ_{11} – коэффициент теплопроводности; γ^{q} – коэффициент активации (для твёрдых растворов $\gamma^{q} = 1$); c_0 – удельная теплоёмкость при постоянной концентрации и деформации.

Решение ищется в интегральной форме, которая представляет собой свёртку по времени функций Грина с правыми частями граничных условий. Для нахождения функций Грина используется преобразование Лапласа по времени и разложение искомых функций в неполные ряды Фурье. Трансформанты искомых функций являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа. Их оригиналы находятся с помощью известных теорем операционного исчисления. Выполнен тестовый расчёт.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-08-00663 А).

Список литературы

1 **Aifantis, E. C.** On the problem of diffusion in solids / E. C. Aifantis // Acta Mechanica. – 1980. – Vol. 37, № 3–4. – P. 265–296.

2 **Еремеев, В. С.** Диффузия и напряжения / В. С. Еремеев. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.

3 **Подстригач, Я. С.** Диффузионная теория неупругости металлов / Я. С. Подстригач // Прикладная механика и техническая физика. – 1965. – № 2. – С. 67–72.

4 **Nowacki, W.** Dynamical Problems of Thermodiffusion in Solids / W. Nowacki // Proc. Vib. Prob. – 1974. – Vol. 15. – P. 105–128.

5 **Князева, А. Г.** Задачи теории термоупругой диффузии в процессах поверхностной обработки материалов / А. Г. Князева, Е. С. Ильина, В. Н. Демидов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 г. – Казань, 2015. – С. 1818–1820.

6 **Zemskov, A. V.** Approximate solution of three-dimensional problem for elastic diffusion in orthotropic layer / A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskiy // Journal of Mathematical Sciences, **203**, Issue 2 (2014) 221.

7 **Hany H. Sherief.** A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion / Hany H. Sherief, Nasser M. El-Maghraby // Int J Thermophys (2009) 30: P. 2044–2057.

8 **Tarlakovskii, D. V**. Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media / D. V. Tarlakovskii, V. A. Vestyak, A. V. Zemskov // Encyclopedia of thermal stress. – Volume 2, C-D, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference. – 2014. – P. 1064–1071.

9 **Давыдов, С. А.** Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомеханодиффузии / С. А. Давыдов, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 1. – С. 38–47.

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Ю. В. ЗАХАРЧУК

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В последнее время значительно возрос спрос на использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в авиа-, ракето-, машино-, приборо- и судостроении, добыче и транспортировке энергоносителей. Это обусловливает необходимость разработки математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок.

Рассматривается упругая круговая трехслойная пластина со сжимаемым-растягиваемым заполнителем. Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z. Систему координат свяжем со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В заполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном направлении, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$, деформируемость по толщине принимается линейной.

На внешний слой стержня действует симметричная равномерно распределенная нагрузка с вертикальной $q = q(r)$ и горизонтальной $p = p(r)$ составляющими. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ($\psi = 0$, $v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Обозначим через h_k толщину k-го слоя (k = 1, 2, 3 – номер слоя), при этом $h_3=2c$.

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

– в несущих слоях *1, 2* –

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z(w,_r + v,_r c), \quad w^{(1)} = w(r) + v(r)c, \quad (c \le z \le c + h_1);$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - z(w,_r - v,_r c), \quad w^{(2)} = w(r) - v(r)c, \quad (-c - h_2 \le z \le -c);$$

– в заполнителе *3* –

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z(w,_r + v,_r z), \quad w^{(3)}(r, z) = w(r) + v(r)z, \quad (-c \le z \le c), \tag{1}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1), применяя соотношения Коши. Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + \sigma^{(k)}\delta_{ij}, \tag{2}$$

где $$s_{ij}^{(k)} = 2G_k э_{ij}^{(k)}; \quad э_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)}\delta_{ij}; \quad \sigma^{(k)} = K_k\theta^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)};$$

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\phi^{(k)} + \varepsilon_z^{(k)}) \quad (i, j = r, \phi, z;\ k = 1, 2, 3).$$