УДК 531.315

П. А. ОРЛИН, А. М. САВЧЕНКО, С. А. ПИКУЛИН, Е. Н. ФИСЕНКО
Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ ГАУССА

С исторических позиций описано становление принципа наименьшего принуждения Гаусса, а также показана целесообразность его развития с целью применения к решению современных практических задач.

Ключевые слова: принцип наименьшего принуждения, неголономные системы, вариация Гаусса, материальная точка.

В 1829 году в статье «Общее начало математики» Гаусс выдвинул как наиболее общее начало утверждение: система со связями, без трения, испытывая действие активных сил, движется таким образом, что принуждение со стороны связей и давление на связи имеет самое низкое значение. Движение осуществляется с минимально возможным принуждением, если за меру принуждения, осуществлённого в течение бесконечно малого момента времени, представить сумму произведений массы каждой точки на квадрат значения ее отклонения от того положения, в котором она бы находилась, если бы сила не была применена [1].

Идеи ученого были развиты в формулировке принципа прямолинейного пути, построенного в 1893 году Герцем. Принцип является продолжением линии Якоби – геометризации его вариационного принципа и динамики в целом. Линия сформулирована в связи с попыткой Герца построить механику без понятия силы. Принцип Гаусса считается общим началом и может выражаться одной из элементарных аналитических формулировок, содержащей вывод уравнений движения существующей системы, сводящийся к определению минимального значения функций второй степени. Выявление этого принципа связано, согласно утверждению Гаусса, с его предыдущими работами, посвященными нахождению способов вычисления наименьших квадратов.

В XVII веке в работах Галилея и Ньютона были освещены принципиальные основы классической механики как науки. В XVIII и XIX вв. Эйлер, Даламбер, Лагранж, Гамильтон, Якоби, Остроградский, опираясь на эти основы, разработали совершенные теории аналитической механики и создали самые эффективные математические методы. Согласно высказыванию Да Винчи, механика – это рай для математических наук. По его мнению, действующие на тот момент принципы были абсолютно идеальны и не содержали изъянов. Однако на самом деле эта совершенность находилась лишь на поверхности, поскольку стоило ученым более глубоко разобраться в законах механики, как возникали многочисленные трудности. Их можно было игнорировать и подстраиваться под них, но полностью ликвидировать их не удавалось. Одну из таких трудностей решал сформулированный Гауссом принцип.

Принцип наименьшего принуждения предложен К. Ф. Гауссом в 1829 г. в работе «Об одном новом общем законе механики»: «движение системы физических точек, связанных между собой случайным образом и ощутивших любое влияние, во все мгновения времени, происходит в максимально совершенном, какое только возможно, согласовании с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы все они стали свободными» [2]. Принцип применим к механическим системам с идеальными связями.

Определение принципа у Гаусса не обладало достаточной строгостью. Аналитическое оформление данного принципа было представлено в работах Г. Шеффлера (1820–1903) «О Гауссовом законе механики». Работа увидела свет в 1858 году. В ней ученый внес изменения в определение принуждения и предложил следующее выражение:

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{w}_i - \frac{\overline{F}_i}{m_i} \right)^2 ,$$

здесь n – количество точек, входящих в систему; m_i – масса i-й точки; F_i – равнодействующая приложенных к ней активных сил; w_i – ускорение данной точки (в оригинальной работе Шеффлер использовал скалярную форму записи, с тем отличием, что множитель под знак суммы он не вносил).

После этого математическим выражением принципа наименьшего принуждения стало достижение минимума функции Z.

Доказательство.

Предположим, что некоторая точка механической системы с условной массой m_i в определенный момент времени t_0 находится в положении M_i. В случае свободного движения точка за минимальный отрезок времени t переместится на расстояние $M_iA_i = v_it$, где v_i – скорость перемещения точки в момент времени t_0. Если в это время на точку будет воздействовать активная сила F_i, то точка под ее воздействием совершит движение M_iB_i. При разложении радиус-вектора точки в ряд по времени получим

$$\overline{r}(t_0 + \tau) = \overline{r}(t_0) + \dot{\overline{r}}(t_0)\tau + \frac{1}{2}\ddot{\overline{r}}(t_0)\tau^2 + \dots ,$$

однако

$$\dot{\overline{r}}(t_0) = \overline{v},\ \ddot{\overline{r}}(t_0) = \overline{w} = \frac{\overline{F}_i}{m_i}.$$

Тогда с точностью до малых третьего порядка получаем

$$\overline{M_iB_i} = \overline{v}_i\tau + \frac{1}{2}\frac{\overline{F}_i}{m_i}\tau^2.$$

Если на точку наложить связи, то ее перемещение под воздействием силы F_i с точностью до малых третьего порядка будет равняться

$$\overline{M_iC_i} = \overline{v}_i\tau + \frac{1}{2}\overline{w}_i\tau^2 ,$$

где w_i – ускорение точки в ее действительном перемещении.

В таком случае ее отклонение от беспрепятственного перемещения будет представлено в виде вектора $\overline{B_i C_i}$, такого, что

$$\overline{B_i C_i} = \overline{M_i C_i} - \overline{M_i B_i} = \frac{1}{2}\tau^2\left(\ddot{\bar{r}}_i - \frac{\overline{F_i}}{m_i}\right).$$

Точность соответствует малым третьего порядка. В качестве меры отклонения точки от беспрепятственного движения Гаусс избрал величину, пропорциональную квадрату отклонения B_iC_i. Её ученый и назвал принуждением. Выражение принуждения для точки массой m_i имеет вид

$$Z_i = \frac{1}{2} m_i \left(\ddot{\bar{r}}_i - \frac{\overline{F_i}}{m_i}\right)^2.$$

Если сложить принуждения для всех точек системы, то получим

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{w}_i - \frac{\overline{F_i}}{m_i}\right)^2.$$

Согласно приведенному определению следует, что $\delta Z = 0.$ При этом вариация принимается только по ускорениям, а скорость и координаты точки остаются неизменными. Такую вариацию принято называть вариацией Гаусса [3].

Принцип, изложенный в работе ученого, работает в голономных и неголономных системах.

Принцип, описанный немецким математиком, имеет большую эвристическую ценность, что привело к дальнейшему развитию механики как науки. К примеру, механика Герца была основана на идеях, высказанных в этом принципе. Представим для ознакомления принцип наименьшей кривизны, описанный Герцем (также известный как принцип минимального пути). По сути, он является обобщением первого закона Ньютона (аксиом инерции), но его также можно трактовать как геометрическую интерпретацию принципа Гаусса.

Для примера рассмотрим системы, на которые не действуют активные силы и наложены идеальные связи, обладающие высокой удерживающей способностью, которые не зависят от времени. Представим, для начала, систему из одной материальной точки, перемещающейся по неподвижной горизонтальной поверхности. Активные силы отсутствуют, значит

$$Z = \frac{1}{2} m w^2.$$

Вектор ускорения точки разделяется на две составляющие: нормальную и тангенциальную $\overline{w} = \overline{w}_n + \overline{w}_\tau.$ В представленном примере тангенциальное ускорение $\overline{w}_\tau$ должно находиться в плоскости, касательной к поверхности. Но так как отсутствует сила трения, оно равняется нулю. Нормальное ускорение

$$w_n = \frac{u^2}{\rho} = u^2 k,$$

где ρ – радиус кривизны траектории точки; $k = 1/\rho$ – ее кривизна.

Исходя из $w^2 = (w_n)^2 = u^4k^2$, принуждение можно представить в виде

$$Z = \frac{1}{2} m v^4 k^2.$$

В соответствии с законом сохранения энергии, скорость точки постоянна. Из этого следует, что требование минимума принуждения сводится к требованию кривизны траектории точки. Следовательно, точка движется прямолинейно с постоянной скоростью.

Если система состоит из некоторого числа точек, отличного от нуля, то все обстоит аналогично. Здесь можно рассматривать движение в трехмерном пространстве относительно специальным образом выбранных координат. Перемещение системы в таком случае будет представлено движением одной определенной точки в данном пространстве. По примеру с трехмерным пространством можно применить понятие скорости точки, траектории ее движения и кривизны. Из минимума принуждения следует: действительное перемещение системы происходит с определенной скоростью, значение которой не изменяется в течение всего времени, при этом траектория движения обладает наименьшей кривизной в сравнении с аналогичными траекториями, допускаемыми связями. В этом и заключается принцип прямейшего пути Герца [4].

Трудно переоценить значение принципа Гаусса в построении современной механики. Одним из первых труды ученого оценил российский математик и теоретик М. В. Остроградский. Он большое значение отводил подходу Гаусса к изучению связей. В своей работе «О мгновенных перемещениях системы, подчиненной переменным условиям» Остроградский описывал такой вывод из принципа Гаусса: давление на связи со стороны точек системы в настоящем движении должно принимать наиболее малое значение по сравнению с другими кинематическими движениями. В конце XIX века, И. И. Рахманинов переформулировал принцип Гаусса с точки зрения энергетической трактовки, как принцип наименьшей потерянной работы.

Ж. Бертран, французский математик, дал характеристику принципу как «красивую теорему, вмещающую одновременно основные законы равновесия и движения, являющуюся наиболее общим и тонким выражением, какое было им придано».

Сформулированный Гауссом принцип имеет весьма внушительную общность, так как может применяться в самых различных механических системах: консервативной и неконсервативной; голономной и неголономной. В связи с этим он находит применение как исходная точка при разработке теорий движения неголономных систем. Помимо этого, принцип Гаусса применяют непосредственно в задачах компьютерного моделирования, робототехнике. Использование принципа позволяет выполнять численную минимизацию принуждения способами математического программирования. Предусмотрено обобщение принципа Гаусса на случай освобождения системы от определенного количества связей, появления неидеальных связей в системе, а также на случай сплошных сред.

В. А. Синицын при изучении принципа разработал новую формулу, предполагающую освобождение системы от части неудерживающих связей.

Н. Г. Четаев привел новое определение понятия виртуального движения точек в неголономных системах с нелинейными по скорости связями. Помимо этого, он предложил новый метод анализа освобождения материальных систем. Теоретик показал, что при сформулированном им определении виртуальных движений и освобождений принцип Гаусса работает в нелинейных неголономных системах. Помимо этого, Четаев вывел новую трактовку принципа Гаусса для систем с голономными и нелинейными связями. В последние годы тема принципа Гаусса активно развивалась в работах В. В. Румянцева. Он нашел принцип Гаусса для систем с неидеальными связями, развил его на сплошные среды и управляемые механические системы.

Принцип наименьшего принуждения имеет не только теоретическую, но и большую практическую значимость. Он находит применение в механике, физике и других естественных науках.

Б. Буянович использовал принцип Гаусса для получения приближенных решений дифференциальных уравнений (обычных и в частных производных). Разработан компьютерный способ моделирования динамически сложных, управляемых многозвенных систем без вычисления уравнений перемещения, имеющий в основе прямой принцип наименьшего принуждения Гаусса [5]. Принцип Карла Фридриха Гаусса не лишен внимания исследователей, ученых и теоретиков и по сей день. Само выражение «наименьшее принуждение» содержит в себе загадку, которую пытаются разгадать ученые со всего мира. Почему и каким образом природа сводит к минимуму принуждение? До сих пор эта загадка не разгадана и принята за аксиому. Практическая реализация возможностей принципа Гаусса раскрыта далеко не полностью как в прикладных задачах, так и в пространственном исполнении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Веретенников, В. Г.** Теоретическая механика: Дополнения к общим разделам / В. Г. Веретенников, В. А. Синицын. – М. : МАИ, 1996. – 340 с.

2 **Ланцош, К.** Вариационные принципы механики / К. Ланцош. – М. : Мир, 1965. – 408 с.

3 **Синицын, В. А.** О принципе наименьшего принуждения для систем с неудерживающими связями / В. А. Синицын // Прикл. математика и механика. – 1990. – Т. 54. – Вып. 6. – С. 920–925.

4 **Юдин, С. Ю.** Механика для квантовой механики. Часть 4. Опять о принципе наименьшего действия / С. Ю. Юдин. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://modsys.narod.ru/Stat/Stat_Est/Princip2/princip21.html. – Дата доступа : 12.04.2018.

5 Энциклопедия по машиностроению XXL [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mash-xxl.info/info/498810/. – Дата доступа : 12.04.2018.

P. A. ORLIN, A. M. SAVCHENKO, S. A. PIKULIN, E. N. FISENKO
Reshetnev Siberian State University of Science and Technologies

GAUSS'S PRINCIPLE OF LEAST CONSTRAINT

The article describes the formation of the Gauss least constraint principle from historical positions, and also the paper shows the expediency of principle's development with the aim of applying it to solving modern practical problems.

Получено 13.04.2018