

УДК 539.37

А. В. НЕСТЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЕ ТИПА ТИМОШЕНКО ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Рассмотрено растяжение-сжатие упругой пластины под действием радиальной косинусоидальной нагрузки в температурном поле. Для описания кинематики пластины приняты гипотезы Кирхгофа. Проведен численный анализ перемещений, деформаций и напряжений при различных секторах воздействия нагрузки в температурном поле.

Ключевые слова: круговая пластина, неосесимметричное деформирование, термосиловое нагружение.

Введение. Пластинчатые элементы широко используются в судостроении, строительстве, при создании авиакосмических объектов. Применение гипотез Тимошенко для расчета однослойных пластин обосновано в монографиях [1, 2]. В дальнейшем они использованы применительно к заполнителю в слоистых элементах конструкций. Постановки и методы решения соответствующих краевых задач приведены в монографиях [3, 4]. Результаты, связанные с колебаниями круговых элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [5–9]. Исследования деформирования слоистых упругопластических систем при циклических нагружениях содержатся в работах [10–13]. Некоторые результаты расчетов деформирования круговых трехслойных пластин с учетом температуры приведены в публикациях [14–18]. Аналитическое исследование неосесимметричного деформирования круговой однослойной пластины рассмотрено в статье [19]. Целью представленной работы является анализ напряженно-деформированного состояния круговой пластины типа Тимошенко при термосиловом нагружении. Это соответствует деформированию заполнителя трехслойной пластины.

Постановка краевой задачи. Рассмотрим упругую круговую однослойную пластину толщиной $h = 2c$, срединная плоскость которой принимается за полярную систему координат r, φ . Считаем, что к пластине приложены произвольные распределенные нагрузки $p_r(r, \varphi), p_\varphi(r, \varphi)$. В силу несимметричности нагрузки в пластине присутствуют тангенциальные и радиальные перемещения u_r, u_φ , которые в дальнейшем считаются искомыми.

Компоненты тензора деформаций ε_{ij} в пластине получим из перемещений, используя соотношения Коши [3]

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}(u_{\varphi,\varphi} + u_r), \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{r,\varphi}}{r} + u_{\varphi,r} - \frac{u_\varphi}{r} \right], \quad (1)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Связь напряжений и деформаций описывается соотношениями линейной теории упругости в девиаторно-шаровой форме с учетом температуры

$$s_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}, \quad \sigma = 3K(\varepsilon - \alpha_0 T), \quad (2)$$

где s_{ij} , ε_{ij} – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; σ , ε – шаровые части этих тензоров; G , K – термозависимые модули сдвига и объемной деформации; α_0 – коэффициент линейного температурного расширения; T – температура, отсчитываемая от некоторого начального значения T_0 .

Введем внутренние усилия в пластине

$$T_{\alpha\beta} = \int_h \sigma_{\alpha\beta} dz \quad (\alpha, \beta = r, \varphi). \quad (3)$$

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины получим, используя вариационный принцип Лагранжа

$$\delta W = \delta A,$$

здесь δA – вариация работы внешних сил ($dS = r dr d\varphi$),

$$\delta A = \iint_S (p_r \delta u_r + p_\varphi \delta u_\varphi) r dr d\varphi.$$

Вариация работы сил упругости

$$\delta W = \iiint_V (2\sigma_{r\varphi} \delta\varepsilon_{r\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi} \delta\varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr} \delta\varepsilon_{rr}) r dr d\varphi dz,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $\delta\varepsilon_{ij}$ – вариации деформаций (1).

После необходимых преобразований с учетом (3), приравняв нулю коэффициенты перед независимыми вариациями перемещений, уравнение равновесия рассматриваемой пластины в усилиях получены в виде

$$T_{rr,r} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{2r}T_{r\varphi,\varphi} = -p_r, \quad T_{r\varphi,r} + \frac{2}{r}T_{\varphi\varphi,\varphi} + \frac{2}{r}T_{r\varphi} = -p_\varphi. \quad (4)$$

Внутренние усилия, входящие в систему (4), выражаются через искомые функции u_r , u_φ с помощью соотношений (2), (1)

$$T_{rr} = h \left(K^+ u_{r,r} + \frac{u_{\varphi\varphi} + u_r}{r} K^- - 3K\alpha_0 T \right),$$

$$T_{\varphi\varphi} = h \left(K^- u_{r,r} + \frac{u_{\varphi\varphi} + u_r}{r} K^+ - 3K\alpha_0 T \right), \quad T_{r\varphi} = Gh \frac{u_{r,\varphi} + r u_{\varphi,r} - u_\varphi}{r},$$

$$K^+ = K(T(z)) + \frac{4}{3}G(T(z)), \quad K^- = K(T(z)) - \frac{2}{3}G(T(z)). \quad (5)$$

Уравнения равновесия в перемещениях рассматриваемой пластины при неосесимметричном деформировании в своей плоскости следуют из системы (4) с учетом (5)

$$(a_3 + a_2) \frac{u_{r,\varphi r}}{r} + (a_3 + a_1) \frac{u_{r,\varphi}}{r^2} + a_3 \left(u_{\varphi,rr} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) + a_1 \frac{u_{\varphi,\varphi\varphi}}{r^2} = -p_\varphi,$$

$$(a_2 + a_3) \frac{u_{\varphi,r\varphi}}{r} - (a_1 + a_3) \frac{u_{\varphi,\varphi}}{r^2} + a_1 (u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2}) + a_3 \frac{u_{r,\varphi\varphi}}{r^2} = -p_r, \quad (6)$$

где a_i – коэффициенты, определяющиеся через интегралы, поскольку модуль упругости материала изменяется по толщине вместе с температурой:

$$a_1 = \int_{-c}^c \left(K(T(z)) + \frac{4}{3} G(T(z)) \right) dz, \quad a_2 = \int_{-c}^c \left(K(T(z)) - \frac{2}{3} G(T(z)) \right) dz, \\ a_3 = \int_{-c}^c G(T(z)) dz. \quad (7)$$

Уравнения равновесия (6) не содержат температуру T , но она скажется на модулях упругости, входящих в коэффициенты (7), и граничных условиях. Зависимость модулей от температуры опишем формулой Белла [4]

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\} \phi(T),$$

$$\phi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06 \\ 1,03(1 - T/(2T_m)), & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases}$$

где T_m – температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей, которые можно определить, зная G_0 при некоторой температуре, например комнатной, тогда $G(0) = G_0 / \phi(T)$.

На контуре пластины предполагается заделка, накладывающая следующие требования на перемещения

$$u_r(r_0, \varphi) = 0, \quad u_\varphi(r_0, \varphi) = 0 \text{ при } r = r_0. \quad (8)$$

Общее решение. Искомые перемещения $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$ и нагрузки $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$ раскладываем в тригонометрические ряды по координате φ

$$u_r(r, \varphi) = u_r^0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{rn}^{(1)}(r) \cdot \cos(n\varphi) + u_{rn}^{(2)}(r) \cdot \sin(n\varphi) \right], \\ u_\varphi(r, \varphi) = u_\varphi^0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{\varphi n}^{(1)}(r) \cdot \cos(n\varphi) + u_{\varphi n}^{(2)}(r) \cdot \sin(n\varphi) \right], \\ p_r(r, \varphi) = p_r^0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{rn}^{(1)}(r) \cdot \cos(n\varphi) + p_{rn}^{(2)}(r) \cdot \sin(n\varphi) \right], \\ p_\varphi(r, \varphi) = p_\varphi^0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{\varphi n}^{(1)}(r) \cdot \cos(n\varphi) + p_{\varphi n}^{(2)}(r) \cdot \sin(n\varphi) \right], \quad (9)$$

где $u_m^{(1)}(r)$, $u_m^{(2)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(1)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(2)}(r)$ – искомые амплитудные функции; $u_r^0(r)$, $u_\varphi^0(r)$ – перемещения при осесимметричном нагружении силами $p_r^0(r)$, $p_\varphi^0(r)$.

Коэффициенты разложения нагрузок $p_{rn}^{(1)}(r)$, $p_{rn}^{(2)}(r)$, $p_{\varphi n}^{(1)}(r)$, $p_{\varphi n}^{(2)}(r)$ получим, используя свойство ортогональности применяемых систем тригонометрических функций

$$\int_0^{2\pi} [\sin(n\varphi) \cdot \cos(m\varphi)] d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} [\sin(n\varphi) \cdot \sin(m\varphi)] d\varphi = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \pi, n = m \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi} [\cos(n\varphi) \cdot \cos(m\varphi)] d\varphi = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \pi, n = m \end{cases}.$$

В результате имеем

$$p_{rn}^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad p_{rn}^{(2)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi,$$

$$p_{\varphi n}^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad p_{\varphi n}^{(2)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi. \quad (10)$$

Подставив выражения (9), (10) в уравнения (6) и приравняв коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях слева и справа, получим систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых функций $u_{rn}^{(1)}(r)$, $u_{rn}^{(2)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(1)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(2)}(r)$

$$a_1 u_{rn'rr}^{(1)} + a_1 \frac{u_{rn'r}^{(1)}}{r} - a_1 \frac{u_{rn}^{(1)}}{r^2} - a_3 \frac{n^2}{r^2} u_{rn}^{(1)} + (a_2 + a_3) \frac{n}{r} u_{\varphi n'r}^{(2)} - (a_1 + a_3) \frac{n}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)} = -p_{rn}^{(1)},$$

$$a_1 u_{rn'rr}^{(2)} + a_1 \frac{u_{rn'r}^{(2)}}{r} - a_1 \frac{u_{rn}^{(2)}}{r^2} - a_3 \frac{n^2}{r^2} u_{rn}^{(2)} - (a_2 + a_3) \frac{n}{r} u_{\varphi n'r}^{(1)} + (a_1 + a_3) \frac{n}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)} = -p_{rn}^{(2)}, \quad (11)$$

$$(a_2 + a_3) n \frac{u_{m'r}^{(2)}}{r} + (a_1 + a_3) n \frac{u_{rn}^{(2)}}{r^2} + a_3 u_{\varphi n'rr}^{(1)} + a_3 \frac{u_{\varphi n'r}^{(1)}}{r} - a_3 \frac{u_{\varphi n}^{(1)}}{r^2} - a_1 \frac{n^2}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)} = -p_{\varphi n}^{(1)},$$

$$-(a_2 + a_3) n \frac{u_{m'r}^{(1)}}{r} - (a_1 + a_3) n \frac{u_{rn}^{(1)}}{r^2} + a_3 u_{\varphi n'rr}^{(2)} + a_3 \frac{u_{\varphi n'r}^{(2)}}{r} - a_3 \frac{u_{\varphi n}^{(2)}}{r^2} - a_1 \frac{n^2}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)} = -p_{\varphi n}^{(2)}.$$

Ее общее решение можно записать в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы

$$u_{rn}^{(1)} = \sum_{k=1}^4 C_{nk} h_{nk} r^{S_{nk}} + u_{rn}^{(1)*}, \quad u_{rn}^{(2)} = -\sum_{k=5}^8 C_{nk} h_{n(k-4)} r^{S_{n(k-4)}} + u_{rn}^{(2)*},$$

$$u_{\varphi n}^{(1)} = \sum_{k=5}^8 C_{nk} r^{S_{n(k-4)}} + u_{\varphi n}^{(1)*}, \quad u_{\varphi n}^{(2)} = \sum_{k=1}^4 C_{nk} r^{S_{nk}} + u_{\varphi n}^{(2)*}, \quad (12)$$

где C_{1n}, \dots, C_{8n} – константы интегрирования, следующие из граничных условий (8); $u_{rn}^{(1)*}(r)$, $u_{rn}^{(2)*}(r)$, $u_{\varphi n}^{(1)*}(r)$, $u_{\varphi n}^{(2)*}(r)$ – частные решения; показатели степени:

$$S_{n1} = \frac{\sqrt{Q_n + a_1^2 n^2 + 2a_1 a_3 - a_2 n^2 (2a_3 + a_2)}}{\sqrt{2a_1 a_3}}, \quad S_{n2} = -S_{n1},$$

$$S_{n3} = \frac{\sqrt{-Q_n + a_1^2 n^2 + 2a_1 a_3 - a_2 n^2 (2a_3 + a_2)}}{\sqrt{2a_1 a_3}}, \quad S_{n4} = -S_{n3},$$

$$Q_n = \sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 + 2a_3 + a_2)n^2 \left[(a_1 + a_2)(a_1 - 2a_3 + a_2)n^2 + 4a_1a_3 \right]};$$

коэффициенты

$$h_{n1} = \frac{(-Q_n - 2a_3^2n^2 - 2n^2a_2a_3 + (a_1^2 - a_2^2)n^2)[(a_2 + a_3)S_{n1} + (a_3 + a_1)]}{2n(a_3^3n^2 + 2a_3^2n^2a_2 + (n^2a_2^2 - 2a_1(a_1 - a_2))a_3 - a_1^3 + a_1a_2^2)},$$

$$h_{n2} = \frac{(-Q_n - 2a_3^2n^2 - 2n^2a_2a_3 + (a_1^2 - a_2^2)n^2)[(a_2 + a_3)S_{n1} - (a_3 + a_1)]}{2n(a_3^3n^2 + 2a_3^2n^2a_2 + (n^2a_2^2 - 2a_1(a_1 - a_2))a_3 - a_1^3 + a_1a_2^2)},$$

$$h_{n3} = \frac{(Q_n - 2a_3^2n^2 - 2n^2a_2a_3 + (a_1^2 - a_2^2)n^2)[(a_2 + a_3)S_{n2} + (a_3 + a_1)]}{2n(a_3^3n^2 + 2a_3^2n^2a_2 + (n^2a_2^2 - 2a_1(a_1 - a_2))a_3 - a_1^3 + a_1a_2^2)},$$

$$h_{n4} = \frac{(Q_n - 2a_3^2n^2 - 2n^2a_2a_3 + (a_1^2 - a_2^2)n^2)[(a_2 + a_3)S_{n2} - (a_3 + a_1)]}{2n(a_3^3n^2 + 2a_3^2n^2a_2 + (n^2a_2^2 - 2a_1(a_1 - a_2))a_3 - a_1^3 + a_1a_2^2)}.$$

Случай приложения косинусоидальной нагрузки. Рассмотрим растяжение-сжатие однослойной пластины неосесимметричной радиальной косинусоидальной нагрузкой (рисунок 1) с постоянной амплитудой $p_0 = \text{const}$

$$p_r(r, \varphi) = p_0 \cos(\varphi), \quad p_\varphi(r, \varphi) \equiv 0. \quad (13)$$

Коэффициенты разложения нагрузки (13) в ряд следуют из (10)

$$p_m^{(1)}(r) = \frac{p_0}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi) \cdot \cos(n\varphi)] d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ p_0, & n = 1 \end{cases}$$

$$p_{r1}^{(1)}(r) = p_0, \quad p_m^{(1)}(r) = 0, \quad n > 1, \quad p_m^{(2)}(r) = p_{\varphi 1}^{(1)}(r) = p_{\varphi 1}^{(2)}(r) \equiv 0. \quad (14)$$

Остается только один ненулевой коэффициент $p_{r1}^{(1)}$. Составляющие перемещений (6) будут

$$u_{r1}^{(1)} = \sum_{k=1}^4 C_{1k} h_{1k} r^{S_{1k}} + u_{r1}^{(1)*}, \quad u_m^{(2)} = 0, \quad u_{\varphi 1}^{(1)} = 0, \quad u_{\varphi 1}^{(2)} = \sum_{k=1}^4 C_{1k} r^{S_{1k}} + u_{\varphi 1}^{(2)*}. \quad (15)$$

Частные решения $u_{r1}^{(1)*}$, $u_{\varphi 1}^{(2)*}$ получаем из решений дифференциальных уравнений (12) при соответствующих правых частях (14), полагая $n = 1$

$$u_{r1}^{(1)*} = p_0 r^2 (a_1 - 3a_3) / B_1,$$

$$u_{\varphi 1}^{(2)*} = -p_0 r^2 (a_1 + 2a_2 + 3a_3) / B_1, \quad B_1 = -4a_1^2 + 4a_2^2 + 8a_1a_3 + 8a_2a_3. \quad (16)$$

Константы интегрирования C_{1k} , входящие в (15), получим из граничных условий в центре и на контуре пластины, учитывая степень S_{1k} , при этом

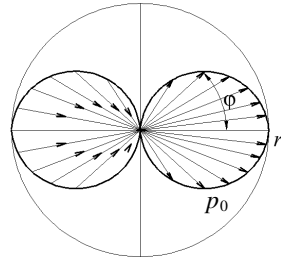


Рисунок 1 – Схема нагружения

необходимо положить $C_{12}^{(1)} = C_{14}^{(1)} = 0$ из условия ограниченности перемещений (15) и деформаций (1) в центре пластины. Оставшиеся константы $C_{11}^{(1)}$, $C_{13}^{(1)}$ следуют из условия равенства нулю перемещений (16) на контуре

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)} &= C_{11} h_{11} r_0^{S_{11}} + C_{13} h_{13} r_0^{S_{13}} + u_{r1}^{(1)*}(r_0) = 0, \\ u_{\phi 1}^{(2)} &= C_{11} r_0^{S_{11}} + C_{13} r_0^{S_{13}} + u_{\phi 1}^{(2)*}(r_0) = 0, \\ C_{11} &= -\frac{u_{r1}^{(1)*}(r_0) - u_{\phi 1}^{(2)*}(r_0) \cdot h_{13}}{r_0^{S_{11}}(h_{11} - h_{13})}, \quad C_{13} = \frac{u_{r1}^{(1)*}(r_0) - u_{\phi 1}^{(2)*}(r_0) \cdot h_{11}}{r_0^{S_{13}}(h_{11} - h_{13})}, \end{aligned} \quad (17)$$

где h_{11} , h_{13} – коэффициенты, приведенные в (12), которые имеют вид

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{(-Q_1 + a_1^2 - a_2^2 - 2a_3^2 - 2a_2 a_3)[(a_3 + a_2)S_{11} + (a_1 + a_3)]}{2(-a_1^3 + a_1 a_2^2 + 2a_2 a_3^2 + (a_2^2 - 2a_1(a_1 - a_2))a_3 + a_3^3)}, \\ h_{13} &= \frac{(Q_1 + a_1^2 - a_2^2 - 2a_3^2 - 2a_2 a_3)[(a_3 + a_2)S_{12} + (a_1 + a_3)]}{2(-a_1^3 + a_1 a_2^2 + 2a_2 a_3^2 + (a_2^2 - 2a_1(a_1 - a_2))a_3 + a_3^3)}. \end{aligned}$$

Полные перемещения следуют из соотношений (9) с учетом (14)–(17):

$$u_r(r, \varphi) = u_{r1}^{(1)}(r) \cos \varphi, \quad u_\varphi(r, \varphi) = u_{\phi 1}^{(2)}(r) \sin \varphi. \quad (18)$$

Деформации в пластине вычисляются по формулам (1) с учетом перемещений (18)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = (S_{11} C_{11} h_{11} r^{S_{11}-1} + S_{13} C_{13} h_{13} r^{S_{13}-1} + 2p_0 r(a_1 - 3a_5) / B_1) \cos \varphi, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} = (C_{11} r^{S_{11}-1} (1 + h_{11}) + C_{13} r^{S_{13}-1} (1 + h_{13}) - 2p_0 r(a_2 + 3a_5) / B_1) \cos \varphi, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(-C_{11} r^{S_{11}-1} (h_{11} - S_{11} + 1) - C_{13} r^{S_{13}-1} (h_{13} - S_{13} + 1) - \right. \\ &\quad \left. - 2p_0 r(a_1 + a_2) / B_1 \right) \sin \varphi, \\ \varepsilon_{\varphi r} &= \varepsilon_{rr} - \frac{1}{3} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}). \end{aligned} \quad (19)$$

Напряжения в пластине получаем из закона Гука (2) с учетом (19)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G\varepsilon_{rr} + 3K(\varepsilon - \alpha_0 T) = K^+ \varepsilon_{rr} + K^- \varepsilon_{\varphi\varphi} - 3K\alpha_0 T, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= K^- \varepsilon_{rr} + K^+ \varepsilon_{\varphi\varphi} - 3K\alpha_0 T, \quad \sigma_{r\varphi} = 2G\varepsilon_{r\varphi} = 2G\varepsilon_{\varphi r}, \end{aligned}$$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + 6\sigma_{r\varphi}^2} \quad (20)$$

Численные результаты. Расчеты сделаны для пластин радиуса $r_0 = 1$, выполненных из алюминиевого сплава Д-16Т при нагрузке $p_0 = 5$ МПа. Термомеханические характеристики материала: $G(0) = 30,75$ ГПа, $K(0) = 92,14$ ГПа, $G_0 = 27,6$ ГПа, $K_0 = 80$ ГПа, $\alpha_0 = 24,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ заимствованы из [20]. Расчеты произведены для температур $T_1 = 293$ К, $T_2 = 343$ К при различных секторах воздействия нагрузки $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Для вычислений использовался пакет Maple. На рисунке 2 показано распределение напряжений в пластине вдоль окружной координаты при различных радиусах и температурах. Знаки напряжений соответствуют знакам тригонометрических функций в (18).

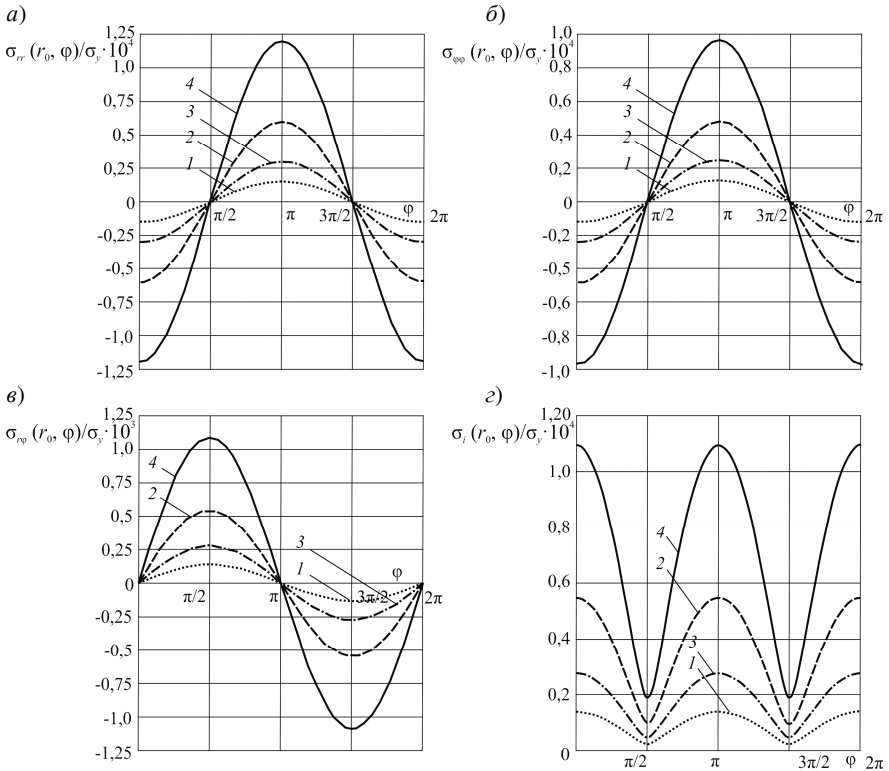


Рисунок 2 – Напряжения (а) $\sigma_{rr}(r_0, \varphi) / \sigma_y$, (б) $\sigma_{\varphi\varphi}(r_0, \varphi) / \sigma_y$, (в) $\sigma_{r\varphi}(r_0, \varphi) / \sigma_y$, з) $\sigma_r(r_0, \varphi) / \sigma_y$ в пластине из дюралюминия Д-16Т, находящейся в температурном поле:

1 – $r = r_0/2$ при $T = 293$ К, 2 – $r = r_0/2$ при $T = 343$ К,

3 – $r = r_0$ при $T = 293$ К, 4 – $r = r_0$ при $T = 343$ К

Экстремальные значения все напряжения достигают на контуре пластины ($r = r_0$), причем радиальные σ_{rr} и тангенциальные $\sigma_{\varphi\varphi}$ в направлениях $\varphi = 0, \pi$; касательные $\sigma_{r\varphi} - \varphi = \pi/2, 3\pi/2$. Интенсивность напряжений σ_i максимальна на контуре синфазно с σ_{rr} . С увеличением температуры происходит увеличение напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$ в 5 раз; $\sigma_{r\varphi}, \sigma_i$ – в 4 раза.

Заключение. Предложенная постановка краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние однослойных круговых пластин под действием термосиловой неосесимметричной нагрузки. Численные расчеты показали существенное влияние температуры на напряженно-деформированное состояние пластины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р-090)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.

2 Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.

3 Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.

4 Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Бел. наука, 2004. – 342 с.

5 Natural vibrations of a sandwich beam on an elastic foundation / V. D. Kubenko [et al.] // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, No. 5. – P. 541–547.

6 Starovoitov, E. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2003. – Vol. 35, No. 4. – P. 346–352.

7 Starovoitov, E. I. Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, No. 7. – P. 809–816.

8 Starovoitov, E. I. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation / E. I. Starovoitov, V. D. Kubenko, D. V. Tarlakovskii // Russian Aeronautics. – 2009. – Vol. 52, No. 2. – P. 151–157.

9 Starovoitov, E. I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 86–93.

10 Старовойтов, Э. И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1980. – № 2. – С. 92–96.

11 Москвитин, В. В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409–416.

12 **Москвитин, В. В.** К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагрузках / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.

13 **Gorshkov, A. G.** Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // Mechanics of Solids. – 2001. – Vol. 36, No. 1. – P. 64–69.

14 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

15 **Starovoitov, É. I.** Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, No. 4. – Pp. 451–459.

16 **Старовойтов, Э. И.** Уругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

17 **Starovoitov, É. I.** Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, No. 9. – P. 1032–1040.

18 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

19 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

20 **Старовойтов, Э. И.** К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов / Э. И. Старовойтов // Пробл. прочности. – 1988. – № 4. – С. 11–15.

A. V. NESTEROVICH

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

STRESSES IN A CIRCULAR PLATE OF TIMOSHENKO TYPE UNDER NON-AXISYMMETRIC TENSION-COMPRESSION

The tension-compression of a single-layer elastic plate under the action of a radial cosine load in a temperature field is considered. To describe the plate's kinematics the Timoshenko hypotheses are accepted. It is carried out the numerical analysis of displacements, strains and stresses in different sectors of the load action in the temperature field.

Получено 07.10.2018