УДК 624.073.2

О. В. КОЗУНОВА, Д. М. ГУРСКИЙ
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНО НАГРУЖЕННОГО ФУНДАМЕНТА С ПОДОШВОЙ КРУГЛОЙ ФОРМЫ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В работе реализованы постановка, алгоритм и получены результаты решения контактной задачи «круглая плита – упругое основание» при осесимметричной нагрузке для физически нелинейного однородного основания. Решение сформулированной задачи выполнено вариационно-разностным методом с применением прикладного пакета Mathematica. Данный метод позволил полностью описать напряженно-деформированное состояние упругого основания под плитой, исследовать контактную зону и вычислить осадки основания под плитой.

Ключевые слова: круглая плита, физически нелинейное однородное основание, вариационно-разностный метод, модель упругого слоя, итерационный алгоритм.

Введение. Одним из приближенных способов расчета строительных конструкций является вариационно-разностный метод (ВРМ). Сущность ВРМ, реализующего вариационный принцип Лагранжа с помощью метода конечных разностей, заключается в сведении задачи минимизации функционала полной потенциальной энергии, являющейся квадратичной функцией относительно деформаций и перемещений, к задаче минимизации функции многих переменных, отнесенных к узлам конечно-разностной сетки [1].

В проводимых авторами исследованиях решается осесимметричная задача теории упругости: линейно-упругая круглая плита подошвы плитного фундамента на нелинейно-упругом однородном основании. В расчетах рассматриваются реальные грунты, как аналог при моделировании упругого основания, с обобщенными начальными упругими параметрами (модулем упругости и коэффициентом Пуассона).

Теория и результаты решения аналогичных нелинейных задач, но для балочных плит (плоская деформация) приведены в работах [2–4] для двухслойных оснований без ослаблений и с ними, и внедрены в инженерную практику нормативным документом [5].

Для решения контактной задачи «круглая плита – упругое основание» в нелинейной постановке предлагается использовать вариационно-разностный метод (ВРМ), алгоритм которого предложен ранее [6]. Этот метод позволяет полностью описать напряженно-деформированное состояние (НДС) упругого основания под фундаментной плитой, исследовать контактную зону, вычислить внутренние усилия в исследуемой плите и осадки основания под плитой. Численная реализация ВРМ в нелинейной постановке осуществляется методом конечных разностей (МКР) с использованием итерационного алгоритма А. А. Ильюшина [7] в программном пакете Mathematica 10.0.

Постановка задачи. Фундаментная плита с подошвой круглой формы на нелинейно-упругом однородном основании находится под действием вертикальной внешней нагрузки F (рисунок 1). Параметры плиты: диаметр $2b$, цилиндрическая жесткость D.

Нелинейно-упругое однородное основание моделируется как для упругого слоя с конечной толщиной H и переменным модулем упругости (деформации) этого слоя E_0. Коэффициент Пуассона упругого слоя ν_0 в силу малости изменения своего значения принимается постоянным, что исследовалось ранее в работе [8].

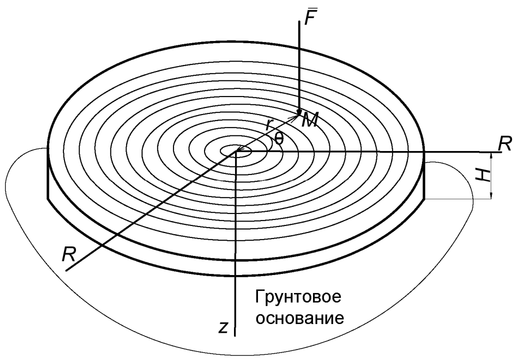


Рисунок 1 – Круглая плита под действием внешней нагрузки

Поперечник основания аппроксимируется симметричной разбивочной сеткой с постоянным шагом по осям вглубь основания вдоль оси Z и в ширину расчетной области вдоль оси R. В результате получено N ячеек по направлению оси R и K ячеек вдоль оси Z, соответствующих осесимметричной постановке рассматриваемой задачи.

В качестве неизвестных принимаем $u_i(r, z)$ и $w_i(r, z)$ – компоненты вектора перемещения i-й узловой точки основания в полярной системе координат; $p_i(r)$ – реактивные давления в контактной зоне по поперечнику расчетной области.

Разбивочная сетка ½ расчетной области базовой задачи «круглая плита – упругое основание» с соответствующими граничными условиями показана на рисунке 2.

Кинематические граничные условия [9] реализуются на границе принятой расчетной области и в контактной зоне, а именно:

1) на контакте плиты с упругим основанием возникают только нормальные реактивные давления, силами трения пренебрегаем;

2) в контактной зоне справедливо равенство осадок основания w_i прогибам плиты в k-м сечении z_k;

3) для плиты справедливы гипотезы теории изгиба;

4) на границах принятой расчётной области перемещения принимаются равными нулю $u = 0$, $w = 0$.

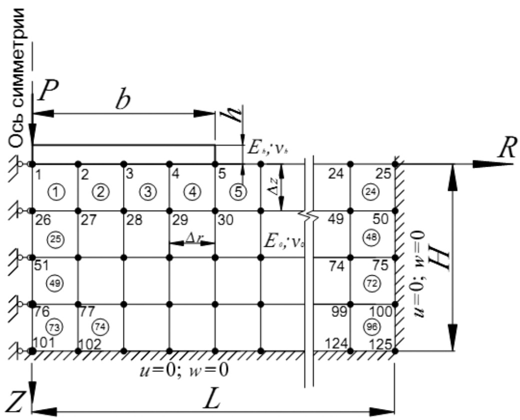


Рисунок 2 – Разбивочная сетка ½ расчетной области

Статические граничные условия. Для крайних точек k осесимметрично-нагруженной круглой плиты (пластинки) вводятся статические граничные условия [7] для радиальных поперечной силы и изгибающего момента:

$$Q_r^{(k)}\Big|_{r=\pm b} = 0\,; \qquad M_r^{(k)}\Big|_{r=\pm b} = 0. \tag{1}$$

Алгоритм расчета вариационным методом. Для решения осесимметричной задачи теории упругости используются слагаемые функционала полной энергии в виде трех составляющих энергий:

1) функционала энергии деформаций упругого основания

$$U_f = \frac{2\pi G_k}{(1-2\nu_k)D}\iint_S \left[\nu_k\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + (1-2\nu_k)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{u}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right)+\right.$$
$$\left. +\frac{1-2\nu_k}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 rdrdz\right], \tag{2}$$

где $G_k = \dfrac{E_k}{2(1+\nu_k)}$ – связь между упругими постоянными однородного основания в точке k, известная из теории упругости [7];

2) функционала энергии изгиба круглой плиты

$$\Omega_b = \pi\int_0^b D\left[\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)^2 - 2(1-\nu_b)\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\frac{d^2w}{dr^2}\right]rdr\,, \tag{3}$$

где D – цилиндрическая жесткость круглой плиты, которая определяется из соотношения

$$D = \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)}, \tag{4}$$

E_b, ν_b – упругие постоянные железобетонной плиты, h – ее толщина;

3) потенциала внешней нагрузки

$$\Pi = -\iint_S q(r)w(r)rdr. \tag{5}$$

Таким образом, величина функционала полной энергии расчетной модели «круглая плита – нелинейно-упругое основание»

$$Э = U_f + \Omega_b + \Pi, \tag{6}$$

где каждое из слагаемых определяется соотношениями (2), (3), (5).

В отличие от функционала полной энергии деформируемой системы от внешней нагрузки, применяемого в книгах С. В. Босакова [10, 11], здесь предлагается новая форма функционала полной потенциальной энергии, с учетом энергии деформации нелинейно-упругого основания, структура которой аналогична рассмотренной ранее в работах О. В. Козуновой [2–6].

В книге [10] отмечается, что полная потенциальная энергия конструкции определяется при переводе ее из деформированного состояния в недеформированное (начальное). При этом внешние силы считаются постоянными. Поэтому в выражении функционала полной энергии (6) значения энергий деформации упругого основания и изгиба плиты всегда положительны, а работа внешних сил (потенциал внешних сил) всегда отрицательна, что учтено знаком в формуле (5).

При составлении функционала энергии деформаций упругого основания (2) не учитывается работа сил собственного веса упругого основания, так как эти силы уравновешены начальным напряженным состоянием уже в упругом основании, а работа самоуравновешенной системы сил на малых возможных перемещениях равна нулю. Следовательно, при поиске полного напряженного состояния для рассматриваемой задачи необходимо к полученному решению добавить напряженное состояние от сил собственного веса основания.

Так как в состоянии статического равновесия функционал полной энергии Э должен иметь минимум, то неизвестные перемещения $u_i(r, z)$ и $w_i(r, z)$ найдем из условия обращения в нуль производных от полной энергии по каждому из перемещений, то есть

$$\frac{\partial Э}{\partial u_i} = 0, \frac{\partial Э}{\partial w_i} = 0, i = 1, 2, 3, \ldots, N, \tag{7}$$

где N – число узловых точек основания. В результате дифференцирования получается система дифференциальных уравнений, порядок которой равен $2N$, то есть числу неизвестных перемещений.

Алгоритм расчета с применением МКР. Решение краевой задачи строится в перемещениях и реализуется методом конечных разностей (МКР), то есть заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными соотношениями. При решении поставленной задачи энергия деформации подсчитывается для каждой ячейки МКР, а затем суммируется по объему упругого основания. Однако запись функционала полной энергии (6) отличается от традиционной и подобна принятой в [2–6].

Разобьем расчетную область прямоугольной сеткой на отдельные ячейки (рисунок 4) и найдем энергию деформаций упругого основания для отдельной ячейки с номером «*j*».

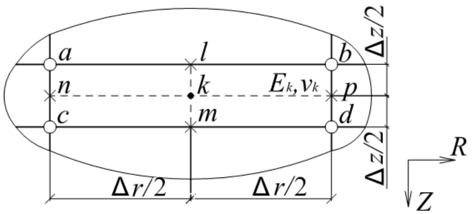


Рисунок 4 – Прямоугольная ячейка метода конечных разностей

Функционал энергии деформаций упругого основания (2) получен через известные зависимости плоской задачи теории упругости: соотношения Коши и обобщенный закон Гука.

Записываются выражения для деформаций $\varepsilon_r^{(k)}, \varepsilon_z^{(k)}, \gamma_{rz}^{(k)}$ в точке k как среднее арифметическое деформаций в вершинах прямоугольника $abcd$ (см. рисунок 4)

$$\varepsilon_r^{(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial r} = \left(\frac{u_b + u_d}{2} - \frac{u_a + u_c}{2} \right) \frac{1}{\Delta r} = \frac{u_b + u_d - u_a - u_c}{2\Delta r};$$

$$\varepsilon_z^{(k)} = \frac{\partial w_k}{\partial z} = \left(\frac{w_c + w_d}{2} - \frac{w_a + w_b}{2} \right) \frac{1}{\Delta z} = \frac{w_c + w_d - w_a - w_b}{2\Delta z};$$

$$\varepsilon_{uz}^{(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial z} = \left(\frac{u_c + u_a}{2} - \frac{u_d + u_b}{2} \right) \frac{1}{\Delta z} = \frac{u_c - u_d + u_a - u_b}{2\Delta z}; \qquad (8)$$

$$\varepsilon_{wr}^{(k)} = \frac{\partial w_k}{\partial r} = \left(\frac{w_a + w_d}{2} - \frac{w_b + w_c}{2} \right) \frac{1}{\Delta r} = \frac{-w_b + w_d + w_a - w_c}{2\Delta r};$$

$$\gamma_{rz}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{uz}^{(k)} + \varepsilon_{wr}^{(k)} \right).$$

Энергия деформаций прямоугольной ячейки размерами ($\Delta r \Delta z$) с центром в точке k, согласно формуле (2) и с учетом соотношений Коши (8), усредненно будет равна

$$U_{i,j}^{(k)}=\frac{\pi E_k}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)D}\left\{\nu_k\left[\frac{(u_b+u_d+u_a+u_c)}{4r}+\frac{u_b+u_d-u_a-u_c}{2\Delta r}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{w_c+w_d-w_a-w_b}{2\Delta z}\right]^2+(1-2\nu_k)\left[\left(\frac{u_b+u_d-u_a-u_c}{2\Delta r}\right)^2+\left(\frac{u_b+u_d+u_a+u_c}{4r}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{w_c+w_d-w_a-w_b}{2\Delta z}\right)^2\right]+\frac{1}{2}(1-2\nu_k)\left[\frac{u_c-u_d+u_a-u_b}{2\Delta z}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{-w_b+w_d+w_a-w_c}{2\Delta r}\right]^2\right\}r\Delta r\Delta z, \qquad (9)$$

где E_k, ν_k – упругие постоянные в центре ячейки основания; i, j – номер узловой точки вдоль осей R и Z соответственно.

Энергия деформаций упругого основания принятой расчетной области получается суммированием по объему основания энергий деформаций криволинейных параллелепипедов, определяемых по формуле (9), и с учетом (8) выражается в конечно-разностной форме. Энергия изгиба круглой плиты в контактной зоне с основанием (3) и потенциал внешней нагрузки (5) также записывается в конечно-разностном виде, а затем производится суммирование конечно-разностных аппроксимаций выражений (2), (3), (5). В результате получаем полную энергию Э принятой расчетной модели «круглая плита – упругое основание» с действующими на плиту нагрузками.

В силу минимума функционала полной энергии в состоянии статического равновесия согласно (7) получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которой позволяет найти неизвестные компоненты вектора перемещений $u_i(r, z)$ и $w_{\mathrm{i}}(r, z)$.

Зная перемещения, используя введенные ранее гипотезы, можно определить прогибы плиты, соответствующие осадкам упругого основания под плитой; а также – вертикальные напряжения упругого основания и реактивные давления в контактной зоне «круглая плита – упругое основание». По прогибам плиты определяются внутренние усилия в ее сечениях.

Реализация алгоритма в нелинейной постановке. В нелинейной постановке предусматривается организация итерационного алгоритма, где *линейный расчет становится нулевой итерацией.*

1-я итерация. Находим интенсивность деформации для центра j-й ячейки

$$\varepsilon_j^{(0)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_r^{(0)}-\varepsilon_z^{(0)})^2+(\varepsilon_r^{(0)}-\varepsilon_\varphi^{(0)})^2+(\varepsilon_z^{(0)}-\varepsilon_\varphi^{(0)})^2+\frac{3}{2}(\gamma_{rz}^{(0)})^2}\,, \qquad (10)$$

где $\varepsilon_\varphi^{(0)}=\dfrac{u^{(0)}}{r}$.

Конечно-разностные соотношения для относительных деформаций (10) определяются формулами (8).

Определяем переменный (секущий) модуль для ячейки с номером «j»

$$E_j^{(m)} = \frac{\sigma_u \,\mathrm{th}\left(\frac{E_0}{\sigma_u}\varepsilon_j^{(m-1)}\right)}{\varepsilon_j^{(m-1)}}, \tag{11}$$

где σ_u – предел прочности упругого основания.

Находим выражение для полной энергии системы при переменном (секущем) модуле $E_j^{(1)}$ в каждой ячейке. Дифференцируем его и из системы линейных алгебраических уравнений определяем перемещения первой итерации нелинейного расчета в i-м узле расчетной области $u_i^{(1)}$ и $w_i^{(1)}$.

2-я итерация. Последовательность действий аналогична первой итерации. Находим интенсивность деформации для центра каждой j-й ячейки по формуле (10) и секущий модуль деформации по формуле (11), в которые подставляем относительные деформации, полученные через соотношения Коши из формул (8), но для первой итерации.

Находим выражение для полной энергии системы при секущем модуле $E_j^{(2)}$ в каждой ячейке. Дифференцируем и определяем узловые перемещения $u_i^{(2)}$ и $w_i^{(2)}$.

Итерация с номером m. Выполняется аналогично предыдущим. В общем виде выражение интенсивности деформаций для этой итерации

$$\varepsilon_j^{(m-1)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_r^{(m-1)} - \varepsilon_z^{(m-1)}\right)^2 + \left(\varepsilon_r^{(m-1)} - \varepsilon_\varphi^{(m-1)}\right)^2 + \left(\varepsilon_z^{(m-1)} - \varepsilon_\varphi^{(m-1)}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{rz}^{(m-1)}\right)^2}. \tag{12}$$

Погрешность приближенного решения нелинейной задачи с использованием итерационного алгоритма оценивается инженерным или практическим критерием сходимости δ_f, а именно

$$\delta_f = \frac{f_{\max}^{(n)} - f_{\max}^{(n-1)}}{f_{\max}^{(n)}} \cdot 100\,\% \le \xi, \tag{13}$$

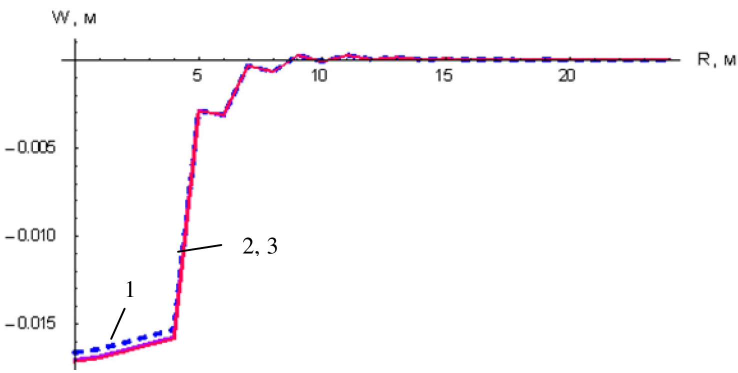
где $f_{\max}^{(n)}$, $f_{\max}^{(n-1)}$ – максимальные значения исследуемой функции для последующей и предыдущей итераций; n – номер итерации.

Формулу (13) можно разъяснить следующим образом [9]: для сходимости итерационного процесса приближенного вычисления должно выполняться следующее условие – максимальная поправка δ_f по искомой функции $f(r, z)$ за один обход сетки не должна превосходить малой величины ξ, зависящей от шага сетки, полной осадки плиты и наличия неоднородности в упругом основании.

Результаты нелинейного расчета. Для реализации указанного подхода составлена программа на языке Mathematica 10.0 и проведена ее числовая апробация для осесимметрично-нагруженной круглой плиты, контактирующей с однородным нелинейно-упругим основанием.

При численном счете использовались следующие исходные данные: *упругое основание* (песок средней плотности) – $\sigma_u = 0{,}2$ МПа; $\nu_1 = 0{,}3$; $E_0 = 15$ МПа; *железобетонная плита* (бетон марки С20/25) – $E_б = 3{,}06 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_b = 0{,}17$, $P = 4500$ кН; $b = 4$ м (радиус сечения); $h = 1{,}0$ м (высота сечения); *расчетная область* – $H = 6$ м (высота); $L = 24$ м (радиус).

На рисунках 5–7 приведены результаты нелинейных расчетов осадок упругого основания (по горизонтальным срезам расчетной области) и соответствующие им прогибы плит для *первых трех итераций* с учетом того, что нулевая итерация стала первой и т. д. Графики на рисунке 5 очень близки друг к другу и сливаются в одну линию уже на второй итерации. Поэтому на рисунках 6, 7 представлены результаты нелинейных расчетов для второй итерации.



1 – линейный расчет; 2, 3 – первая и вторая итерации

Рисунок 5 – Осадки упругого основания по ширине расчетной области (*в узлах 1–25*) на глубине $h = 0$ (контактная зона)

Заключение. В работе использован вариационно-разностный метод (ВРМ) для расчета фундаментных плит с подошвой круглой формы на физически нелинейном грунтовом основании. ВРМ универсален и позволяет полностью описать напряженно-деформированное состояние основания под круглой плитой и за ее пределами, исследовать контактную зону, определить осадки упругого основания и прогибы плиты, и по ее прогибам вычислить внутренние усилия в плите.

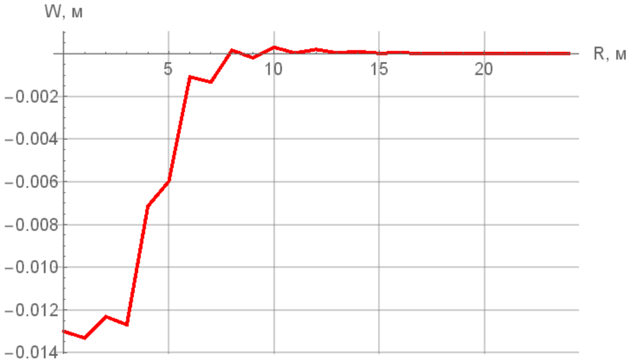


Рисунок 6 – Осадки упругого основания по ширине расчетной области (*в узлах 26–50*) на глубине $h = \Delta z$ (вторая итерация)

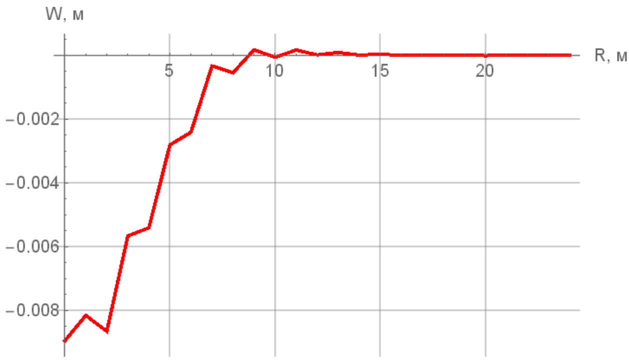


Рисунок 7 – Осадки упругого основания по ширине расчетной области (*в узлах 51–75*) на глубине $h = 2\Delta z$ (вторая итерация)

В работе исследовались осадки упругого основания под плитой и за ее пределами (по глубине и ширине расчетной области). Итерационный алгоритм сходится уже на второй итерации, следовательно, для плит средней жесткости и однородных оснований для упрощения математических расчетов при моделировании допускается не учитывать физическую нелинейность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Барашков, В. Н.** Алгоритм реализации задач теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом. Ч. 1 / В. Н. Барашков // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306, № 3. – С. 23–28.

2 **Босаков, С. В.** Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета (Ч. 1) / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 1. – С. 5–13.

3 **Босаков, С. В.** Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Результаты расчета (Ч. 2) / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 2. – С. 15–19.

4 **Козунова, О. В**. Нелинейный расчет балочных плит на слоистых основаниях с биогенными включениями / О. В. Козунова // Геотехника Беларуси: наука и практика : сб. статей Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 20–22 октября 2008 г. – Минск : БНТУ, 2008. – С. 27–63.

5 **Козунова, О. В.** Особенности проектирования плитных фундаментов на многослойных основаниях со слабыми слоями грунтов / О. В. Козунова // Рекомендации по проектированию и устройству рациональных фундаментов на основаниях, сложенных озерно-ледниковыми и лессовидными грунтами : Р 5.01.056.09 : введ. 01.10.09. – Минск : Стройтехнорм, 2009. – Гл. 8. – С. 39–47.

6 **Козунова, О. В.** Нелинейный расчет фундаментных плит на слоистых основаниях с использованием секущего модуля деформации / О. В. Козунова // Вестник Брестского государственного технического университета. Строительство и архитектура. – 2009. – № 1 (55). – С. 32–39.

7 **Александров, А. В**. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 398 с.

8 **Козунова, О. В.** Учет переменного коэффициента Пуассона в нелинейном расчете балочной плиты, контактирующей с неоднородным основанием / О. В. Козунова // Инженерно-геотехнические изыскания, проектирование и строительство оснований, фундаментов и подземных сооружений : сб. тр. Всероссийской науч.-техн. конф. – СПб. : СПбГАСУ, 2017. – С. 119–124.

9 **Козунова, О. В.** Статический анализ системы «балочная плита – нелинейно-упругое неоднородное основание» вариационно-разностным методом: дис. … канд. техн. наук: 05.23.17 / О. В. Козунова. – Минск, 2017. – 168 с.

10 **Босаков, С. В.** Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ. – 2006. – 107 с.

11 **Босаков, С. В.** Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 127 с.

O. V. KOZUNOVA, D. M. GURSKY

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

AXISYMMETRIC PROBLEM FOR A VERTICALLY LOADED FOUNDATION WITH THE CIRCULAR SHAPE SOLE ON A NONLINEAR ELASTIC BASE

In the work there are realized the formulation, the algorithm, and the obtained results of solving the "round plate – elastic base" contact problem with an axisymmetric load for a physically non-linear homogeneous base. The variational-difference method is used to solve the formulated problem using the applied Mathematica package. The mentioned method allowed to fully describe the stress-strain condition of the elastic basis under the plate, to explore the contact zone and to calculate the elastic base precipitation under the plate.

Получено 30.10.2018