

УДК 539.3

А. Г. КОЗЕЛ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА**

Предложена математическая модель описания осесимметричного деформирования несимметричной по толщине упругопластической трёхслойной круговой пластины на двухпараметрическом основании Пастернака. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. Заполнитель считается легким, не учитывается работа касательных напряжений. Физические уравнения связи напряжений с деформациями в слоях соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях и перемещениях получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Краевая задача для рассматриваемой пластины замкнута выписанными граничными условиями.

Ключевые слова: трёхслойная пластина, деформирование, осесимметричный изгиб, основание Пастернака.

Введение. Использование трёхслойных конструкций в технике и строительстве повлекло за собой интенсивную разработку теорий и методов их расчёта. В работах [1–5] исследованы колебания круговых трёхслойных элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания. Реакция слоистых упругопластических систем на циклические нагружения изучалась в работах [6–9]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое деформирование трёхслойных стержней и оболочек с несжимаемым заполнителем рассмотрено в публикациях [10–12]. Деформирование круговых трёхслойных пластин в настоящее время изучено в основном при опирании на однопараметрическое основание Винклера [13, 14].

Модель упругого основания с использованием двух коэффициентов постели, учитывающая его сжимаемость и связность, была впервые использована П. Л. Пастернаком [15] для анализа взаимодействия с однородными элементами конструкций. Деформирование несимметричных по толщине упругих пластин на основании Пастернака исследовалось в работах [16–20]. В представленной работе приведены постановки краевой задачи в усилиях и перемещениях подобной упругопластической трёхслойной пластины, связанной со сложным двухпараметрическим основанием.

Постановка задачи. Рассматривается круговая трёхслойная пластина с лёгким заполнителем на упругом основании. Для изотропных несущих слоев толщиной h_1 , h_2 приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной плоскости пластины. В лёгком несжимаемом по толщине заполнителе

($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ , тангенциальные перемещения линейно распределены по толщине, не учитывается работа касательных напряжений $\sigma_{rz}^{(3)}$.

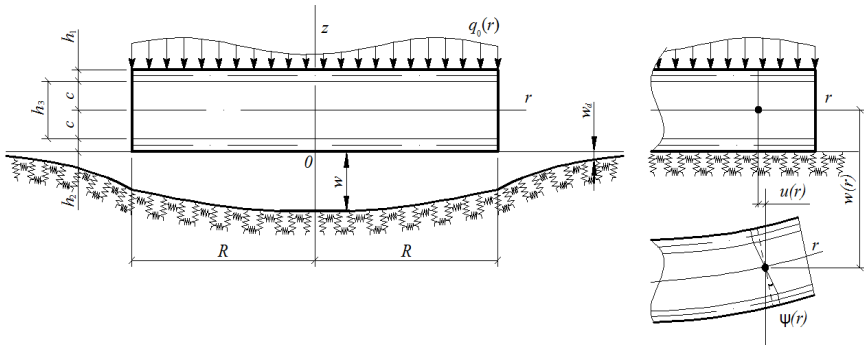


Рисунок 1 – Схема деформирования круговой пластины

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q_0 = q(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. На нижнюю поверхность пластины действует распределенная по ее площади реакция основания q_R , которую принимаем в соответствии с моделью Пастернака, согласно которой [16]

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия; t_f – коэффициент сдвига материала основания; Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $w(r), \psi(r), u(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Через h_k обозначена толщина k -го слоя.

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\epsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)} + w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения радиальных перемещений в слоях u_r^k через искомые функции

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & (c \leq z \leq c + h_1), & \quad u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r}, & \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & (-c \leq z \leq c), & \end{aligned} \quad (2)$$

где $u + c\psi$ – смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, для второго несущего слоя такое смещение равно $u - c\psi$; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (2) и соотношений Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\Psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\Psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\Psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\Psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\Psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\Psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\Psi.\end{aligned}$$

Предположим, что материалы несущих слоев в процессе деформирования могут проявлять упругопластические свойства, а заполнитель – нелинейно упругие. Для их описания используем соотношения теории малых упругопластических деформаций:

$$\begin{aligned}s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\varepsilon_\alpha^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= 3K_k\varepsilon^{(k)}, \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3\varepsilon_{rz}^{(3)}(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)})), & (k &= 1, 2, 3, \alpha = r, \varphi),\end{aligned}\quad (3)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k – модули сдвиговой и объёмной деформации k -го слоя; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности материалов несущих слоев, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое ($k = 1, 2$), $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоев; $s_{rz}^{(3)}$, $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя, причём $\omega_3 \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \quad (4)$$

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (3), представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций, выделив упругие (индекс «e») и неупругие (индекс « ω ») слагаемые

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)}, & (\alpha &= r, \varphi; k = 1, 2, 3), \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)},\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\sigma_{ae}^{(k)} = 2G_k \vartheta_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \quad \sigma_{a\omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k \vartheta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{r\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \vartheta_{rz}^{(3)}.$$

Внутренние силы и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «е») и нелинейной (индекс «ω») частей

$$T_\alpha^{(k)} = T_{ae}^{(k)} - T_{a\omega}^{(k)}, \quad M_\alpha^{(k)} = M_{ae}^{(k)} - M_{a\omega}^{(k)}.$$

Величины $T_{ae}^{(k)}$, $T_{a\omega}^{(k)}$, $M_{ae}^{(k)}$, $M_{a\omega}^{(k)}$ вычисляются по формулам (4), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{ae}^{(k)}$, $\sigma_{a\omega}^{(k)}$ (5). После этого обобщенные внутренние силовые факторы будут следующими:

$$T_\alpha = T_{ae} - T_{a\omega} = \sum_{k=1}^3 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{a\omega}^{(k)},$$

$$M_\alpha = M_{ae} - M_{a\omega} = \sum_{k=1}^3 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{a\omega}^{(k)}, \quad (6)$$

$$H_{ae} = M_{ae}^{(3)} + c(T_{ae}^{(1)} - T_{ae}^{(2)}), \quad H_{a\omega} = M_{a\omega}^{(3)} + c(T_{a\omega}^{(1)} - T_{a\omega}^{(2)}).$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины на упругом основании была получена с помощью принципа Лагранжа в [18]. Поэтому ее можно применить и здесь как исходную

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0, \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \quad M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -(q_0 - q_R). \quad (7)$$

На контуре пластины ($r = R$) должны выполняться силовые условия

$$T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \quad (8)$$

Выделяя в обобщенных внутренних силовых факторах, представленных в уравнениях (7), (8), линейные и нелинейные составляющие, в соответствии с формулами (6), перепишем их в виде

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_\omega, \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = h_\omega, \quad (9)$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q_0 + q_R + q_\omega.$$

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщенных внутренних силовых факторов, причем нижний индекс «е» в дальнейшем опущен для удобства. Нелинейные добавки сосредоточены справа и включены в слагаемое с нижним индексом «ω».

$$p_\omega = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}),$$

$$q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}).$$

Граничные условия в усилиях (8) замыкают постановку задачи теории малых упругопластических деформаций

$$T_r = T_r^1 + T_\omega, \quad H_r = H_r^1 + H_\omega, \quad M_r = M_r^1 + M_\omega,$$

$$M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^1 + M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}).$$

Уравнения равновесия в перемещениях. Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий выражаются через перемещения по формулам, приведенным в [18], поэтому система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (9), с учётом (1) имеет вид

$$L_2(a_1u + a_2\Psi - a_3w_{,r}) = p_\omega, \quad L_2(a_2u + a_4\Psi - a_5w_{,r}) = h_\omega, \quad (10)$$

$$L_3(a_3u + a_5\Psi - a_6w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q_0 + q_\omega,$$

где коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются формулами

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+,$$

$$a_4 = c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}c K_3^+), \quad a_5 = c[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+],$$

$$a_6 = h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+,$$

$$K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3}G_k,$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача по определению перемещений в круглой пластине на основании Пастернака замыкается присоединением к (10) силовых (8) или кинематических граничных условий. В частности, при жёсткой заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u = \Psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = R.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \Psi = w = 0, \quad M_r = 0 \quad \text{при } r = R.$$

В случае свободного контура пластины

$$\Psi = 0, \quad T_r = M_r = M_{r,r} = 0.$$

Здесь T_r, M_r выражаются через перемещения формулами

$$T_r = \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \Psi_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\Psi}{r} -$$

$$- \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r},$$

$$\begin{aligned}
M_r = & \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\
& + \left[c K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \Psi_{,r} + \\
& + \left[c K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\Psi}{r} - \\
& - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
& - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}.
\end{aligned}$$

Предложенная постановка краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние упругопластической круговой трехслойной пластины с легким наполнителем, лежащей на упругом основании Пастернака.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р-090).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Natural vibrations of a sandwich beam on an elastic foundation / V. D. Kubenko [et al.] // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, No. 5. – P. 541–547.
- 2 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2003. – Vol. 35, No. 4. – P. 346–352.
- 3 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, No. 7. – P. 809–816.
- 4 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation / E. I. Starovoitov, V. D. Kubenko, D. V. Tarlakovskii // Russian Aeronautics. – 2009. – Vol. 52, No. 2. – P. 151–157.
- 5 **Starovoitov, E. I.** Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 86–93.
- 6 **Старовойтов, Э. И.** О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. – 1980. – № 2. – С. 92–96.
- 7 **Москвитин, В. В.** Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409–416.
- 8 **Москвитин, В. В.** К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.
- 9 **Gorshkov, A. G.** Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux. / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // Mechanics of Solids. – 2001. – Vol. 36, No. 1. – P. 64–69.

10 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

11 **Старовойтов, Э. И.** Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

12 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

13 **Starovoitov, É. I.** Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, No. 4. – P. 451–459.

14 **Starovoitov, É. I.** Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, No. 9. – P. 1032–1040.

15 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 55 с.

16 **Козел, А. Г.** Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.

17 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2017. – № 32. – С. 235–240.

18 **Козел, А. Г.** Перемещения в круговой трёхслойной пластине на двухпараметрическом основании / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.

19 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трёхслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – № 33. – С. 318–322.

20 **Козел, А. Г.** Деформированное состояние трёхслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака / А. Г. Козел // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 1. – Режим доступа: <http://mathmod.esrae.ru/17-60>. – Дата доступа 11.06.2018.

A. G. KOZEL

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

EQUILIBRIUM EQUATIONS OF AN ELASTIC-PLASTIC CIRCULAR PLATE ON THE PASTERNAK BASE

There was suggested the mathematical model for describing the axisymmetric deformation of an elastoplastic three-layer circular plate that is asymmetric in thickness on a two-parameter Pasternak base. Kirchhoff's hypotheses are accepted for isotropic bearing layers. The filler is considered to be light. The shearing stresses are not taken into account. The physical equations of stress-deformation dependence in layers correspond to the theory of small elastoplastic deformations. Differential equations of equilibrium for forces and moments are obtained using the Lagrange variational method. The boundary value problem for the plate under consideration is closed by the written out boundary conditions.

Получено 07.09.2018