УДК 531.8

С. І. РУСАН, А. К. ГАЎРЫЛЕНЯ
Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт, Баранавічы, Беларусь

ЭЛЕМЕНТЫ МЕТОДЫКІ АНАЛІТЫЧНАГА ДАСЛЕДАВАННЯ ПРОСТЫХ РУХАЎ ДВУХ УЗАЕМАДЗЕЙНЫХ ЦЕЛАЎ

У артыкуле выкладзена методыка міждысцыплінарнага ўзаемадзеяння ў працэсе вывучэння агульнатэхнічных дысцыплін. На двух канкрэтных прыкладах паказана, як сродкамі матэматыкі і тэарэтычнай механікі можна падрыхтаваць студэнтаў да ўспрымання адной з найбольш складаных тэм курса тэорыі механізмаў і машын – «Кулачковыя механізмы».

Ключавыя словы: узаемадзейныя целы, кола, эліпс, тэарэтычная механіка, каардынаты, паступальны рух, вярчальны рух, кулачок, штурхач.

Агульныя звесткі. Падмуркам для падрыхтоўкі інжынераў механічнага профілю з’яўляецца цыкл дысцыплін: матэматыка, тэарэтычная механіка, механіка матэрыялаў і тэорыя механізмаў і машын. У прыведзеным пераліку самымі запатрабаванымі ў фарміраванні творчага спецыяліста машынабудаўнічага профілю з’яўляюцца тэарэтычная механіка і тэорыя механізмаў і машын. Значныя цяжкасці ў іх засваенні вызначаюцца шэрагам суб’ектыўных і аб’ектыўных фактараў. Адным з іх для вывучэння тэорыі механізмаў і машын з’яўляецца недахоп часу, што адводзіцца вучэбнай праграмай дысцыпліны.

Частковае выйсце з такой сітуацыі нам бачыцца ў мэтанакіраваным вывучэнні папярэдніх дысцыплін, найперш матэматыкі і тэарэтычнай механікі. Так, вывучаючы кінематыку простых рухаў цела, можна шляхам падбору адмысловых заданняў для самастойнай работы падрыхтаваць студэнтаў да ўспрымання кінематыкі кулачковых механізмаў у тэорыі механізмаў і машын. Прыкладам рэалізацыі выкладзенай ідэі прысвячаецца дадзеная распрацоўка. Пры гэтым перавага аддаецца больш перспектыўнаму аналітычнаму метаду даследавання. У працэсе работы выкарыстаны крыніцы [1–3].

Некаторыя геаметрычныя залежнасці паміж вугламі і адрэзкамі ў плоскіх фігурах. У якасці прыкладаў установім такія залежнасці для круга радыуса r і эліпса з паўвосямі a, b, эксцэнтрысітэтам c і фокусамі O,O' (рысунак 1, *а, б*).

Пачнём з *круга*. На яго вертыкальным дыяметры M_0M' на адлегласці e ад цэнтра C адзначаем адвольны пункт O. Прымаем яго за пачатак сістэмы каардынат Oxy. Паралельна да вертыкальнага дыяметра на адлегласці e' ад яго праводзім прамую LL'. Адвольны пункт M на акружнасці злучаем з пунктам O. Вуглы паміж адрэзкамі OM_0, OM_1 і OM абазначаем праз φ_0 і φ. Дугою радыуса OM робім засечку $M(y)$ на вертыкалі LL'. Вырашым наступную задачу: па зададзеных значэннях r, e, e', φ знойдзем адрэзкі $\rho = OM$, $y = O_1M(y)$.

Для гэтага прадоўжым адрэзак MO да перасячэння з акружнасцю ў пункце A. Пункты A і M злучаем з цэнтрам C. З вяршыні C раўнабедранага трохвугольніка AMC апускаем перпендыкуляр CB на яго аснову AM. У атрыманым трохвугольніку BOC вугал BOC роўны $\varphi + \varphi_0$. Абазначым яго праз θ. Тады $BC = e\sin\theta$, $BO = e\cos\theta$. З трохвугольніка BMC знаходзім:

$$BM = \sqrt{r^2 - BC^2} = \sqrt{r^2 - e^2\sin^2\theta} \text{ і } \rho = BM - BO.$$

Канчаткова

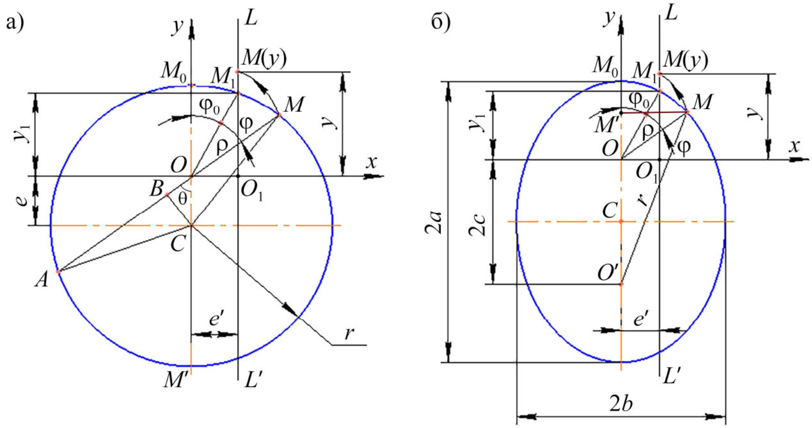
$$\rho = \sqrt{r^2 - e^2\sin^2\theta} - e\cos\theta. \qquad (1)$$

Знаходзім y. З трохвугольніка OO_1M атрымліваем:

$$y = \sqrt{\rho^2 - (e')^2} \text{ ці } y = \sqrt{r^2 - (e')^2 + e^2\cos 2\theta - 2e\cos\theta\sqrt{r^2 - e^2\sin^2\theta}}. \qquad (2)$$

Вугал φ_0 вызначаем з трохвугольніка OM_1O_1, у якім

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = e'/y_0 = e'/(y_1 - e) = e'\Big/\left(\sqrt{r^2 - (e')^2} - e\right).$$



Рысунак 1 – Да ўстанаўлення залежнасцей паміж адрэзкамі і вуглом для кола (a) і эліпса ($б$)

Пераходзім да *эліптычнай фігуры* (рысунак 1, *б*). Яе цэнтр абазначаем літарай C, а фокусы – праз O, O'. Як і для круга, паралельна да вертыкальнай восі сіметрыі на адлегласці e' ад яе праводзім прамую LL'. Затым атрыманы на контуры фігуры пункт M_1 і адвольны на ёй пункт M злучаем з фокусам O. Вуглы паміж адрэзкамі OM_0, OM_1 і $OM = \rho$ абазначаем праз φ_0, φ; прымем $\varphi + \varphi_0 = \theta$, $MO' = r$. Пачатак каардынат змяшчаем у пункце O. Напрамак восей паказаны на рысунку 1, *б*. Засечкай радыуса ρ адзначаем на лініі LL' пункт $M(y)$. Па зададзеных параметрах a, b, e' вызначым адрэзкі $\rho = OM(\varphi)$ і $y = O_1M(y)$.

Для гэтага з трохвугольнікаў $MM'O$ і $MM'O'$ знаходзім: $MM' = \rho \sin\theta$, $M'O = \rho\cos\theta$ і $(MM')^2 + (M'O')^2 = r^2$, дзе $M'O' = 2c + M'O$. Пасля пераўтварэння передапошняй роўнасці і далучэння асноўнай уласцівасці (прыкметы) эліпса $OM + O'M = 2a$ прыходзім да сістэмы двух ураўненняў

$$\rho^2 + 4e^2 + 4e\rho\cos\theta = r^2;$$
$$\rho + r = 2a.$$

Адсюль знаходзім

$$\rho = (a^2 - c^2)\big/(c\cos\theta + a), \tag{3}$$

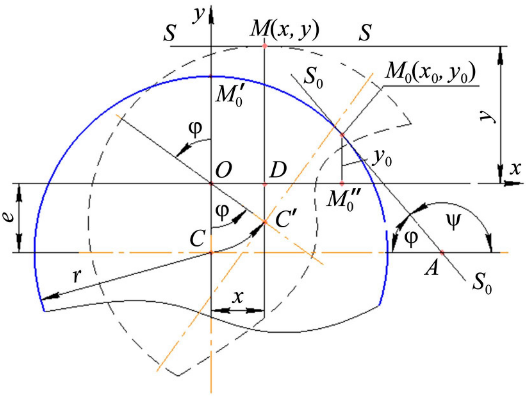
дзе $c^2 = a^2 - b^2$. З трохвугольніка $OO_1M(y)$ атрымліваем:

$$y = \sqrt{\rho^2 - (e')^2}. \tag{4}$$

Вугал φ_0 вызначаецца з залежнасці $\mathrm{tg}\,\varphi_0 = e'/y_0$, дзе

$$y_0 = y_1 - c,\ y_1 = \sqrt{(1 - (e'/b)^2)a^2}\ .$$

Вызначэнне каардынат найвышэйшых пунктаў павернутых фігур. Методыку пошукаў адказу разгледзім на прыкладзе кола радыуса r (рысунак 2). Яго цэнтр абазначым літарай C. У пачатковым становішчы кола паказана на рысунку суцэльнай лініяй. Пачатак нерухомай сістэмы каардынат Oxy сумяшчаем з цэнтрам павароту кола O. Найвышэйшым лічым пункт кола, што знаходзіцца вышэй восі Ox і найбольш аддалены ад яе. У пачатковым становішчы кола такім з'яўляецца пункт M_0'. Павернем кола супраць ходу стрэлкі гадзінніка на вугал φ (на рысунку паказана пункцірам). Цяпер найвышэйшым становіцца пункт $M(x,y)$. Неабходна, ведаючы параметры r, e, φ, вызначыць каардынаты пункта $M(x,y)$.



Рысунак 2 – Да вызначэння пачатковых каардынат x_0, y_0 найвышэйшага пункта

Разгледзім спачатку найбольш агульны спосаб рашэння сфармуляванай задачы. Заўважым, што датычная SS да контура кола ў яго верхнім пункце $M(x,y)$ паралельна да восі Ox. Уяўна павернем пункцірнае кола разам з датычнай на вугал φ па стрэлцы гадзінніка ў зыходнае становішча. Відавочна, што тая ж датычная будзе цяпер утвараць вугал φ з воссю Ox (на рысунку 2 датычная і пункт дотыку абазначаны літарамі S_0S_0 і $M_0(x_0, y_0)$. Знойдзем каардынаты x_0, y_0 у выглядзе функцый вугла φ.

Дапаўняючы φ на 180° вугал пры вяршыне A абазначым праз ψ. З матэматыкі вядома, што $\mathrm{tg}\,\psi$ выражаецца праз вытворную каардынаты y_0: $\mathrm{tg}\,\psi = dy_0/dx_0$. Каб выкарыстаць гэту залежнасць, запішам ураўненне акружнасці ў прынятай сістэме каардынат: $x^2 + (y + e)^2 = r^2$; адсюль

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} - e \quad \text{і} \quad dy/dx = \mathrm{tg}\psi = \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-1/2}(-2x).$$

Для пункта $M_0(x_0, y_0)$ атрымліваем $\mathrm{tg}\,\psi = -\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}}$.

Паколькі $\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}(180° - \psi) = -\mathrm{tg}\psi$, то $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}}$. Калі далей улічыць, што $\sin\varphi = \dfrac{\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}}$, то прыйдзем да выніку

$$x_0 = r\sin\varphi, \quad y_0 = r\cos\varphi - e. \tag{5}$$

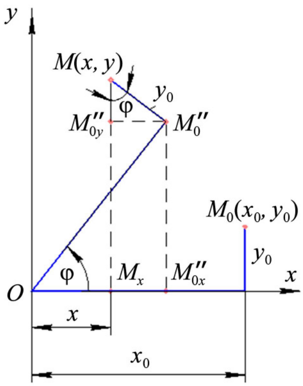
Мы пакуль знайшлі каардынаты x_0, y_0 пункта $M(x,y)$ у яго пачатковым становішчы $M_0(x_0, y_0)$. На рысунку 3 паказаны яго пераход у новае становішча $M(x,y)$ пры павароце кола на вугал φ як паварот ломанай $OM_0'M_0$, узятай з рысунка 2. Як бачым,

$$x = OM''_{0x} - M_x M''_{0x} = x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi,$$

$$y = M_x M''_{0y} + M''_{0y}M = x_0\sin\varphi + y_0\cos\varphi.$$

З улікам значэнняў (5) атрымліваем

$$x = e\sin\varphi, \quad y = r - e\cos\varphi. \tag{6}$$



Рысунак 3 – Да вызначэння каардынат x, y пункта M у павернутым коле

У разгледжаным прыватным выпадку каардынаты x, y можна вызначыць значна прасцей. З рысунка 2 відаць, што пункт $M(x, y)$ у любым становішчы кола знаходзіцца над цэнтрам C' на адлегласці r ад яго. А зрух цэнтра C' можна вызначыць з трохвугольніка $OC'D$, у якім

$$OC' = e, OD = e\sin\varphi, C'D = e\cos\varphi.$$

Прыменім апісаную вышэй методыку для эліптычнай фігуры. Выкарыстаем тыя ж рысункі 2 і 3, захаваўшы прынятыя на іх абазначэнні. Вялікую (вертыкальную) і малую паўвосі абазначым літарамі a, b. Ураўненне эліпса запісваецца ў выглядзе

$$x^2/b^2 + (y + e)^2/a^2 = 1.$$

З яго вызначаем

$$y = (a/b)\left(b^2 - x^2\right)^{1/2} - e.$$

Далей знаходзім $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax}{\sqrt{b^2 - x^2}}$ і $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{ax}{\sqrt{b^2 - x^2}}$. З атрыманых залежнасцей вызначаем каардынаты пункта M_0:

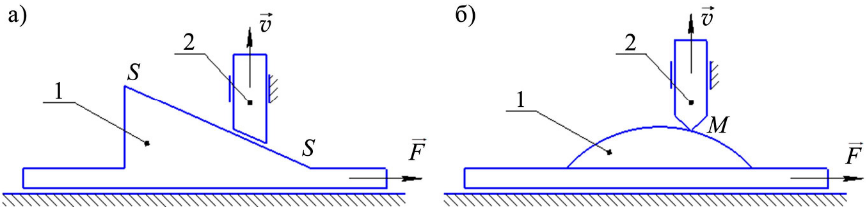
$$x_0 = b^2 \operatorname{tg}\varphi \Big/ \sqrt{b^2 \operatorname{tg}^2\varphi + a^2};\ y_0 = \left(a^2 \Big/ \sqrt{b^2 \operatorname{tg}^2\varphi + a^2}\right) - e. \qquad (7)$$

Каардынаты найвышэйшага пункта $M(x,\ y)$ павернутага эліпса знаходзім паводле атрыманых вышэй з рысунка 3 формул:

$$x = \left(\left((b^2 - a^2) \Big/ \sqrt{b^2 \operatorname{tg}^2\varphi + a^2}\right) + e\right)\sin\varphi;\ y = \left(\sqrt{b^2 \operatorname{tg}^2\varphi + a^2} - e\right)\cos\varphi. \qquad (8)$$

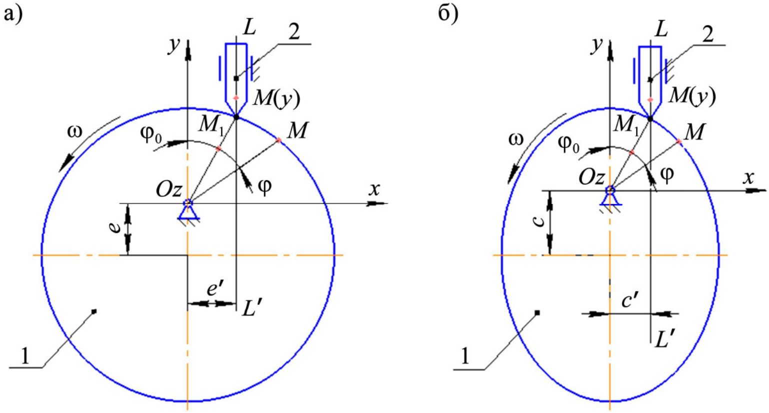
Калі пачатак каардынат O сумясціць з верхнім фокусам эліпса, то ў формулах (8) неабходна прыняць $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Формулы (8) пры $a = b = r$ пераходзяць у формулы (6) для кола.

Даследаванне простых рухаў двух узаемадзейных целаў. Будзем вывучаць рухі целаў, што маюць адну ступень свабоды. *Простымі* ў тэарэтычнай механіцы называюць пастУпальныя і вярчальныя рухі. Узаемадзейныя целы падчас руху застаюцца ў кантакце паміж сабою. На рысунку 4 у кожнай пары абодва целы выконваюць пастУпальныя рухі. Узаемадзеянне можа адбывацца па паверхні S – S (рысунак 4, *а*) або ў пункце M (рысунак 4, *б*). Целы *1* прыводзяцца ў рух знешнімі сіламі. Іх называюць *вядучымі*, а целы *2* – унутранымі сіламі ўзаемадзеяння, што ўзнікаюць у месцах судакранання; гэта *вядзёныя* целы (ці звенні).



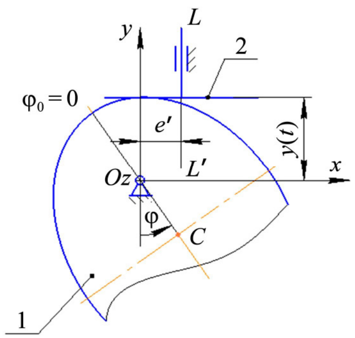
Рысунак 4 – ПастУпальныя рухі ўзаемадзейных целаў з кантактам па плоскасці (*а*) і ў пункце (*б*)

Ніжэй спынімся на дзвюх парах целаў, у якіх вядучыя целы здзяйсняюць вярчальныя рухі, а вядзёныя – пастУпальныя. Скарыстаемся формамі целаў і абазначэннямі пунктаў, паказанымі на рысунку 1. Яны дапоўнены і зноў паказаны на рысунку 5. Восі вярчэння Oz, перпендыкулярныя да плоскасцей целаў *1*, змяшчаем у цэнтрах павароту O. Мяркуем, што знешнія ўздзеянні надаюць ім вярчальныя рухі з вуглавымі скарасцямі $\omega = \text{const}$. Вядзёныя целы *2* прадстаўляем у выглядзе стрыжняў, восі якіх сумяшчаем з лініямі LL', а пункты судакранання ў зыходным становішчы (на пачатку руху) – з пунктамі M_1. Кантакты целаў *2* з целамі *1* забяспечваюцца іх сіламі цяжару альбо з дапамогаю спружын. Апісаныя сістэмы двух целаў у тэорыі механізмаў і машын называюцца *кулачковымі механізмамі*, у якіх звяно *1* – *кулачок*, звяно *2* – *штурхач*. Апошняе атрымала такую назву, бо сваім верхнім канцом «штурхае» нейкі іншы аб'ект, не паказаны на рысунку. Контуры кулачкоў называюць *профілямі*. На рысунку 5 профілямі з'яўляюцца акружнасць і эліпс, а на рысунку 4 – плоскасць і акружнасць. Кулачковыя механізмы служаць для пераўтварэння зададзенага руху вядучага звяна ў неабходны – паступальны ці вярчальны – рух вядзёнага. Патрэбныя скорасці і паскарэнне штурхача дасягаюцца шляхам падбору адпаведнага профілю кулачка.



Рысунак 5 – Механізмы з круглым (*а*) і эліптычным (*б*) кулачкамі

Каб аналітычна знайсці кінематычныя характарыстыкі паступальнага руху целаў *2*, дастаткова, як вядома з курса тэарэтычнай механікі, вывучаць рух якога-небудзь аднаго іх пункта, напрыклад $M(y)$ (рысункі 1, 5). Спачатку для выбранага пункта запісваецца *ўраўненне руху*. У прынятых на рысунках 2 і 5 сістэмах каардынат ураўненнямі руху будуць функцыі $y(t)$, дзе t – час руху. Каб іх знайсці, звернемся да рысункаў 5. Кулачкі *1* пры іх павароце вакол восей Oz сваімі профілямі дзейнічаюць на штурхачы 2, выціскаючы іх уверх. Пасля павароту кулачка на адвольны вугал φ пункт M профіля выходзіць на вось LL' штурхача ў пункт $M(y)$ (гл. рысунак 2); разам з ім сюды падымаецца і вастрыё штурхача. Паколькі пры вярчэнні кулачкоў вуглы φ змяняюцца ($\varphi = \omega t$), то ўраўненнямі руху для штурхачоў на рысунку 5 будуць каардынаты $y(t)$, вызначаемыя па формулах (2), (4). Калі адлегласці e', c' на рысунках 5 прыняць роўнымі нулю, то атрымаем так званыя



Рысунак 6 – Кулачковы механізм з плоскім штурхачом

цэнтральныя кулачковыя механізмы, для якіх $y(t) = \rho(t)$.

У тэхніцы выкарыстоўваюць кулачковыя механізмы з *плоскімі* штурхачамі (рысунак 6), якія маюць форму перавернутай літары *T*. Такія штурхачы прыводзяцца ў рух самымі верхнімі пунктамі M' профілей кулачкоў. Іх рух не залежыць ад становішчаў накіроўваючых LL' адносна восей вярчэння Oz і апісваецца атрыманымі вышэй функцыямі $y(t)$ паводле (6), (8). Зрух e' звычайна прымаюць роўным нулю.

Кінематычныя характарыстыкі руху звенняў кулачковых механізмаў. Ва ўсіх разгледжаных тыпах механізмаў кулачкі выконваюць раўнамерны рух, пры якім $\omega = \text{const}$, $\varphi = \omega t$. Даследаванне скорасці v і паскарэння a руху штурхача выконваецца паводле формул кінематыкі пункта на падставе атрыманых вышэй ураўненняў руху штурхачоў:

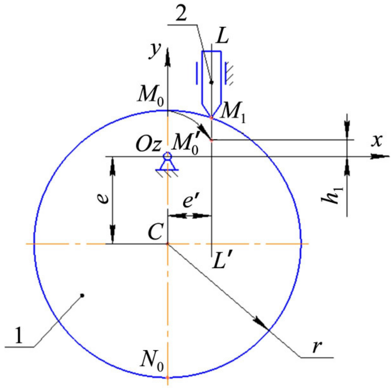
$$v = dy/dt; \;\; a = dv/dt.$$

Рабочы ход штурхача h вылічваецца па формуле: $h = h_2 - h_1$, дзе h_1, h_2 – мінімальная і максімальная вышыня пад’ёму штурхача над воссю Ox (на рысунку 7 вышыня h_2 не паказана). Для вострых штурхачоў

$$h_1 = \sqrt{(OM_0)^2 - (e')^2},$$

$$h_2 = \sqrt{(ON_0)^2 - (e')^2},$$

$$OM_0 = r - e, \;\; ON_0 = r + e, \;\; OM_0 > e'.$$



Рысунак 7 – Да вызначэння ходу штурхача

Пункты M_0', N_0' на верхняй (над Ox) частцы восі LL' знаходзяцца шляхам засечак з цэнтра O радыусамі OM_0, ON_0. Для плоскага штурхача $h_1 = r - e$, $h_2 = r + e$, $h = 2e$. Для эліптычных профілей велічыню r неабходна замяніць на a – вялікую паўвось эліпса.

Заключэнне. У прасцейшых геаметрычных фігурах (кола і эліпс) аналітычна знойдзены залежнасці паміж пэўнымі адрэзкамі і вугламі, якія затым выкарыстаны для даследавання руху звенняў кулачковых механізмаў. Такім чынам, паказана магчымасць у працэсе вывучэння тэарэтычнай механікі падрыхтаваць студэнтаў да ўспрымання складанага раздзела тэорыі механізмаў і машын і, значыць, кампенсаваць дэфіцыт часу, адведзенага на яго вучэбнай праграмай. Змест артыкула можа быць выкарыстаны для распрацоўкі адмысловых індывідуальных заданняў па курсу тэарэтычнай механікі.

СПІС ЛІТАРАТУРЫ

1 **Чигарев, А. В.** Курс теоретической механики: учеб. пособие/ А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. – Минск : Новое знание; М. : ЦУПЛ, 2010. – 397 с.

2 **Хвясько, Г. М.** Курс тэарэтычнай механікі : вуч. дапаможнік / Г. М. Хвясько. – Мінск : БДТУ, 2000. – 354 с.

3 **Борисенко, Л. А.** Теория механизмов, машин и манипуляторов: учеб. пособие / Л. А. Борисенко. – Минск : Новое знание; М. : ИНФРА-М, 2011. – 285 с.

С. И. РУСАН, А. К. ГАВРИЛЕНЯ
Барановичский государственный университет, Барановичи, Беларусь

ЭЛЕМЕНТЫ МЕТОДИКИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТЫХ ДВИЖЕНИЙ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ

В статье изложена методика междисциплинарного взаимодействия в процессе изучения общетехнических дисциплин. На двух конкретных примерах показано, как средствами математики и теоретической механики можно подготовить студентов к восприятию одной из наиболее сложных тем курса теории механизмов и машин – «Кулачковые механизмы».

Ключевые слова: взаимодействующие тела, круг, эллипс, теоретическая механика, координаты, поступательное движение, вращательное движение, кулачок, толкатель.

S. I. RUSAN, A. K. HAURYLENIA
Baranovichi State University, Baranovichi, Belarus

ELEMENTS OF A METHODOLOGY FOR THE ANALYTICAL STUDY OF SIMPLE MOVEMENTS OF THE TWO INTERACTING BODIES

The paper describes the method of the interdisciplinary interaction in the study of general technical disciplines. Two specific examples shown how it is possible to prepare students for perception of one of the most difficult subjects of the mechanisms and machines theory course – «Cam mechanisms» using the means of mathematics and engineering mechanics.

Получено 19.03.2019