

УДК 624.078:539.37

П. Д. СКАЧЁК

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОВ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА ШАРНИРНО ОПИРАЕМУЮ БАЛКУ

Рассматривается решение контактной задачи для шарнирного узла опирания однопролетной балки. Основная цель заключается в определении допустимого эксцентриситета приложения вертикальной нагрузки, при котором контактные напряжения полностью распределены по ширине балки. При этом решаются задачи построения поверхностей и изолиний контактных напряжений в зоне взаимодействия балки и стен, определения области контакта при различных показателях гибкости с построением зависимости величины допустимого эксцентриситета от показателя гибкости, а также построения изолиний вертикальных перемещений стен. Решение выполнено методом Б. Н. Жемочкина. Произведен расчет для случая сосредоточенной вертикальной нагрузки, приложенной в сечении, проходящем через середину пролета балки перпендикулярно ее продольной оси.

Ключевые слова: упругое четвертьпространство, метод Жемочкина, показатель гибкости, контактные напряжения, область контакта, допустимый эксцентриситет.

Введение. Наиболее ответственными участками в зданиях и сооружениях являются узлы взаимодействия одних строительных конструкций с другими. На стадии проектирования устанавливается характер такого взаимодействия, а также решается задача об определении напряженно-деформированного состояния узлов.

Рассматриваемая задача с инженерной точки зрения относится к классу задач расчета конструкций на упругом основании, для описания которых используют модели разного уровня детализации. Бурное развитие методы решения таких задач [1, 2] получили, начиная с середины XIX века. Совершенствование моделей расчета продолжается и по сей день. Огромный вклад в расчет фундаментных конструкций внесли такие ученые, как Александров В. М., Пожарский Д. А., Жемочкин Б. Н., Сеницын А. П., Горбунов-Посадов М. И., Корнев Б. Г., Штаерман И. Я., Терцаги К. и др. [3–6].

С механической точки зрения расчет конструкций на упругом основании представляет собой решение контактной задачи о взаимодействии тел, связанной с решением соответствующего интегрального уравнения. При простых формах контактирующих тел основная трудность заключается в определении ядра интегрального уравнения, которое также называют функцией Грина соприкасающихся тел [7, 8].

В инженерной практике нецелесообразно решать каждую контактную задачу через интегральные уравнения. Это связано, в первую очередь, с трудоемкими математическими вычислениями. Поэтому на практике успешно используют метод Б. Н. Жемочкина [1, 2, 7].

В статье рассматриваются шарнирные узлы опирания балки на стены. От размеров фактической контактной зоны в узле зависят расчетный пролет балки и максимальный изгибающий момент, что, в свою очередь, влияет на дальнейший конструкторский расчет балок. Как правило, нагрузка на балку прикладывается с некоторым эксцентриситетом по отношению к продольной оси балки, вследствие чего может возникнуть зона отрыва части подошвы балки от опоры. Последнее приведет к значительному увеличению контактных напряжений. Поэтому задача об определении допустимых эксцентриситетов имеет важное практическое значение.

Особенностью решения поставленной задачи является то, что стены моделируются в виде упругих четвертьпространств. Функция Грина для данного упругого основания определяется согласно [9].

Постановка задачи. Рассматриваются шарнирные узлы опирания балки на стены (рисунок 1). Задачами расчета являются: определение величины допустимого эксцентриситета приложения вертикальной нагрузки, при котором контактные напряжения полностью распределены по ширине балки, нахождение фактической области контакта, построение поверхности контактных напряжений и вертикальных перемещений, установление зависимости между величиной допустимого эксцентриситета и показателем гибкости.

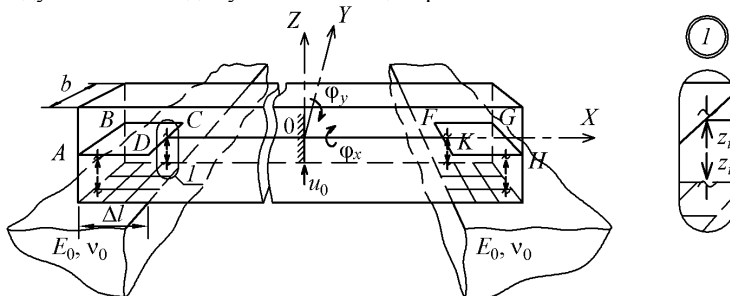


Рисунок 1 – Расчетная схема балки

При расчете вводятся следующие допущения:

- для балки справедливы гипотезы изгиба [10];
- стены представляются в виде упругого четвертьпространства;
- связи Жемочкина односторонние, работающие только на сжатие;
- в зоне контакта касательными напряжениями пренебрегаем.

На расчетной схеме балка изображается ее продольной осью (см. рисунок 1). Вводится система координат. Начало координат совпадает с серединой пролета балки, ось X направляется вдоль продольной оси балки, ось Y – горизонтальная ось, перпендикулярная оси X , ось Z – вертикальная ось, перпендикулярная оси X . В местах контакта со стенами балка описывается срединными плоскостями $ABCD$ и $KFGH$, жесткость которых в направлении оси Y принимается бесконечной. Стена представляется в виде упругого четвертьпространства с модулем деформаций E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 .

Расчет выполняется методом Б. Н. Жемочкина [1, 2]. Для этого область контакта, размеры которой соответствуют глубине опирания балки Δl и ширине балки b , разбивается на $n = n_x \cdot n_y$ прямоугольных участков (участки Жемочкина) размерами $\Delta x \times \Delta y$ (см. рисунки 1, 2). Предполагается, что контакт балки и стен осуществляется через жесткие односторонние связи, устанавливаемые в середине каждого участка. При этом принимается, что силы z_i в связях Жемочкина вызывают равномерное распределение контактных напряжений по участку. В середине пролета балки вводится условное защемление, препятствующее вертикальному перемещению u_0 и угловым перемещениям φ_x, φ_y относительно осей X и Y соответственно. Полученная статически неопределимая система рассчитывается смешанным методом строительной механики [11], где за основные неизвестные принимаются усилия z_i в связях Жемочкина и перемещения во введенном защемлении $u_0, \varphi_x, \varphi_y$.

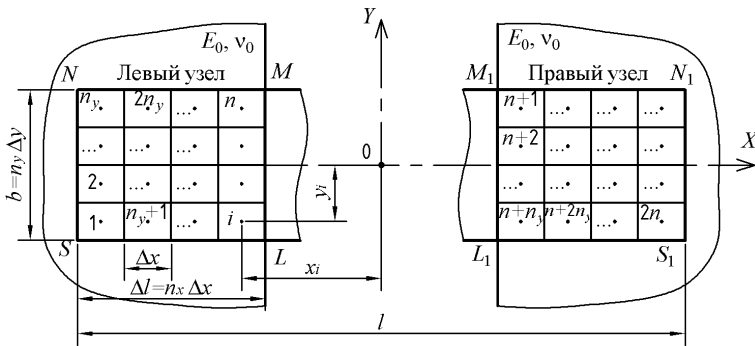


Рисунок 2 – Проекция расчетной схемы на плоскость XOY

По расчетной схеме составляется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) смешанного метода строительной механики

$$\begin{cases} \delta_{1,1} z_1 + \dots + \delta_{1,n} z_n + u_0 + \varphi_x y_1 + \varphi_y x_1 + \Delta_{1,F} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n,1} z_1 + \dots + \delta_{n,n} z_n + u_0 + \varphi_x y_n + \varphi_y x_n + \Delta_{n,F} = 0; \\ \delta_{n+1,n+1} z_{n+1} + \dots + \delta_{n+1,2n} z_{2n} + u_0 + \varphi_x y_{n+1} + \varphi_y x_{n+1} + \Delta_{n+1,F} = 0; \\ \dots \\ \delta_{2n,n+1} z_{n+1} + \dots + \delta_{2n,2n} z_{2n} + u_0 + \varphi_x y_{2n} + \varphi_y x_{2n} + \Delta_{2n,F} = 0; \\ -\sum_{i=1}^{2n} z_i + R_F = 0; -\sum_{i=1}^{2n} z_i y_i + M_{xF} = 0; -\sum_{i=1}^{2n} z_i x_i + M_{yF} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\delta_{i,j}$ – перемещение точки i от действия единичной силы, приложенной в точке j ; z_i – неизвестное усилие в связи i Жемочкина; $u_0, \varphi_x, \varphi_y$ – неизвест-

ные вертикальное и угловые перемещения во введенном защемлении; (x_i, y_i) – координаты центра тяжести участка Жемочкина с номером i ; $\Delta_{i,F}$ – перемещение точки i от действия внешней нагрузки F ; R_F – реакция во введенном защемлении от действия внешней нагрузки F ; M_{xF}, M_{yF} – реактивные моменты относительно осей X и Y от действия внешней нагрузки F , соответственно; n – количество участков Жемочкина в одном узле.

Коэффициенты при неизвестных $\delta_{i,j}$ в уравнениях СЛАУ определяются по формуле

$$\delta_{i,j} = \lambda W_{i,j} + b \Delta l^3 V_{i,j}, \quad (2)$$

где λ – показатель гибкости [1] – безразмерная величина, зависящая от соотношения жесткостей упругого четвертьпространства и опираемой балки (3); $W_{i,j}$ – вертикальное перемещение точки i срединной плоскости балки от действия единичной силы, приложенной в точке j ; b – ширина балки; Δl – глубина опирания балки; $V_{i,j}$ – вертикальное перемещение точки i поверхности упругого четвертьпространства от действия единичной силы, приложенной в точке j .

Показатель гибкости [1]

$$\lambda = \frac{\pi E_0 b \Delta l^3}{(1 - \nu_0^2) EI}, \quad (3)$$

где E_0, ν_0 – модуль деформаций и коэффициент Пуассона упругого четвертьпространства; EI – изгибная жесткость балки.

Перемещения $W_{i,j}$ определяются известными методами строительной механики [12]. При этом следует обратить внимание, что перемещения срединных участков Жемочкина, лежащих на прямой, параллельной оси Y , при условии, что нагрузка действует в плоскости XOZ , равны, поскольку балки в направлении оси Y бесконечно жесткая.

Перемещения точек поверхности упругого четвертьпространства $V_{i,j}$ определяются по формуле (4) [9], записанной в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} V_{i,j} = & \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} + \frac{1 + a_0}{\sqrt{(x_i - x_j + 2m)^2 + (y_i - y_j)^2}} + \\ & + \frac{2a_0}{\pi \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}{2\sqrt{(x_i - x_j + m)m}} + \\ & + a_1 \frac{(x_i - x_j + m)m}{\left(\sqrt{(x_i - x_j + 2m)^2 + (y_i - y_j)^2}\right)^3} + \frac{a_1}{\pi} \left(\frac{\sqrt{(x_i - x_j + m)m}}{\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right)^2} - \right. \end{aligned}$$

$$-2 \frac{(x_i - x_j + m)m}{\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right)^3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}{2\sqrt{(x_i - x_j + m)m}}, \quad (4)$$

где (x_i, y_i) – координаты точки i поверхности упругого четвертьпространства, в которой определяется вертикальное перемещение; (x_j, y_j) – координаты точки j приложения единичной силы; m – расстояние от точки приложения силы до ребра упругого четвертьпространства; $a_0 = \frac{4}{\pi^2 - 4}$, $a_1 = 2,1$ – коэффициенты [9].

Функция (4) $V(M, P)$, где $M(x_i, y_i)$ – точка, в которой определяется вертикальное перемещение, а $P(x_j, y_j)$ – точка приложения единичной силы, обладает особенностью в точке $M = P$, в этой точке $V(M, P)$ принимает бесконечно большие значения. Для расчета вертикальных перемещений $V_{i, j}$, где точка определения перемещений совпадает с точкой приложения силы, вычисляется двойной интеграл (5) по участку Б. Н. Жемочкина

$$v(x, y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} V(M, P) dx dy, \quad (5)$$

где $\Delta x, \Delta y$ – размеры участка Жемочкина; $P(x_j, y_j)$ – точка приложения единичной силы.

Интеграл (5) от первого слагаемого функции (4) вычислен в монографии [7]. Оставшиеся пять слагаемых (4) не интегрируем, поскольку при $M \rightarrow P$ они принимают конечное значение. Для дальнейших вычислений $v(x, y)$ принимается результат интегрирования по [7] совместно с оставшимися пятью слагаемыми формулы (4).

После вычисления коэффициентов $\delta_{i, j}$ и свободных членов, формируется матрица и вектор-столбец свободных членов системы уравнений (1). Далее решается СЛАУ (1) матричным методом. В результате имеем найденный вектор-столбец неизвестных \vec{z} , в котором первые $2n$ компонент – силы в связях Жемочкина, а оставшиеся три компоненты – перемещения во введенном заземлении.

Среди первых $2n$ компонент будут как положительные, так и отрицательные. Первые свидетельствуют о том, что сила в связи Жемочкина соответствует сжатию, вторые – растяжению. Но, согласно введенному допущению, связи работают только на сжатие, поэтому следует «отрицательные» связи исключить из работы. Так как расчетная схема балки статически неопределимая, то выключение из работы одной из связей вызывает перераспределение сил в других связях [12]. Таким образом, итерационный процесс состоит в последовательном «выключении» из работы «отрицательных» связей с

пересчетом вектора-столбца неизвестных \vec{z} на каждой итерации. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока первые $2n$ компонент вектора \vec{z} не примут неотрицательные значения и на границе отрыва не будут тождественно равняться нулю.

При определении допустимого эксцентриситета задаемся начальной координатой $y = 0$ точки приложения сосредоточенной силы. Выполняем весь описанный выше алгоритм. Далее проверяем силы в связях Жемочкина, расположенных в крайнем ряду, параллельном оси X . Если они не равны нулю, то увеличивая координату y на некоторую величину с необходимой степенью точности, проводим весь расчет сначала. Этот процесс продолжается до тех пор, пока силы в означенных связях не будут равны нулю. Соответствующая координата y точки приложения силы и принимается за допустимый эксцентриситет приложения нагрузки.

По схеме нагружения оставшихся связей Жемочкина судят о фактической области контакта балки и стен. Для построения поверхности напряжений равномерно распределяют найденные силы по соответствующему участку.

Численное решение поставленной задачи. Принимаем железобетонную балку БСПб.1 по серии 1.146.2 – 10/93 «Балки стропильные железобетонные для покрытий зданий пролетами 6 и 9 м» вып. 1. Характеристики ее приведены в таблице 1. Допустимый эксцентриситет e определяем для сосредоточенной силы F , которая прикладывается в плоскости YOZ (см. рисунок 1). Количество участков Б. Н. Жемочкина для одного узла в зоне контакта в направлении оси X принимаем $n_x = 10$, а в направлении оси $Y - n_y = 10$.

Таблица 1 – Исходные данные для численного расчета

Параметр, ед. изм.	Значение
Конструктивная длина балки l , м	5,96
Ширина балки b , м	0,2
Высота балки h , м	0,59
Глубина опирания балки Δl , м	0,25
Модуль упругости бетона балки E , ГПа	31
Модуль деформаций упругого четвертьпространства E_0 , ГПа	29
Коэффициент Пуассона упругого четвертьпространства ν_0	0,18
Сосредоточенная сила F , кН	27
Показатель гибкости λ	2,77

При указанных параметрах допустимый эксцентриситет составил $e = 44$ мм. На рисунке 3 изображены растянутые связи Б. Н. Жемочкина (a), изолинии контактных напряжений σ (b) и изолинии вертикальных перемещений w стены (c) для левого узла. Нагрузка прикладывается в плоскости YOZ , проходящей через середину пролета балки, поэтому картина распределения напряжений и перемещений для левого и правого узлов будет симметричной. Из рисунка 3, a видно, что, при приложении нагрузки к точке с координатами $(0; 44)$ мм, связи Жемочкина крайнего ряда, параллельного оси X , имеют нулевые усилия.

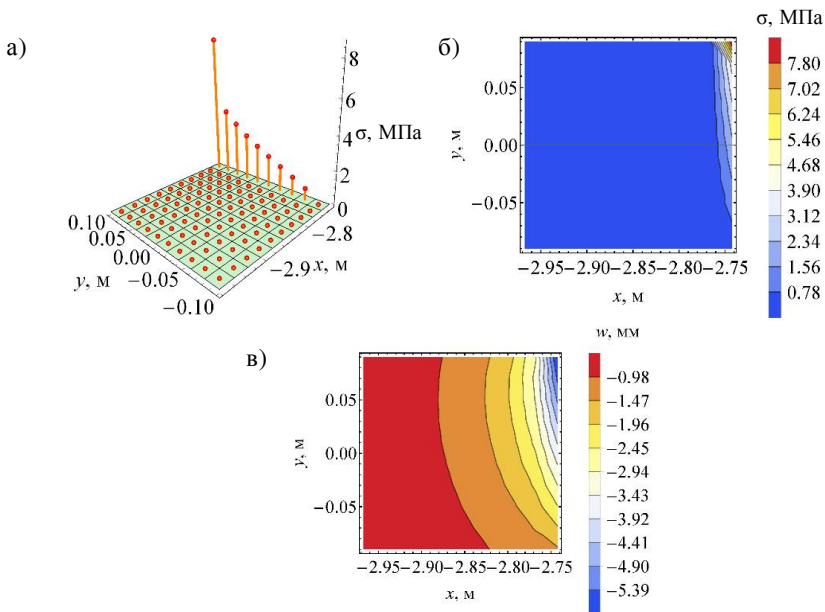


Рисунок 3 – Решение контактной задачи при $\lambda = 2,77$ и $e = 44$ мм:
a – сжатые связи Жемочкина; *б* – изолинии контактных напряжений σ ;
в – изолинии вертикальных перемещений стены w

Контактная область и возникающие в ней контактные напряжения зависят от соотношения жесткостей опираемых конструкций, т. е. от показателя гибкости λ (3). Показателю гибкости $\lambda = 0$ соответствует опирание на стену абсолютно жесткой балки. Следовательно, от показателя гибкости λ зависит и допустимый эксцентриситет приложения вертикальной нагрузки e (рисунок 4).

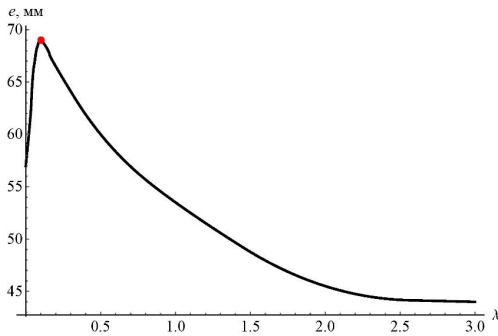


Рисунок 4 – Зависимость эксцентриситета приложения нагрузки от показателя гибкости

При изменении показателя гибкости λ от 0 до 0,1 эксцентриситет e увеличивается от 57 до 69 мм, а при изменении λ от 0,1 до 3 – уменьшается от 69 до 44 мм. Это объясняется тем, что в зависимости от показателя гибкости изменяются характер распределения контактных напряжений по области контакта и ее размеры (рисунки 5, 6).

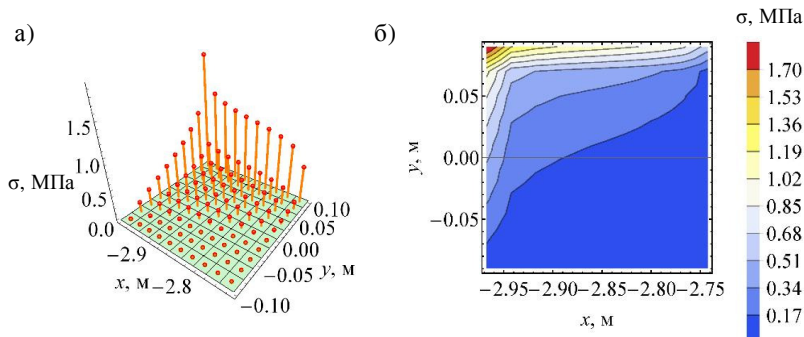


Рисунок 5 – Решение контактной задачи при $\lambda = 0$:
a – сжатые связи Жемочкина; *b* – изолинии контактных напряжений

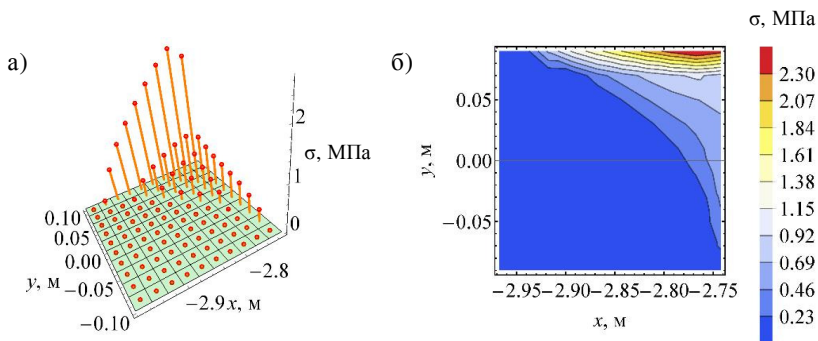


Рисунок 6 – Решение контактной задачи при $\lambda = 0,2$:
a – сжатые связи Жемочкина; *b* – изолинии контактных напряжений

Выводы. 1 Приведен алгоритм решения пространственной контактной задачи шарнирных узлов опирания балки на упругое четвертьпространство.

2 Определен допустимый эксцентриситет e приложения вертикальной сосредоточенной силы F в плоскости YOZ .

3 Установлена зависимость допустимого эксцентриситета e от показателя гибкости λ , причем при малых значениях λ его увеличение ведет к резкому увеличению e , после достижения максимума которого дальнейший рост λ приводит к постепенному уменьшению допустимого эксцентриситета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Стройиздат, 1984. – 680 с.
- 2 Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Госстройиздат, 1962. – 240 с.
- 3 Клепиков, С. Н. Расчет конструкций на упругом основании / С. Н. Клепиков. – Киев : Будівельник, 1967. – 184 с.
- 4 Коренев, Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Коренев. – М. : Госстройиздат, 1954. – 231 с.
- 5 Штаерман, И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М. : Гостехиздат, 1949. – 270 с.
- 6 Terzaghi, K. Dam foundation on sheeted granite / K. Terzaghi // Geotechnique. – 1962. – Vol. 12, No. 3. – P. 199–208.
- 7 Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 128 с.
- 8 Развитие теории контактных задач в СССР / Академия наук СССР, Ин-т проблем механики ; отв. ред. Л. А. Галин. – М. : Наука, 1976. – 496 с.
- 9 Босаков, С. В. Действие сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство / С. В. Босаков // Теоретическая и прикладная механика. – 1988. – Вып. 15. – С. 100–108.
- 10 Александров, А. В. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. – 2-е изд. испр. – М. : Высш. шк., 2000. – 560 с.
- 11 Горбунов-Посадов, М. И. Балки и плиты на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов. – М. : Машстройиздат, 1949. – 238 с.
- 12 Борисевич, А. А. Строительная механика : учеб. пособие для вузов / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2009. – 756 с.

P. D. SKACHOK

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

DEFINITION OF PERMISSIBLE ECCENTRICITIES OF VERTICAL LOAD ON THE HINGED BEAM

There is considered the solution of the contact problem for a hinged node support of a single-span beam. The main purpose is to determine the margin eccentricity of the vertical load application for the contact stresses completely distributed along the beam width. At the same time, there are solved the problems of creating the contact stresses surfaces and contours in the beam-walls interaction zone, determining the contact area for various indicators of flexibility with obtaining the dependence of the admissible eccentricity on the flexibility index, as well as getting isolines of vertical wall movements. The calculation is performed by the B. N. Zhemochkin's method. The calculation is performed for the case of a concentrated vertical load applied to a beam section passing through the beam's mid-span perpendicular to its longitudinal axis.

Получено 15.07.2019