

УДК 534.1

Д. В. ЛЕОНЕНКО

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ИМПУЛЬСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ
НА УПРУГОМ ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА**

Рассмотрены поперечные колебания упругого трехслойного стержня, скрепленного с упругим инерционным основанием, под действием импульсной равномерно распределенной нагрузки. Реакция основания описывается моделью Пастернака. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы Бернулли и Тимошенко. Аналитические решения получены методом Бубнова-Галеркина с использованием обобщенной функции дельта-функции Дирака. Проведен численный анализ полученных решений.

Ключевые слова: трехслойный стержень, инерционное основание Пастернака, колебания, импульсное нагружение.

Введение. Трехслойные конструкции широко используются по многих отраслях промышленности. В работах [1–3] исследовано статическое и динамическое деформирование трехслойных стержней, несвязанных с упругим основанием. Статьи [4–7] посвящены динамическому нагружению слоистых пластин, в том числе и при импульсной нагрузке. Колебания круговых пластин на упругом основании Винклера исследованы в [8–10]. В статьях [11–14] рассмотрено статическое и динамическое деформирование круговых трехслойных пластин, скрепленных с основанием Пастернака.

Ранее в работе [15] исследовались свободные и вынужденные колебания трехслойного стержня, расположенного на безынерционном основании Пастернака. Здесь рассматриваются малые поперечные колебания несимметричного по толщине упругого трехслойного стержня, скрепленного с инерционным основанием Пастернака, возбужденные импульсными поверхностными нагрузками.

Постановка задачи. Для изотропных несжимаемых несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком сжимаемом заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко. На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. Распределенная поверхностная нагрузка $q(x)$ приложена к внешней плоскости первого слоя. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены искомые прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; h_k – толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя); b_0 – ширина стержня.

Уравнения движения получим из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского [16]:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - W - A) dt = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta W - \delta A) dt = 0, \quad (1)$$

где A – потенциальная энергия внешних нагрузок; W – потенциальная энергия деформации; K – кинетическая энергия системы.

При определении потенциальной энергии внешних нагрузок считаем, что к наружной поверхности несущего слоя 1 приложена поверхностная нагрузка $q(r, t)$, к наружной поверхности несущего слоя 2 – реакция основания q_r

$$A = b_0 \int_0^l (q w_1 + q_r w_2) dx. \quad (2)$$

Потенциальная энергия деформации

$$W = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \varepsilon_z^{(3)} dz \right] dx. \quad (3)$$

Кинетическую энергию системы можно записать

$$K = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_0^l \int_{h_k} \left[\frac{\rho_k}{2} \left((\dot{w}^{(k)})^2 + (\dot{u}^{(k)})^2 \right) \right] dz dx, \quad (4)$$

где ρ_k – плотность материала; $w^{(k)}$, $u^{(k)}$ – перемещения точек k -го слоя.

Реакция инерционного основания описывается моделью Пастернака [17]

$$q_r = -\kappa_0 w_2 + t_f w_{2,xx} - m_f \ddot{w}_2, \quad (5)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия основания, формально совпадающий с коэффициентом жесткости модели Винклера; t_f – коэффициент сдвига основания; m_f – массовый член (удельная масса) упругого основания, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, точка над переменной – дифференцирование по времени.

Подставив (2)–(5) в выражение (1), получим систему уравнения движения стержня, связанного с инерционным основанием Пастернака:

$$\begin{aligned} a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 &= 0, \\ -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 &= 0, \\ -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\ + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \dot{w}_1 - m_3 \dot{w}_{1,xx} &= q, \\ -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + (a_{14} - t_f) w_{2,xx} - \\ - a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 + (m_2 + m_f) \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты a_i и m_j введены соотношениями в [1, 2] для стержня, несвязанного с упругим основанием.

Принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие граничные условия в сечениях $x = 0$; l (l – длина стержня) в перемещениях имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (7)$$

Начальные условия движения будут следующие ($t = 0$):

$$u_k(x, 0) = u_{k0}(x); \dot{u}_k(x, 0) = \dot{u}_{k0}(x); w_k(x, 0) = w_{k0}(x); \dot{w}_k(x, 0) = \dot{w}_{k0}(x), \quad (8)$$

где $u_{k0}(x)$, $\dot{u}_{k0}(x)$, $w_{k0}(x)$, $\dot{w}_{k0}(x)$ – заданные начальные перемещения и скорости точек срединных поверхностей несущих слоев, $k = 1, 2$.

Решение начально-краевой задачи. Решение начально-краевой задачи (6)–(8) проводится методом Бубнова – Галеркина. Для этого искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ и нагрузку $q(x, t)$ представляется в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющей принятым граничным условиям (7):

$$u_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m1}(t); \quad u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m2}(t); \quad w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m3}(t);$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m4}(t); \quad q(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} q_m(t), \quad (9)$$

где $q_m(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки в ряд

$$q_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l q(x, t) \sin \frac{\pi m x}{l} dx.$$

Функции $T_{mk}(t)$ (9) представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^4 \delta_{mki} \zeta_{mi} \quad \left(\sum_{i=1}^4 \delta_{mik}^2 = 1 \right),$$

где δ_{mki} – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

При действии импульсной равномерно распределенной нагрузки

$$q(x, t) = q_i \delta(t), \quad q_i = \text{const},$$

функция времени $\zeta_{mi}(t)$ при нулевых начальных условиях (8) принимает вид

$$\zeta_{mi}(t) = \frac{2q_i \delta_{m3i} \sin(\omega_{mi} t)}{\pi m \omega_{mi} \sum_{k=1}^4 M_{mkk} \delta_{mki}^2} (1 - \cos \pi m t).$$

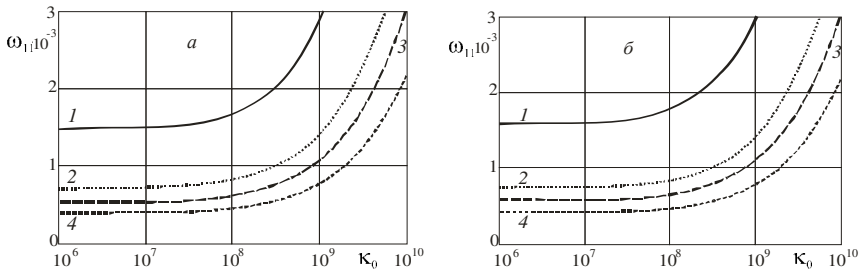
Здесь q_i – мгновенно приложенный импульс в момент времени $t_0 = 0$; ω_{mi} – частоты собственных колебаний системы «стержень-основание»; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака [18], удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, перемещения представляются в виде сумм произведений $\zeta_{mi}(t)$ на соответствующие коэффициенты δ_{mki} и исходные координатные функции, введенные в (9).

Численное исследование. При численном исследовании принимается, что слои стержня выполнены из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т с относительными толщинами: $h_1 = 0,01$, $h_2 = 0,05$, $c = 0,09$. Торцы стержня свободно оперты на неподвижные опоры. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [1].

Рисунок 1 иллюстрирует изменение минимальной частоты собственных колебаний ω_{11} в зависимости от коэффициента жесткости инерционного основания κ_0 (*a* – Винклера, *б* – Пастернака) при различных удельных массах основания: 1 – $m_f = 0$ (безынерционное основание), 2 – $m_f = 500 \text{ кг/м}^2$, 3 – $m_f = 1000 \text{ кг/м}^2$, 4 – $m_f = 2000 \text{ кг/м}^2$. Коэффициент сдвига основания принят $t_f = 4,75 \text{ МПа}\cdot\text{м}$.



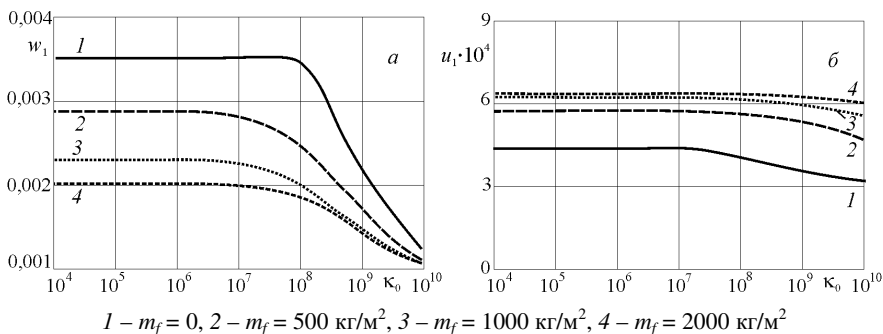
1 – $m_f = 0$, 2 – $m_f = 500 \text{ кг/м}^2$, 3 – $m_f = 1000 \text{ кг/м}^2$, 4 – $m_f = 2000 \text{ кг/м}^2$

Рисунок 1 – Изменение частоты собственных колебаний ω_{11} в зависимости от коэффициента κ_0 (Па/м) при различных коэффициентах m_f на основаниях Винклера (*a*) и Пастернака (*б*)

Из графиков следует, что учет инерции основания (2) приводит к уменьшению частоты более чем в 2 раза по сравнению с безынерционным основанием (1). При дальнейшем увеличении удельной массы основания частоты уменьшаются, причем при основании Пастернака они остаются несколько больше по величине.

На рисунке 2 показано изменение прогиба (*a*) и горизонтального перемещения первого несущего слоя (*б*) в зависимости от коэффициента жесткости инерционного основания Пастернака κ_0 при различной удельной массе основания m_f (кг/м^2): 1 – $m_f = 0$ (безынерционное основание), 2 – $m_f = 500$, 3 – $m_f = 1000$, 4 – $m_f = 2000$ ($t_f = 4,75 \text{ МПа}\cdot\text{м}$). Нагрузка прикладывается импульсно с амплитудой $q_1 = 1 \text{ кПа}\cdot\text{с}$.

С ростом жесткости основания наблюдается существенное уменьшение прогиба. Из графиков следует, что рост инерции основания (2, 3, 4) приводит к уменьшению прогиба на 20–50 % по сравнению с безынерционным основанием (1), горизонтальные перемещения при этом возрастают на 40–50 %.



1 – $m_f = 0$, 2 – $m_f = 500 \text{ кг/м}^2$, 3 – $m_f = 1000 \text{ кг/м}^2$, 4 – $m_f = 2000 \text{ кг/м}^2$
 Рисунок 2 – Изменение максимальных прогиба (а) и горизонтального перемещения (б) в зависимости от коэффициента κ_0 на основании Пастернака

Выводы. Таким образом, в данной работе рассмотрена методика исследования вынужденных колебаний трехслойных стержней, скрепленных с упругим инерционным основанием Пастернака, находящихся под воздействием импульсных нагрузок. Установлено, что минимальные собственные частоты при одинаковой инерционности оснований Винклера и Пастернака различаются незначительно, для оснований высокой жесткости ($\kappa_0 > 10^9$) сдвиговые свойства основания при расчетах можно не учитывать и вести расчеты по более простой модели Винклера. При импульсном нагружении рост инерции основания приводит к существенному уменьшению прогибов и росту горизонтальных перемещений по сравнению с безинерционным основанием.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р–090).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Старовойтов, Э. И.** Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 367 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.

3 **Старовойтов, Э. И.** Упругая трехслойная балка в температурном поле под действием сосредоточенной силы / Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский // Механика. Исследования и инновации. – Вып. 11. – С. 220–229.

4 **Qiu, X.** Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading / X. Qiu, V. S. Deshpande, N. A. Fleck // Journal of Applied Mechanics. – 2004. – Vol. 71, No. 5. – P. 637–645.

5 **Ivañez, I.** The Oblique Impact Response of Composite Sandwich Plates / I. Ivañez, M. M. Moure, S. K. Garcia-Castillo, S. Sanchez-Saez // Composite Structures. – 2015. – Vol. 133. – P. 1127–1136.

6 **Grover, N.** An Inverse Trigonometric Shear Deformation Theory for Supersonic Flutter Characteristics of Multilayered Composite Plates / N. Grover, B. N. Singh, D. K. Maiti // Aerospace Science and Technology. – 2016. – Vol. 52. – P. 41–51.

7 **Паймушин, В. Н.** Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории / В. Н. Паймушин, В. И. Иванов, В. Р. Хусаинов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т. 8, № 4. – С. 543–554.

8 **Starovoitov, E. I.** Resonance Vibrations of a Circular Composite Plates on an Elastic Foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovskii // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, No. 5. – P. 561–570.

9 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // Mechanics of Composite Materials. – 2016. – Vol. 52, No. 5. – P. 665–672.

10 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием импульсных нагрузок / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2016. – Вып. 9. – С. 78–84.

11 **Козел, А. Г.** Перемещения круговой трехслойной пластины на двухпараметрическом основании / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 80–86.

12 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

13 **Старовойтов, Э. И.** Анализ собственных колебаний круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2013. – Т. 18, № 4. – С. 14–17.

14 **Леоненко, Д. В.** Импульсные нагружения круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 155–161.

15 **Леоненко, Д. В.** Колебания трехслойного стержня на основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2018. – Т. 15, № 3. – С. 32–38.

16 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

17 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Стройиздат, 1954. – 56 с.

18 **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

IMPULSE OSCILLATIONS OF THE THREE-LAYER RODS ON THE ELASTIC INERTIAL PASTERNAK'S FOUNDATION

There are considered the transverse oscillations of the elastic three-layer rod, clamped with the elastic inertial foundation, under the impulsive uniformly distributed load action. Reaction of foundation is described on the base of Pasternak's model. To describe the kinematics of a package asymmetric in thickness, the hypotheses of Bernoulli and Timoshenko are adopted. The analytical solutions are obtained by the Bubnov-Galerkin method using the generalized Dirac delta function. The numerical analysis of the obtained solutions is conducted.

Получено 01.12.2019