УДК 539.3

А. Г. КОЗЕЛ
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ

Получены дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, описывающие деформирование несимметричной по толщине упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака. Сформулированы граничные условия. Получено общее аналитическое решение. Исследован случай изгиба пластины под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки.

Ключевые слова: трехслойная круглая пластина, основание Пастернака, перемещения, упругость.

Введение. Создание изделий, отвечающих всем современным требованиям строительства и машиностроения, в настоящее время связано с использованием новых конструкционных решений. В связи с этим значительное распространение получили композитные элементы, имеющие слоистую структуру. Многослойные конструкции, при относительно малой массе, способны обеспечить не только хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства, заданные показатели прочности и жёсткость, но и противостоять ряду других негативных воздействий.

На практике часто возникает необходимость расчета деформирования круглых пластин, взаимодействующих с упругим основанием. Поэтому существует актуальная проблема разработки эффективных методик расчёта напряжённо-деформированного состояния трёхслойных элементов конструкций, связанных с упругим сложным двухпараметрическим основанием.

Статическое и динамическое деформирование трехслойных элементов конструкций исследовалось В. В. Болотиным, А. Г. Горшковым, Э. И. Старовойтовым, Д. В. Леоненко, А. В. Яровой, Ю. М. Плескачевским и многими другими [1–5].

В настоящее время деформирование круглых трехслойных пластин достаточно полно изучено для случая опирания на основание Винклера [6–15]. Российским учёным П. Л. Пастернаком была предложена модель упругого основания, в которой использованы два коэффициента постели, учитывающие его сжимаемость и связность при взаимодействии с однородными элементами конструкций [16]. Цель предлагаемой работы состоит в разработке теории, описывающей деформирование трехслойных пластин, взаимодействующих с основанием Пастернака.

Постановка краевой задачи в перемещениях. Поперечно нагруженная упругая трехслойная круговая пластина покоится на упругом основании (рисунок 1). Для изотропных несущих слоев толщиной h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности нормали и ее перпендикулярности к деформированной срединной поверхности. В несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ. Заполнитель считается «легким», т. е. не учитывается его работа в тангенциальном направлении.

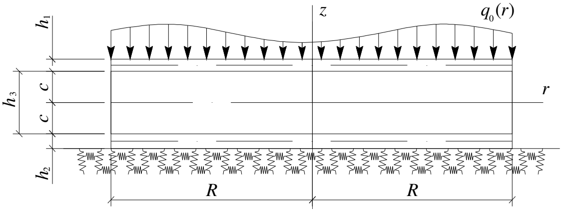

Рисунок 1 – Схема деформирования круговой пластины

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z, связанной со срединной плоскостью заполнителя. На внешние слои стержня действуют распределенная нагрузка $q_0(r)$ и реакция основания, которая описывается моделью Пастернака

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w\,, \tag{1}$$

где κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига, w – прогиб, Δ – оператор Лапласа.

Уравнения равновесия и граничные условия в усилиях для круговой трехслойной пластины получены из вариационного принципа Лагранжа [17]:

$$\begin{gathered} L_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 w,_r) = 0\,,\; L_2(a_2 u + a_4\psi - a_5 w,_r) = 0\,, \\ L_3(a_3 u + a_5\psi - a_6 w,_r) = -(q_0 + q_R)\,, \end{gathered} \tag{2}$$

где L_k – линейные дифференциальные операторы:

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}\,,\; L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}\,;$$

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+\,;\; a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+)\,;\; a_3 = h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+\,;$$

$$a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \tfrac{2}{3}cK_3^+\right);\; a_5 = c\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^2 K_3^+\right];$$

$$a_6 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^3 K_3^+\,;$$

$u(r)$ – радиальное перемещение координатной плоскости; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; q_0 – интенсивность внешней распределенной нагрузки, h_k – толщина k-го слоя, K_k^+ – параметр, определяющий деформативность k-го слоя, который зависит от модулей сдвига и объемной деформации [6, с. 236].

Общее решение краевой задачи. Рассмотрим процедуру решения этой системы уравнений. С помощью первых двух уравнений системы (2) осуществляем замену переменных так, чтобы коэффициенты перед функциями u и ψ в третьем уравнении оказались равными нулю. В результате приходим к дифференциальному уравнению четвертого порядка для определения прогиба $w(x)$:

$$w,_{rrrr}+\frac{2}{r}w,_{rrr}-\frac{1}{r^2}w,_{rr}+\frac{1}{r^3}w,_r-t_f D(w,_{rr}+\frac{1}{r}w,_r)+\kappa_0 Dw=q_0 D\ ,$$

где коэффициент

$$D=\frac{a_1(a_1a_4-a_2^2)}{(a_1a_6-a_3^2)(a_1a_4-a_2^2)-(a_1a_5-a_2a_3)^2}\ .$$

Выполняя замену переменной $x=\kappa r$, получаем

$$w,_{xxxx}+\frac{2}{x}w,_{xxx}-\frac{1}{x^2}w,_{xx}+\frac{1}{x^3}w,_x-2t_0^2(w,_{xx}+\frac{1}{r}w,_x)+w=0$$

или

$$\Delta^2 w-2t_0^2\Delta w+w=0\ , \tag{3}$$

где $2t_0^2=t_{f1}/\kappa^2$, $t_{f1}=t_f D$, $\kappa^4=\kappa_0 D$.

Общий интеграл основного дифференциального уравнения (3) может быть теперь представлен в виде [18]

$$w=w_1+w_2+w_p\ , \tag{4}$$

где w_p – частный интеграл, соответствующий уравнению (3), w_1 и w_2 – фундаментальная система частных интегралов, удовлетворяющая уравнениям

$$w_1,_{xx}+\frac{1}{x}w_1,_x+aw_1=0\ ,\ \ w_2,_{xx}+\frac{1}{x}w_2,_x+\bar{a}w_2=0\ .$$

После ряда преобразований решение сводится к виду [19]:

$$w=B_1J_0(\sqrt{a}x)+B_2H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)+B_3J_0(\sqrt{\bar{a}}x)+B_4H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)+w_p\ . \tag{5}$$

где $J_0(\sqrt{a}x)$ и $J_0(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, аргументов $\sqrt{a}x$ и $\sqrt{\bar{a}}x$; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Ганкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

Так как функции $I_0(\sqrt{a}x)$, $I_0(\sqrt{\bar{a}}x)$, $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)$ являются комплексными, а функция прогибов пластины w должна быть действительной, то постоянные интегрирования B_1, B_2, B_3, B_4 также должны быть комплексными числами. Для того чтобы выразить решение задачи через действительные функции, перепишем интеграл (5) в другой форме:

$$w = C_1 u_0(x) + C_2 v_0(x) + C_3 f_0(x) + C_4 g_0(x) + w_p\,, \tag{6}$$

где введены следующие обозначения:

$$u_0(x) = \operatorname{Re} J_0(\sqrt{a}x) = \frac{J_0(\sqrt{a}x) + J_0(\sqrt{\bar{a}}x)}{2}\,,$$

$$v_0(x) = \operatorname{Im} J_0(\sqrt{\bar{a}}x) = \frac{J_0(\sqrt{a}x) - J_0(\sqrt{\bar{a}}x)}{2i}\,,$$

$$f_0(x) = \operatorname{Re} H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) + H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)}{2}\,,$$

$$g_0(x) = \operatorname{Im} H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) - H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)}{2i}\,.$$

Из выражений (6) следует, что функции $u_0(x)$, $f_0(x)$ представляют собой действительные, а функции $v_0(x)$, $g_0(x)$ – мнимые части функций Бесселя и Ганкеля нулевого порядка. Так как эти функции действительны, то действительными будут и константы интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4, которые определяются из граничных условий.

Полученное в работе общее решение системы дифференциальных уравнений можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины при опирании ее на упругое основание Пастернака.

Случай равномерно распределенной нагрузки. Рассмотрим расположенную на упругом однослойном основании круглую трёхслойную пластину радиуса R, находящуюся под действием равномерно распределённой нагрузки q_0. (рисунок 2). Дифференциальное уравнение изгиба такой пластины записывается следующим образом:

$$\Delta^2 w_1 - 2t_0^2 \Delta w_1 + w_1 = \frac{q_0 D}{\kappa^4} = \frac{q_0}{\kappa_0}\,. \tag{7}$$

Во внешней по отношению к пластине области реакция основания отсутствует. Для этой области справедливо однородное дифференциальное уравнение, которое следует из (6), и в безразмерных координатах имеет вид

$$\Delta w_2 - \alpha_0^2 w_2 = 0, \quad \alpha_0^2 = \frac{\kappa_0}{t_f \kappa^2} = \frac{\sqrt{\kappa_0}}{t_f \sqrt{D}} = \frac{\kappa^2}{t_f D}. \tag{8}$$

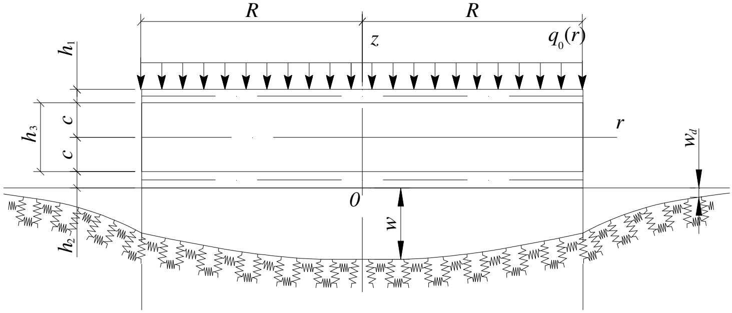

Рисунок 2 – Схема деформирования круговой пластины конечных размеров

Ранее (6) было показано, что общее решение дифференциальных уравнений (7) и (8) представляется выражениями:

$$w_1 = C_1 u_0(x) + C_2 v_0(x) + C_3 f_0(x) + C_4 g_0(x) + \frac{q_0}{\kappa_0}, \tag{9}$$

$$w_2 = C_5 I_0(\alpha_0 x) + C_6 K_0(\alpha_0 x),$$

где q_0/κ_0 – частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения (7); $I_0(\alpha_0 x)$, $K_0(\alpha_0 x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка аргумента $\alpha_0 x$; C_1, …, C_6 – константы интегрирования.

Случай погонной контурной нагрузки. Если круглая трёхслойная пластина находится под действием распределенной контурной нагрузки P_k (рисунок 3), то основное дифференциальное уравнение (7), устанавливающее зависимость между внешней нагрузкой и прогибом пластины, становится однородным.

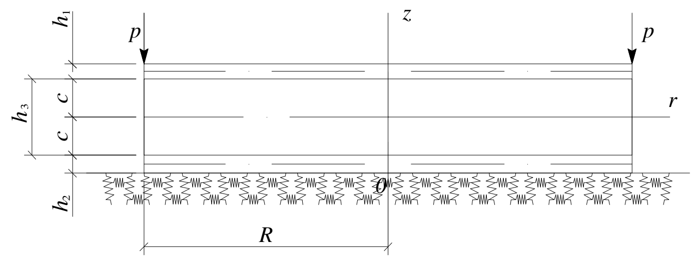

Рисунок 3 – Круглая трёхслойная пластина под действием контурной нагрузки

В этом случае общее решение рассматриваемой задачи может быть записано следующим образом:

$$w_1 = C_1 u_0(x) + C_2 v_0(x) + C_3 f_0(x) + C_4 g_0(x), \tag{10}$$

$$w_2 = C_5 I_0(\alpha_0 x) + C_6 K_0(\alpha_0 x).$$

Таким образом, решение задачи об изгибе трехслойной пластины, свободно лежащей на двухпараметрическом упругом основании, описывается выражением, содержащим шесть постоянных интегрирования. Они находятся, исходя из физического содержания задачи, определяющего те или иные граничные условия.

Заключение. Полученное в работе общее и частные решения могут использоваться для исследования напряженно-деформированного состояния для случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины при ее взаимодействии с упругим основанием Пастернака.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16Р–010).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.

2 **Горшков, А. Г.** Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – М. : Физматлит, 2011. – 416 с.

3 **Горшков, А. Г.** Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.

4 **Starovoitov, E. I.** Circular sandwich plates under local impulsive loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, No. 8. – P. 945–952.

5 **Starovoitov, E. I.** Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 12. – P. 1458–1463.

6 **Плескачевский, Ю. М.** Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М. : Физматлит, 2011. – 560 с.

7 Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А. Г. Горшков [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.

8 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.

9 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман //

Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.

10 **Starovoitov, E. I.** Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.

11 **Starovoitov, E. I.** Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 47, № 5. – P. 580–589.

12 **Leonenko, D. V.** Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.

13 **Starovoitov, E. I.** Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, No. 2. – P. 291–298.

14 **Leonenko, D. V.** Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol. 47, No. 1. – P. 111–118.

15 **Старовойтов, Э. И.** Колебания круглых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием / Э. И. Старовойтов, В. Д. Кубенко, Д. В. Тарлаковский // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2009. – № 2. – С. 16–19.

16 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1954. – 55 с.

17 **Козел, А. Г.** Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1(30). – С. 42–46.

18 **Власов, В. З.** Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – С. 226–235.

19 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2017. – № 32. – С. 235–240.

A. G. KOZEL

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

MOVEMENTS IN THE CIRCULAR THREE-LAYERED PLATE ON THE TWO-PARAMETRICAL FOUNDATION

There were obtained the differential equations of equilibrium in displacements describing the deformation of an asymmetric three-layered circular plate on the Pasternak foundation. The boundary conditions are formulated. A general analytical solution of the boundary value problem is given. The bending of the plate under the action of uniformly distributed surface load is investigated.

Получено 18.09.2017