

НОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК 62.752

С. В. ЕЛИСЕЕВ, доктор технических наук, директор Научно-образовательного центра современных технологий, системного анализа и моделирования, Е. В. КАИМОВ, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра современных технологий, системного анализа и моделирования, Иркутский государственный университет путей сообщения; Н. Ж. КИНАШ, начальник конструкторского отдела Дорожного инженерного технологического центра (ДИТЦ) Московской железной дороги филиала ОАО «РЖД», г. Москва, Россия

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАССЫ В ДИНАМИКЕ ВИБРИРУЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ

Предлагается метод построения математических моделей для механических колебательных систем с дополнительными связями в виде механических цепей, состоящих из стержней с закрепленными на них точечными массами. Такие структуры представляют собой двухповодковые группы Ассура. Особенность подхода заключается в оценке влияния дополнительных связей на вид амплитудно-частотных характеристик в задачах вибрационной защиты технических объектов.

Введение. Механизмы в структурах виброзащитных систем чаще всего рассматриваются в режимах малых колебаний относительно положения статического равновесия или установившегося движения. В таких случаях механизмы реализуют функции наложения дополнительных связей, создающих определенные условия в решении специфических задач динамики машин [1–3]. К их числу могут быть отнесены задачи вибрационной защиты оборудования и приборов [4, 5], динамики робототехнических систем различного назначения [6], транспортных средств [7, 8] и технологических машин [9, 10]. Введение дополнительных масс в структуру механизмов, как проблема динамического уравнивания машин, динамической балансировки оборудования и передач вращения, можно отнести к числу достаточно развитых направлений современного машиноведения, что нашло отражение в работах [11–13]. В меньшей степени внимание уделялось исследованиям тех аспектов проблемы, которые связаны с рассмотрением особенностей динамических свойств механизмов, реализующих функции типовых элементов колебательных механических систем. Чаще всего механизмы в таких случаях используются для решения задач настройки динамического состояния в качестве различного рода регуляторов, компенсаторов, успокоителей или гасителей колебаний. Однако функции механизмов в динамике механических колебательных систем существенно расширяются при детализации рассмотрения особенностей динамических взаимодействий элементов колебательных систем, имеющих вид твердых тел конечных размеров. К примеру, объекты вибрационной защиты и составные части виброзащитных систем могут рассматриваться как рычажные механизмы. При этом динамические взаимодействия в такого рода системах реализуются механизмами других видов, в частности, винтовыми, зубчатыми и др. [14, 15]. Особенности динамических свойств, привносимых рычажными механизмами, нашли отражение в ряде работ, выполненных в последние годы [16–18]. Исследования в рассматриваемом направлении стимулируются вниманием к задачам динамики робототехнических систем в их различных технических реализациях [19, 20].

При всей разработанности подходов в динамике машин и механизмов, в том числе в теории и практике вибрационной защиты, созданию методологической основы детализации представлений о динамических взаимодействиях механизмов определенных видов, как отдельных фрагментов механических колебательных систем, внимание уделялось в значительно меньшей степени.

В предлагаемой статье развиваются методологические основы подходов к построению математических моделей механических колебательных систем, в частности виброзащитных, для которых в структуре системы характерно наличие механизмов как достаточно независимых элементов системы.

I Общие положения. Задачи исследования. В работах [21–23] нашли отражение обобщенные подходы, связанные со структурными интерпретациями механизмов в составе механических колебательных систем с использованием понятий об устройствах с преобразованием движения. По существу, такое определение может быть отнесено к любому механизму, так как задача движения в механической цепи так или иначе связана с преобразованием движения. Устройством для преобразования движения (УПД), в частности, может быть назван несамотормозящийся винтовой механизм с функциями типового дифференцирующего звена второго порядка [4, 5, 15]. На рисунке 1, *a–e* показаны варианты расположения механизмов в базовой расчетной схеме (рисунок 1, *a*), где объект защиты массой M опирается на упругий элемент жесткостью k и обобщенный механизм, обозначенный «УПД». В свою очередь, на рисунке 1, *б* показана одна из интерпретаций УПД в виде винтового механизма [4, 5, 15]. В последующих исследованиях используются и шарнирно-рычажные механизмы.

В системе рассматриваются гармонические возмущения – силовое $Q(t)$ и кинематическое $z(t)$; используется система координат, связанная с неподвижным базисом. Предполагаются малые движения системы относительно положения статического равновесия, силы сопротивления отсутствуют, а система обладает линейными свойствами.

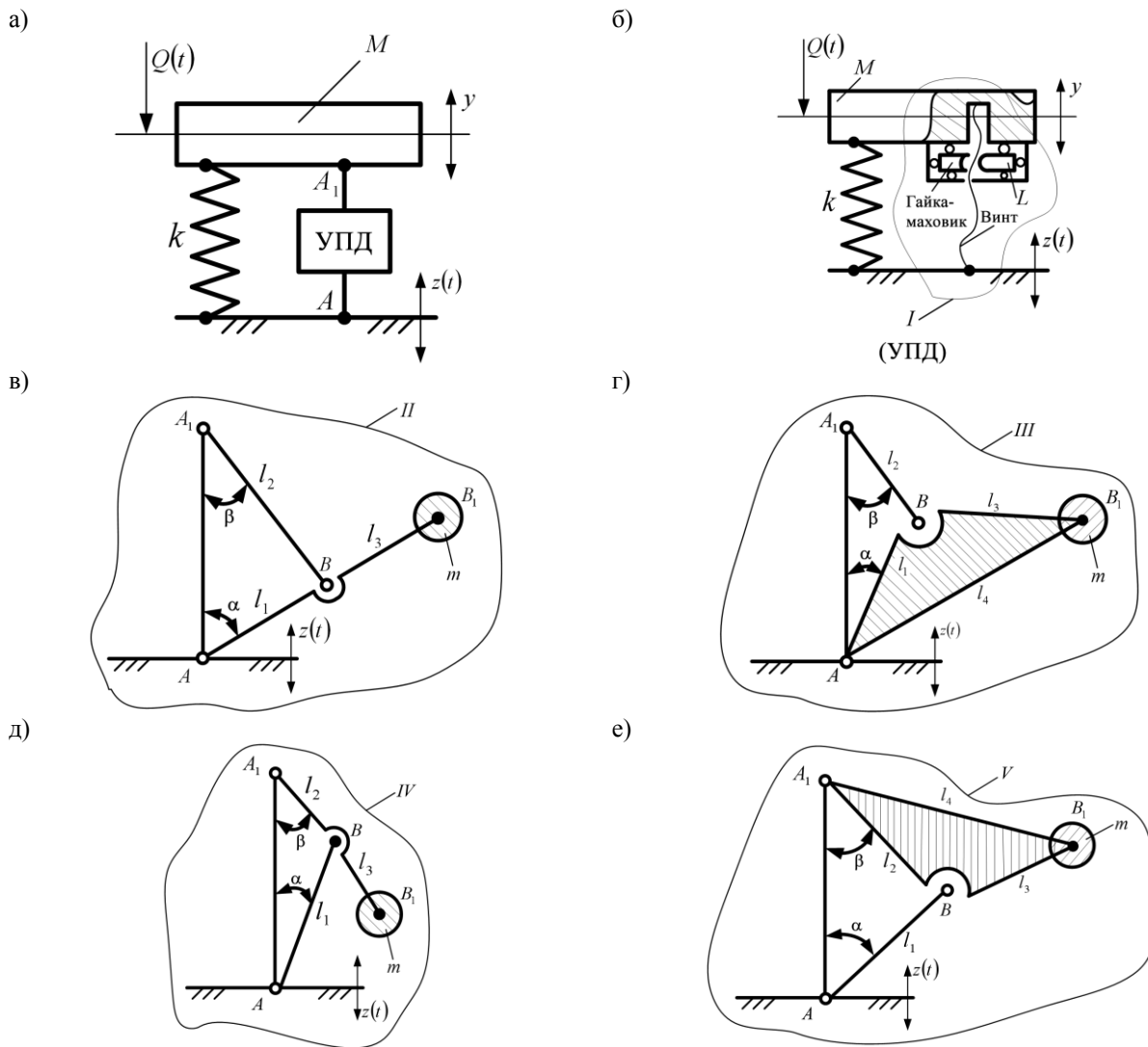


Рисунок 1 – Виброзащитные системы с устройствами для преобразования движения:

a – базовая расчетная схема с опорным упругим элементом и устройством для преобразования движения (УПД); *б* – УПД в виде несамотормозящегося механизма; *в* – УПД в виде шарнирно-рычажного механизма с дополнительной массой и удлинением нижнего рычага; *г* – УПД с изогнутым нижним рычагом; *д* – УПД с дополнительной массой на удлинном верхнем рычаге; *е* – УПД с изогнутым верхним рычагом

Приведенные варианты виброзащитных систем отражают особенности конструктивно-технических форм устройств, формирующих при действии на объект защиты вибраций дополнительные силы инерции. Эти силы реализуют эффекты динамических взаимодействий элементов, что проявляется через изменения частотных характеристик систем и создание определенных динамических режимов, в частности режимов динамического гашения.

В системе (см. рисунок 1, *a, б*) используются опорный упругий элемент жесткостью k , объект защиты массой M , а также учитываются массоинерционные параметры (L и m), привносимые устройствами для преобразования движения.

На рисунке 1, *б* показана виброзащитная система с устройством в виде несамотормозящегося винтового механизма (контур I). При относительном движении объекта защиты M в результате относительных движений элементов формируются упругие и дополнительные инерционные силы. В данном случае L является параметром, характеризующим приведенную массу УПД, зависящую от момента инерции гайки-маховика,

радиуса винта и угла наклона винтовой линии [5]. Особенностью схемы на рисунке 1, *б* является то обстоятельство, что ось вращения гайки-маховика параллельна вертикальной оси движения y объекта защиты. Силы сопротивления в винтовом механизме в данном случае (а также и для последующих случаев на рисунке 1, *в-е*) не рассматриваются.

В [4, 5, 15] динамика механических колебательных систем с УПД по схеме на рисунке 1, *б* достаточно подробно представлена, что, в определенной степени, инициировало внимание к учету динамических особенностей, создаваемых другими механизмами.

Плоские шарнирно-рычажные механизмы (см. рисунок 1, *в-е*) отличаются тем, что оси вращательных шарниров располагаются перпендикулярно оси движения y объекта защиты. В контурах II–V на рисунке 1, *в-е* показаны варианты расположения дополнительных грузов массой m для обеспечения настройки виброзащитных систем простейшими способами, что достигается, например, простым изменением положения дополнительной массы m (меняется l_3).

Кроме того, на схеме рисунка 1, *z, e* показаны варианты использования изогнутых рычагов. Последнее связано с возможностью выноса в зону обслуживания механизмов настройки или перемещения дополнительных масс. Верхние и нижние рычаги на рисунке 1, *в–е* считаются невесомыми жесткими стержнями. Предполагается, что внешние возмущения могут быть силовыми (они приложены непосредственно к объекту защиты *M*) или кинематическими, что связано с колебаниями основания. Рассматриваются гармонические формы вибраций и малые движения всех элементов виброзащитных систем относительно положения статического равновесия.

Приведенные на рисунке 1, *в–е* параметры виброзащитных систем: углы наклона рычагов α и β , длины звеньев l_1 – l_4 , дополнительная масса m определяют конфигурацию виброзащитной системы и, следовательно, её динамические свойства. Предполагается, что при настройке виброзащитной системы названные параметры могут тем или иным способом изменяться.

Особенности динамических свойств виброзащитных систем с устройством для преобразования движения нашли отражение в работах [15, 26–29], вместе с тем ряд вопросов еще не получил детализированной оценки, что, в частности, относится к изучению эффектов, возникающих при различных видах внешнего возмущения.

II Математические модели системы. Вынужденные колебания. В этом плане интерес представляет сравнение форм силового и кинематического внешних возмущений.

1 *Силовое возмущение* ($Q \neq 0, z = 0$). Рассматривается схема на рисунке 1, *в*.

На рисунке 2 точка O_1 является мгновенным центром скоростей. Скорость точки B может быть найдена из соотношения:

$$\dot{y}_B = \dot{y} \cdot a, \quad (1)$$

где

$$a = \frac{i \cdot \cos \beta}{\sin \alpha (\cos \alpha + i \cdot \cos \beta)}. \quad (1')$$

Здесь $i = l_2 / l_1$ – отношение длин верхнего и нижнего рычагов.

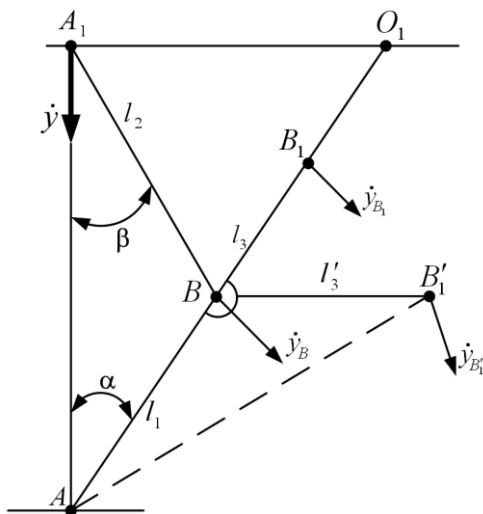


Рисунок 2 – Кинематическая схема системы, представленной на рисунке 1, *в*

Для определения угловой скорости нижнего рычага относительно точки A запишем, что

$$\omega_1 = \frac{\dot{y}_B}{AB} = \frac{\dot{y}_B}{l_1} = \frac{\dot{y} \cdot a}{l_1} = \dot{y} \cdot \frac{i \cdot \cos \beta}{l_1 \cdot \sin \alpha (\cos \alpha + i \cdot \cos \beta)}$$

или

$$\omega_1 = \dot{y} \cdot \frac{i \cdot \cos \beta}{l_1 \sin \alpha (\cos \alpha + i \cdot \cos \beta)}. \quad (2)$$

Скорость точки B_1 в данном случае определится так:

$$\dot{y}_{B_1} = \omega_1 (l_1 + l_3) = \dot{y} \frac{i(l_1 + l_3) \cos \beta}{l_1 \cdot \sin \alpha (\cos \alpha + i \cdot \cos \beta)}. \quad (3)$$

Обозначим

$$b = \frac{i(l_1 + l_3) \cos \beta}{l_1 \cdot \sin \alpha (\cos \alpha + i \cdot \cos \beta)}. \quad (4)$$

Если в схеме используется изогнутый рычаг, как показано на рисунке 2 в связи с положением точки B'_1 , то вектор скорости точки B'_1 будет направлен перпендикулярно AB_1 . Что касается длины AB'_1 , то она может быть определена как длина l_4 из геометрических соотношений

$$|\dot{y}_{B'_1}| = \dot{y} \frac{il_4 \cdot \cos \beta}{l_1 \cdot \sin \alpha (\cos \alpha + i \cdot \cos \beta)}. \quad (5)$$

При наличии изогнутого рычага можно ввести параметр:

$$b_1 = \frac{il_4 \cdot \cos \beta}{l_1 \cdot \sin \alpha (\cos \alpha + i \cdot \cos \beta)}. \quad (6)$$

Можно отметить, что увеличение расстояния l_4 (или l_3) приводит к увеличению параметров b_1 (или b).

Для составления уравнения движения системы, схема которой приведена на рисунке 1, *в*, запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{y})^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y}_{B_1})^2; \quad (7)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k (y - z)^2, \quad (8)$$

найдем:

$$\dot{y} (M + mb_1^2) + ky = Q. \quad (9)$$

Из (9) можно перейти к структурной схеме системы (см. рисунок 3, *a–z*), используя преобразования Лапласа [30].

Таким образом, УПД при силовом возмущении трансформируется в звено с передаточной функцией типового дифференцирующего элемента второго порядка. Способы введения такой дополнительной связи соответствуют правилам преобразований в структурной теории виброзащитных систем [4, 5, 10, 30]. Передаточная функция системы может быть определена из уравнения (9) или непосредственно из структурных схем на рисунке 3, *a–z*:

$$W(p) = \frac{\bar{y}}{Q} = \frac{1}{(M + mb_1^2) \cdot p^2 + k}. \quad (10)$$

Из (10) можно найти частоту собственных колебаний системы:

$$\omega_{\text{соб}}^2 = \frac{k}{M + mb_1^2}. \quad (11)$$

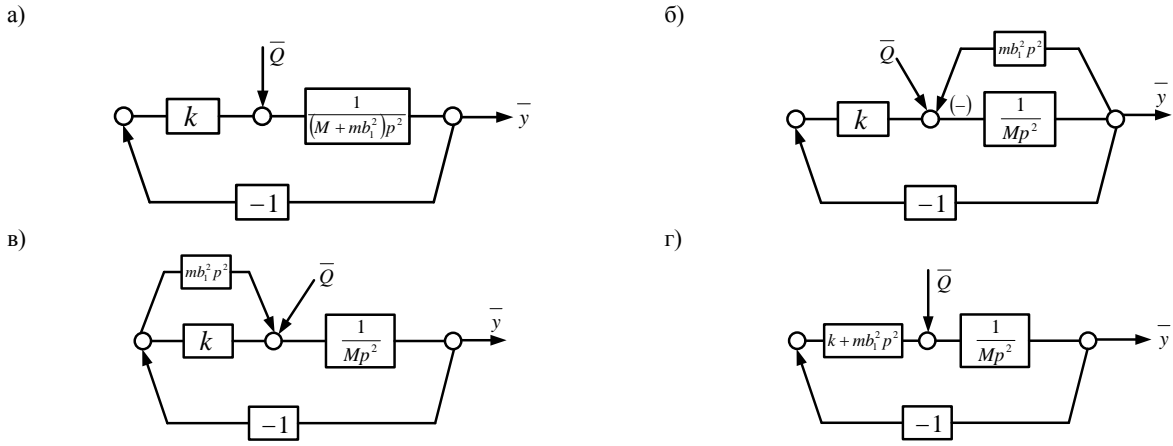


Рисунок 3 – Структурные схемы виброзащитных систем, соответствующих уравнению (9):

a – система обладает приведенной массой $(M + mb_1^2)$; *б* – УПД – является обратной дополнительной связью по ускорению по отношению к объекту защиты; *в* – УПД – как параллельное звено; *г* – упругий элемент и УПД – могут соединяться по правилам параллельного соединения пружин

Из (10) следует, что введение УПД может рассматриваться как способ управления частотой собственных колебаний. Для этих целей могут варьироваться параметры рычагов, дополнительной массы m и углы установки звеньев.

Если угол установки α будет принимать малые значения, то приведенная масса:

$$M_{\text{пр}} = M + mb_1^2 \quad (12)$$

может принимать большие значения за счет возрастания параметра b_1 .

2 *Возмущение, вызываемое движением опорной поверхности.* При кинематическом возмущении исходная

система (см. рисунок 1, *в*) будет вести себя иначе из-за того, что движение основания ($z \neq 0, Q = 0$) формирует дополнительные силы инерции. Эти силы можно рассматривать как силы инерции переносного движения. В частности, скорость точки B будет представлять собой сумму скоростей движения, создаваемых колебаниями основания ($\dot{y}_{B_{\text{пер}}}$), а также перемещения объекта защиты ($\dot{y}_{B_{\text{отн}}}$). Аналогичным образом должны рассматриваться и скорости точек B_1 и B'_1 .

Для кинематических расчетов построим принципиальную схему, как показано на рисунке 4.

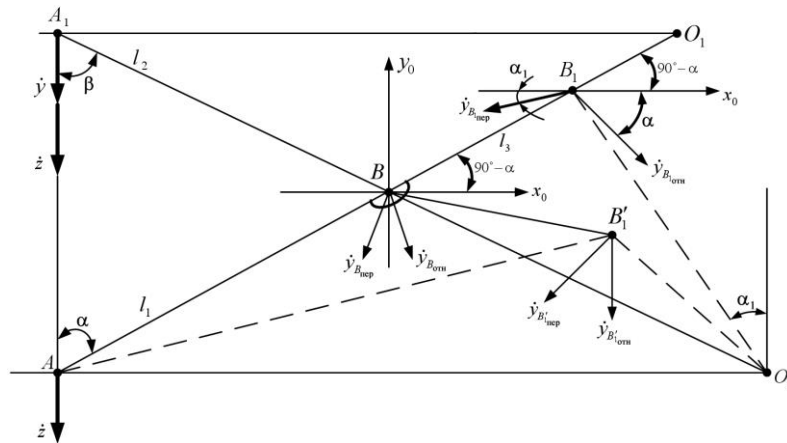


Рисунок 4 – Кинематическая схема для расчета соотношений параметров при кинематическом возмущении

Найдем скорость точки B , при этом:

$$\bar{y}_B = \bar{y}_{B_{\text{отн}}} + \bar{y}_{B_{\text{пер}}} \quad (13)$$

$\dot{y}_{B_{\text{отн}}}$ может быть определена из выражения (1):

$$|\dot{y}_{B_{\text{отн}}}| = ya,$$

при этом a определяется из (1):

$$a = \frac{i \cdot \cos \beta}{\sin \alpha (\cos \alpha + i \cdot \cos \beta)}$$

Вектор скорости $\dot{y}_{B_{\text{отн}}}$ перпендикулярен AO_1 (O_1 – мгновенный центр скоростей при $\dot{z} = 0, \dot{y} \neq 0$).

В свою очередь, вектор скорости $\dot{y}_{B_{\text{пер}}}$ перпендикулярен A_1O_2 (O_2 – мгновенный центр скоростей при $\dot{z} \neq 0, \dot{y} = 0$). Величина $\dot{y}_{B_{\text{пер}}}$ определяется выражением

$$\dot{y}_{B_{\text{пер}}} = \frac{\dot{z} \cdot BO_2}{AO_2} \quad (14)$$

Найдем, что:

$$AO_2 = (l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \beta) \cdot \operatorname{tg} \beta, BO_2 = A_1O_2 - l_2;$$

$$A_1O_2 = \frac{l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \beta}{\cos \beta}, BO_2 = l_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta};$$

$$\dot{y}_{B_{\text{пер}}} = \frac{\dot{z} l_1 \cdot \cos \alpha}{\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \beta (l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \beta)},$$

или

$$\dot{y}_{B_{\text{пер}}} = \frac{\dot{z} l_1 \cdot \cos \alpha}{\sin \beta (l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \beta)} = \frac{\dot{z} \cos \alpha}{\sin \beta (\cos \alpha + i \cos \beta)}. \quad (15)$$

Отметим, что

$$\dot{y}_{B_{\text{пер}}} = \dot{z} a_1, \quad (16)$$

где

$$a_1 = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta (\cos \alpha + i \cos \beta)}. \quad (16')$$

Принимая, что

$$a = \frac{i \cdot \cos \beta}{\sin \alpha (\cos \alpha + i \cos \beta)},$$

то

$$(\cos \alpha + i \cos \beta) = \frac{i \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot a}.$$

С другой стороны,

$$(\cos \alpha + i \cos \beta) = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta \cdot a_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{i \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta \cdot a_1}; \quad \frac{a_1 \cdot i \cdot \cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha \cdot a}{\sin \beta};$$

$$a_1 = a \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\sin \beta \cdot i \cdot \cos \beta}. \quad (17)$$

Теперь можно найти скорость точки B , проектируя соотношения на оси координат y_0 и x_0 в соответствии с рисунком 4 (в проекциях на оси y_0 и x_0):

$$\dot{y}_{B_{x_0}} = \dot{y}_{B_{\text{отн},x_0}} - \dot{y}_{B_{\text{пер},x_0}} = \dot{y}_{B_{\text{отн}}} \cdot \cos \alpha - \dot{y}_{B_{\text{пер}}} \cdot \cos \beta; \quad (18)$$

$$\dot{y}_{B_{y_0}} = -\dot{y}_{B_{\text{отн}}} \cdot \sin \alpha - \dot{y}_{B_{\text{пер}}} \cdot \sin \beta; \quad (19)$$

$$\dot{y}_{B_{\text{пер}}} = a_1 \cdot \dot{z}, \quad \dot{y}_{B_{\text{отн}}} = a \cdot \dot{y}, \quad a = \frac{i \cdot \cos \beta}{\sin \alpha (\cos \alpha + i \cos \beta)};$$

$$a_1 = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta (\cos \alpha + i \cos \beta)}.$$

Вернемся к (18):

$$\dot{y}_{B_{x_0}} = a \cdot \dot{y} \cdot \cos \alpha - a_1 \cdot \dot{z} \cdot \cos \beta. \quad (20)$$

$$\dot{y}_{B_{y_0}} = -a \cdot \dot{y} \cdot \sin \alpha - a_1 \cdot \dot{z} \cdot \sin \beta. \quad (21)$$

Найдем, что

$$(\dot{y}_B)^2 = \sqrt{a^2 (\dot{y})^2 \cos^2 \alpha - 2aa_1 \dot{y} \dot{z} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + a_1^2 (\dot{z})^2 \cos^2 \beta + a^2 (\dot{y})^2 \sin^2 \alpha + 2aa_1 \dot{y} \dot{z} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + a_1^2 (\dot{z})^2 \sin^2 \beta};$$

$$V_B^2 = a^2 (\dot{y})^2 + a_1^2 (\dot{z})^2 + 2aa_1 \dot{y} \dot{z} \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta). \quad (22)$$

Можно принять, что

$$b_2 = \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Тогда

$$(\dot{y}_B)^2 = a^2 (\dot{y})^2 + a_1^2 (\dot{z})^2 + 2aa_1 \dot{y} \dot{z} \cdot b_2. \quad (23)$$

Построим математическую модель системы при кинематическом возмущении. Найдем выражения для кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{y} - \dot{z})^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y}_B)^2 = \frac{1}{2} M (\dot{y} - \dot{z})^2 + \frac{1}{2} m [a^2 (\dot{y})^2 + a_1^2 (\dot{z})^2 + 2aa_1 b_2 \dot{y} \dot{z}]; \quad (24)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k (y - z)^2. \quad (25)$$

Используя уравнения Лагранжа 2-го рода [4, 5], получим

$$W(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{aa_1 b_2 m p^2 + k}{(M + a^2 m) p^2 + k}. \quad (26)$$

Частота собственных колебаний не изменяется по сравнению со случаем силового возмущения; в системе может быть обнаружено два динамических эффекта. Первый – это режим динамического гашения колебаний:

$$\omega_{\text{дин}}^2 = \frac{k}{aa_1 b_2 m}. \quad (27)$$

Второй – при $p \rightarrow \infty$ ($p = j\omega$ – комплексная переменная $j = \sqrt{-1}$ [30])

$$\left| W(p) \right|_{p \rightarrow \infty} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{aa_1 b_2 m}{M + a^2 m}. \quad (28)$$

Вид амплитудно-частотной характеристики будет соответствовать результатам исследований, например, представленных в [5, 10, 30].

Исследуем свойства b_2 , полагая,

$$b_2 = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

если $\alpha = \beta$, то: $b_2 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. При $\alpha = 45^\circ$ $b_2 = 0$. Если $\alpha < 45^\circ$, то $b_2 > 0$. При $\alpha > 45^\circ$ $b_2 < 0$.

Таким образом, механизм с массой в точке B представляет собой дополнительную связь в виде дифференцирующего звена второго порядка. Возможности звена определяются параметром $maa_1 b_2$ дополнительного рассмотрения.

Если точка присоединения дополнительной массы находится в точке B_1 , то скорость точки B_1 определяется по аналогичной формуле (3):

$$\bar{y}_{B_1} = \bar{y}_{B_{\text{отн}}} + \bar{y}_{B_{1\text{пер}}}. \quad (29)$$

Если проектировать (29) на оси y_0 , x_0 , то получим следующие соотношения:

$$\left| \bar{y}_{B_{1\text{отн}}} \right| = \omega_2 \cdot AB_1; \quad \omega_2 = \frac{\dot{y}_{B_{1\text{отн}}}}{l_1}; \quad (30)$$

$$\left| \bar{y}_{B_{1\text{отн}}} \right| = \frac{\dot{y}_{B_{\text{отн}}}}{l_1} (l_1 + l_3); \quad \left| \bar{y}_{B_{1\text{отн},x_0}} \right| = \frac{\dot{y}_{B_{\text{отн}}}}{l_1} (l_1 + l_3) \cos \alpha, \quad (31)$$

где $\bar{y}_{B_{1\text{пер}}}$ – вектор скорости $\perp O_2 B_1$; $\dot{y}_{B_{1\text{пер},x_0}} = \dot{y}_{B_{1\text{пер}}} \cdot \cos \alpha$,

$$\left| \dot{y}_{B_{1\text{пер}}} \right| = \frac{\dot{z} \cdot O_2 B_1}{AO_2}; \quad AO_2 = \left(\frac{l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \beta}{\operatorname{tg} \beta} \right). \quad \text{При этом}$$

величина $O_2 B_1$ определяется по схеме на рисунке 4.

Из выражения (26) следует, что знак b_2 определяет вид амплитудно-частотной характеристики системы, которая определяется параметрами передаточной функции.

Если $b_2 > 0$, то числитель (26) будет положительным при любом значении p . В системе при $p \rightarrow \infty$ наблюдается явление «запирания», которое отмечалось ранее в работах [4, 5, 10, 30]. При этом

$$|W(p)| = \frac{maa_1b_2p^2 + k}{(M + ma^2)p^2 + k} \rightarrow \frac{maa_1}{M + ma^2}. \quad (32)$$

Аналогичная ситуация складывается и при $b_2 < 0$ при $p \rightarrow \infty$. Однако в этом случае в системе будет режим динамического гашения на частоте, определяемой выражением (27).

На рисунке 5 показана зависимость между углами α и β при $b_2 = 0$.

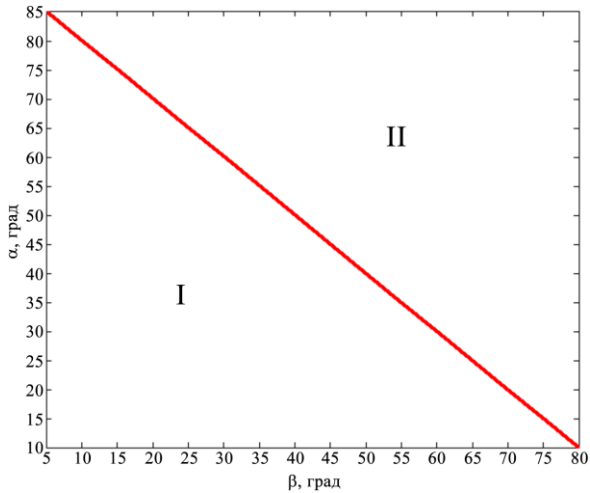


Рисунок 5 – График зависимости α и β при $b_2 = 0$

Особенность зависимости между параметрами α и β на рисунке 5 такова, что график делит пространство параметров α и β на две области, обозначенные символами *I* и *II*. При этом пары значений из области *I* соответствуют $b_2 > 0$, а пары значений α и β из области *II* соответствуют $b_2 < 0$. На самом графике, для которого выполняется условие $b_2 = 0$, пары значений α и β определяют конфигурацию звеньев системы такую, что амплитудно-частотная характеристика системы будет иметь такой же вид, что и при силовом внешнем воздействии.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{y}_{B_{1,0}} &= \dot{y}_{B_{1,отн}} \cdot \cos \alpha - \dot{y}_{B_{1,пер}} \cdot \cos \alpha_1; \\ \dot{y}_{B_{1,0}} &= -\dot{y}_{B_{1,отн}} \cdot \sin \alpha - \dot{y}_{B_{1,пер}} \cdot \sin \alpha_1; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} (\dot{y}_{B_1})^2 &= \left[\dot{y}_{B_{1,отн}} \cdot \cos \alpha - \dot{y}_{B_{1,пер}} \cdot \cos \alpha_1 \right]^2 + \\ &+ \left[\dot{y}_{B_{1,отн}} \cdot \sin \alpha + \dot{y}_{B_{1,пер}} \cdot \sin \alpha_1 \right]^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Введем ряд соотношений:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{B_{1,отн}} &= \frac{\dot{y}_{B_{отн}}}{l_1} (l_1 + l_3); \quad \dot{y}_{B_{отн}} = a \cdot \dot{y}; \\ \dot{y}_{B_{пер}} &= a_1 \cdot \dot{z}; \quad \dot{y}_{B_{пер}} = \frac{\dot{y}_{B_{пер}} \cdot B_1 O_2}{B O_2} = \frac{\dot{z} a_1 \cdot B_1 O_2}{B O_2}; \quad b_3 = \frac{B_1 O_2}{B O_2}; \\ \frac{\dot{z}}{A O_2} &= \frac{\dot{y}_{B_{пер}}}{B O_2}; \quad \dot{y}_{B_{пер}} = \dot{z} \frac{B O_2}{A O_2}; \quad \dot{y}_{B_{пер}} = \dot{z} \cdot b_3 \cdot a_1; \\ B O_2 &= A_1 O_2 - l_2; \quad B O_2 = l_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, \end{aligned} \quad (35)$$

и получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_{B_{пер}} &= z \frac{l_1 \cdot \cos \alpha}{\cos \beta (l_1 \cdot \cos \alpha + l_2 \cdot \cos \beta) \cdot \operatorname{tg} \beta} = \\ &= z \frac{l_1 \cdot \cos \alpha}{\sin \beta \cdot (l_1 \cdot \cos \alpha + l_2 \cdot \cos \beta)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Дальнейший вывод уравнения движения и передаточной функции системы с учетом особенностей расположения дополнительных масс производится аналогичным образом, как и для расположения массы в точке *B*. Возможно рассмотрение и совместного действия дополнительных масс, что проводится по вышеприведенной методике.

Заключение. Введение дополнительных связей, представляющих собой механические цепи в конфигурации механизма с нулевой степенью свободы или двухповодковой группы Ассур, расширяет возможности виброзащитных систем. Последнее достигается выбором конфигурации механической системы, зависящей от углов установки рычагов, а также их длин.

Как показали исследования, выбор параметров может существенно влиять на свойства системы через изменения амплитудно-частотных характеристик.

Существенное значение для определения возможностей системы имеет вид внешнего воздействия. Кинематическое воздействие отличается тем, что формирует дополнительные силы взаимодействия, определяемые переносным движением элементов, создаваемым вибрациями опорной поверхности. При определенных условиях влияние таких эффектов может компенсироваться конфигурацией и особенностями динамических взаимодействий между элементами системы.

При силовом воздействии в системе также возникают дополнительные связи по абсолютному ускорению.

Предлагаемая методика построения математических моделей позволяет определять возможности конструктивно-технических решений, связанных с выносом дополнительных масс в различные зоны, что может быть использовано при решении задач рационального проектирования виброзащитных систем.

Список литературы

- 1 **Левитский, Н. И.** Колебания в механизмах [Текст] / Н. И. Левитский. – М.: Наука, 1988. – 358 с.
- 2 **Рагульскис, К. М.** Механизмы на вибрирующем основании (вопросы динамики устойчивости) [Текст] / К. М. Рагульскис. – Каунас: Ин-т энергетики и электротехники Лит. ССР, 1963. – 240 с.
- 3 **Кобринский, А. Е.** Механизмы с упругими связями. Динамика и устойчивость [Текст] / А. Е. Кобринский. – М.: Наука, 1964. – 362 с.
- 4 Dynamics of mechanical systems with additional ties [Текст] / S. V. Eliseev [et al.]. – Irkutsk: Irkutsk State University, 2006. – 316 p.
5. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов [Текст] / С. В. Елисеев [и др.]. – Иркутск: ИГУ, 2008. – 523 с.
- 6 **Елисеев, С. В.** Упругие колебания промышленных роботов [Текст] / С. В. Елисеев, Н. К. Кузнецов, А. В. Лукьянов. – Новосибирск: Наука, 1990. – 231 с.
7. **Хоменко, А. П.** Динамика и управление в задачах виброзащиты и виброизоляции подвижных объектов [Текст] / А. П. Хоменко. – Иркутск: ИГУ, 2000. – 293 с.
- 8 **Галиев, И. И.** Методы и средства виброзащиты железнодорожных экипажей [Текст] / И. И. Галиев, В. А. Нехаев,

В. А. Николаев. – М. : ГОУ «Учеб.-метод. центр по образованию на ж.-д. транспорте», 2010. – 340 с.

9 **Фролов, К. В.** Прикладная теория виброзащитных систем [Текст] / К. В. Фролов, Ф. А. Фурман. – М. : Машиностроение, 1985. – 286 с.

10 **Белокобыльский, С. В.** Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем [Текст] / С. В. Белокобыльский, С. В. Елисеев, В. Б. Кашуба. – СПб. : Политехника, 2013. – 364 с.

11 **Щепетильников, В. А.** Уравновешивание механизмов [Текст] / В. А. Щепетильников. – М. : Машиностроение, 1982. – 256 с.

12 **Кожевников, С. Н.** Механизм с упругими звеньями [Текст] / С. Н. Кожевников, А. Г. Зиновьев. – М. : Наука, 1966. – 360 с.

13 **Бессонов, А. П.** Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев [Текст] / А. П. Бессонов. – М. : Наука, 1967. – 280 с.

14 Рычажные связи в задачах динамики механических колебательных систем. Теоретические аспекты [Текст] / С. В. Елисеев [и др.]; Ирк. гос. ун-т путей сообщ. – Иркутск, 2009. – 158 с. – Деп. ВИНТИ 27.11.2009 – № 737 – В 2009.

15 **Белокобыльский, С. В.** Динамика механических систем. Рычажные и инерционно-упругие связи [Текст] / С. В. Белокобыльский, С. В. Елисеев, И. С. Ситов. – СПб. : Политехника, 2013. – 319 с.

16 **Иванов, Б. Г.** Разработка методов расчета динамики и прочности агрегатов транспортной техники с рычажно-шарнирными связями : автореф. дис. ... докт. техн. наук / Б. Г. Иванов. – Самара, 2007. – 48 с.

17 **Лаврусь, В. В.** Совершенствование пневматических рычажно-шарнирных систем железнодорожного транспорта: автореф. дис. ... канд. техн. наук / В. В. Лаврусь. – Орел, 2006. – 20 с.

18 **Упырь, Р. Ю.** Динамика механических колебательных систем с учетом пространственных форм соединений элементов звеньев : автореф. дис. ... канд. техн. наук / Р. Ю. Упырь. – Иркутск, 2009. – 19 с.

19 **Яцун, С. Ф.** Моделирование динамических режимов вибрационного робота, перемещающегося по поверхности с вязким сопротивлением / С. Ф. Яцун, Л. Ю. Волкова // Спецтехника и связь : научно-технический журнал. – М. : ООО «Спецтехника и связь», 2012. – № 3. – С. 25–29.

20 **Яцун, С. Ф.** Исследование управляемого движения прыгающего миниробота / С. Ф. Яцун, И. В. Лупехина, А. Н. Рукавицын // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки ; научно-образовательный и прикладной журнал. – Ростов н/Д : ФГАОУ ВПО «Южный федеральный ун-т», 2011. – № 2. – С. 10–15.

21 Упругие элементы в механических системах. Структурные интерпретации / А. П. Хоменко [и др.]; Ирк. гос. ун-т путей сообщ. – Иркутск, 2013. – 460 с. – Библиогр.: 200 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 02.08.13 № 230 – В 2013.

22 **Елисеев, С. В.** Рычажные связи в структурных интерпретациях механических колебательных систем / С. В. Елисеев, Р. С. Большаков // Тр. междунар. науч.-практ. конф. «Транспорт–2013». – Ростов н/Д, 2013. – С. 247–250.

23 **Елисеев, С. В.** Механизмы межпарциальных связей / С. В. Елисеев, А. И. Артюнин, Е. В. Каимов // Материалы XVII международной научно-практической конференции «Решетневские чтения». – Красноярск, 2013. – С. 266–269.

24 **Хоменко, А. П.** Вопросы построения математических моделей механических систем с динамическими гасителями колебаний методом сочленения звеньев / А. П. Хоменко, С. В. Елисеев, А. И. Артюнин // Машиностроение и безопасность жизнедеятельности. – Муром : Муромский ин-т ГОУ ВПО «Владимирский гос. ун-т им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых». – 2013. – № 2(16). – С. 62–76.

25 **Елисеев, С. В.** Механические колебательные системы с поступательными движениями. Возможные формы сочленения звеньев [Электронный ресурс] / С. В. Елисеев, Ю. В. Ермошенко, И. С. Ситов // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. – М. : ФГБОУ ВПО «МГТУ им. Н. Э. Баумана», 2012. – № 12. – С. 35.

26 **Димов, А. В.** Обобщение задач виброзащиты и виброизоляции на основе структурных методов математического моделирования / А. В. Димов, С. В. Елисеев, А. П. Хоменко // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск : ИрГУПС, 2006. – № 2(10). – С. 6–17.

27 **Елисеев, С. В.** Дополнительные связи в крутильных колебательных системах / С. В. Елисеев, М. А. Драч // Вестник Иркутского регионального отделения Академии наук высшей школы РФ. – 2006. – № 2. – С. 71.

28 **Елисеев, С. В.** Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем [Текст] / С. В. Елисеев, Ю. В. Ермошенко. – Иркутск : ИрГУПС, 2012. – 155 с.

29 **Елисеев, С. В.** Некоторые вопросы теории виброизоляции. Обоснование структурных подходов / С. В. Елисеев, С. В. Ковыршин, Е. А. Паршута // Известия Иркутской гос. эконом. акад. – Иркутск : ФГБОУ ВПО «БГУЭП». – 2013. – № 3. – С. 121–127.

30 **Елисеев, С. В.** Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем [Текст] / С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Наука, 2011. – 394 с.

Получено 18.09.2014

S. V. Eliseev, E. V. Kaimov, N. Zh. Kinash. Additional masses in dynamics of vibrating mechanisms.

The method of creation of mathematical models for mechanical oscillatory systems with additional ties in the form of the mechanical chains consisting of rods with a dot masses fixed on them is offered. Such structures represent groups of Assur. Feature of approach consists in an assessment of influence of additional ties by sight amplitude-frequency characteristics in problems of vibration protection of technical objects.