УДК 519.213:62-192

Д. Н. ШЕВЧЕНКО, кандидат технических наук, А. Н. СТАРОВОЙТОВ, кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ДО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО НАСТУПЛЕНИЯ ДВУХ СОБЫТИЙ

Рассмотрена случайная величина, равная времени до последовательного наступления двух событий (отказов). Определена функция распределения этой несобственной случайной величины. Предложенная модель может использоваться при количественном анализе надежности объектов на основе дерева отказов. В дополнение к существующим подходам предложенная модель позволяет учитывать последовательность отказов элементов и других воздействий на объект.

Современные системы управления ответственными технологическими процессами характеризуются большим количеством возможных состояний: работоспособных, неработоспособных (при скрытых отказах), неработоспособных-защитных, неработоспособных-опасных и т. п. А поведение таких систем во многом обусловливается последовательностью произошедших неисправностей и внешних воздействий.

При анализе надежности (в том числе, безопасности функционирования) технических систем с учетом последовательности наступления отказов обычно используются модели двух типов: деревья отказов и марковские модели [1, 2]. При этом марковские модели имеют известные ограничения на длительности пребывания системы в каждом состоянии; а деревья отказов вовсе не рассчитаны на количественный анализ надежности систем [3].

Вместе с тем представляет большой интерес определение функции распределения времени до наступления некоторого события (опасного отказа системы), которое происходит в случае последовательного наступления двух других событий (например, отказов подсистем).

Математическая постановка задачи. Пусть на пространстве элементарных исходов $\Omega = \{\omega = (t_1, t_2) \mid 0 < t_1 < \infty,\ 0 < t_2 < \infty\}$ определены две независимые абсолютно непрерывные положительно распределенные случайные величины $\xi_i(\omega) = t_i$ $(i = 1, 2)$ с функциями распределения

$$F_i(x) = P(\xi_i(\omega) < x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(y)dy,\ i = \overline{1,2}. \tag{1}$$

Определим третью случайную величину

$$\eta(\omega) = \begin{cases} \xi_2(\omega), \text{ если } \xi_1(\omega) < \xi_2(\omega); \\ \infty, \text{ если } \xi_1(\omega) \ge \xi_2(\omega), \end{cases} \tag{2}$$

которая является несобственной случайной величиной, т. к. с ненулевой вероятностью она принимает бесконечное значение, а ее функция распределения не стремится к единице при $x \to \infty$.

Поставим задачу определения функции распределения величины $\eta(\omega)$:

$$F(x) = P(\eta(\omega) < x) = \begin{cases} P(\xi_2(\omega) < x), \text{ если } \xi_1(\omega) < \xi_2(\omega); \\ 0, \text{ если } \xi_1(\omega) \ge \xi_2(\omega). \end{cases} \tag{3}$$

Решение задачи. В дальнейшем указание на элементарный исход будем опускать, т. к. всегда рассматриваем один и тот же исход эксперимента, т.е. $\eta(\omega) = \eta,\ \xi_1(\omega) = \xi_1,\ \xi_2(\omega) = \xi_2$.

Рассмотрим функцию плотности распределения величины η:

$$f_\eta(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{\xi_1 < \xi_2\})}{\Delta x}. \tag{4}$$

Исходы, благоприятные событию $\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{\xi_1 < \xi_2\}$, показаны на рисунке 1 штриховкой.

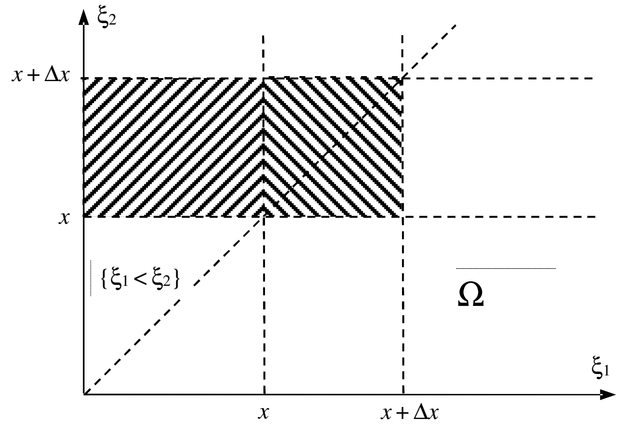

Рисунок 1 – Демонстрация события $\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{\xi_1 < \xi_2\}$

Выразим событие $\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{\xi_1 < \xi_2\}$ через сумму двух несовместных событий (исходы, благоприятные данным событиям, показаны на рисунке 1 различными штриховками):

$$\begin{aligned} &\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{\xi_1 < \xi_2\} = \\ &= (\{\xi_1 < x\} \cap \{x \le \xi_2 < x + \Delta x\}) \cup \\ &\cup (\{x \le \xi_1 < x + \Delta x\} \cap \{\xi_1 \le \xi_2 < x + \Delta x\}) \end{aligned} \tag{5}$$

Учитывая, что величины ξ_1 и ξ_2 независимы,

$$\begin{aligned} f_\eta(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{\xi_1 < \xi_2\})}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\xi_1 < x)\, P(x \le \xi_2 < x + \Delta x)}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x \le \xi_1 < x + \Delta x\} \cap \{\xi_1 \le \xi_2 < x + \Delta x\})}{\Delta x} = \\ &= P(\xi_1 < x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le \xi_2 < x + \Delta x)}{\Delta x} + \end{aligned}$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(\{x\le \xi_1 < x+\Delta x\}\cap\{\xi_1\le \xi_2 < x+\Delta x\})}{\Delta x} =$$
$$= F_1(x)\cdot f_2(x) + \tag{6}$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(\{x\le \xi_1 < x+\Delta x\}\cap\{\xi_1\le \xi_2 < x+\Delta x\})}{\Delta x}.$$

Рассмотрим последнее слагаемое в выражении (6):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(\{x\le \xi_1 < x+\Delta x\}\cap\{\xi_1\le \xi_2 < x+\Delta x\})}{\Delta x}\le$$
$$\le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(\{x\le \xi_1 < x+\Delta x\}\cap\{x\le \xi_2 < x+\Delta x\})}{\Delta x}, \tag{7}$$

т. к. $\{x\le\xi_1<x+\Delta x\}\cap\{\xi_1\le\xi_2<x+\Delta x\}\subset\{x\le\xi_1<x+\Delta x\}\cap\{x\le\xi_2<x+\Delta x\}$ (см. рисунок 1).

События $\{x\le\xi_1<x+\Delta x\}$ и $\{x\le\xi_2<x+\Delta x\}$ независимые, а случайная величина ξ_2 – непрерывная, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(\{x\le \xi_1 < x+\Delta x\}\cap\{x\le \xi_2 < x+\Delta x\})}{\Delta x} =$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le \xi_1 < x+\Delta x)\,P(x\le \xi_2 < x+\Delta x)}{\Delta x} = \tag{8}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le \xi_1 < x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}P(x\le \xi_2 < x+\Delta x) =$$
$$= f_1(x)\cdot 0 = 0.$$

Учитывая выражение (8) и неравенство (7), выражение (6) упрощается. Таким образом, функция плотности распределения величины η определяется выражением

$$f_\eta(x) = F_1(x)\cdot f_2(x), \tag{9}$$

а ее функция распределения (с учетом того, что $\xi_1>0$ и $\xi_2>0$) –

$$F(x)=\int_0^x F_1(y)\,f_2(y)\,dy. \tag{10}$$

Пример. Рассмотрим деревья отказов, использующие причинно-следственную связь «приоритетное И» (рисунок 2). Событие-следствие происходит тогда, когда события-причины происходят в последовательности, указанной на дереве отказов в направлении слева направо. В противном случае событие-следствие никогда не происходит [3, 4].

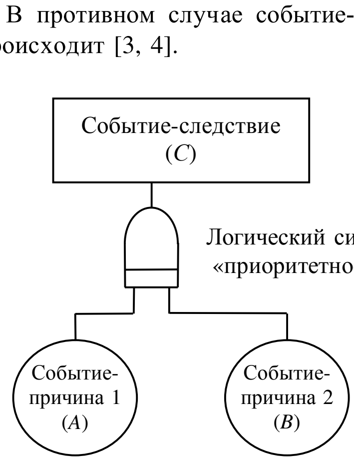

Рисунок 2 – Дерево отказов, использующее причинно-следственную связь «приоритетное И»

Пусть, например, событие $A=${отказ системы пожаротушения}, случайная величина ξ_1 – время до наступления события A подчиняется распределению Вейбулла с функцией

$$F_1(x)=P(\xi_1<x)=\begin{cases}1-\exp\left(-\left(\dfrac{x}{3}\right)^2\right), & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

событие $B=${появление источника возгорания}, ξ_2 – время до наступления события B, распределено равномерно с функцией

$$F_2(x)=P(\xi_2<x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{6}, & 0<x\le 6;\\ 1, & 6>x.\end{cases}$$

Очевидно, что событие $C=${пожар} наступает одновременно с событием B, если перед ним уже произошло A. В противном случае случайное событие C не происходит никогда. Тогда время до наступления события C определяется случайной величиной η (2). Функция распределения величины η, найденная в соответствии с выражением (10) численно в пакете MathCAD, представлена на рисунке 3; ее аналитическое выражение, найденное в пакете FDiTA (рисунки 4 и 5) [4]:

$$F(x)=\int_0^x F_1(y)\,f_2(y)\,dy=$$
$$=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}erf\left(\dfrac{x}{3}\right), & 0<x\le 6;\\ 1-\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}erf(2), & 6<x;\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x/3}\exp(-t^2)\,dt, & 0<x\le 6;\\ 0{,}55896, & 6<x.\end{cases}$$

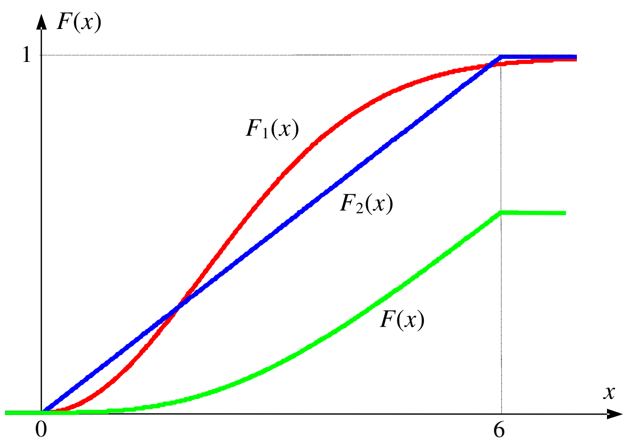

Рисунок 3 – Функции распределения событий-причин и события-следствия

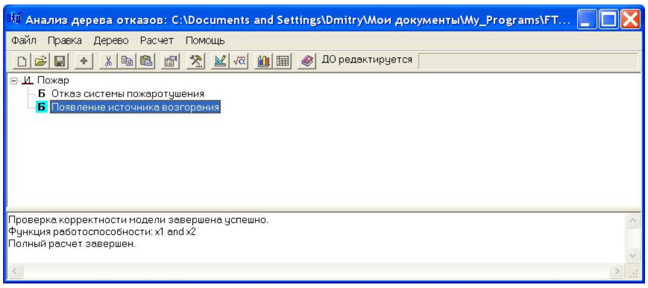

Рисунок 4 – Дерево отказов, использующее причинно-следственную связь «приоритетное И», в пакете FDiTA

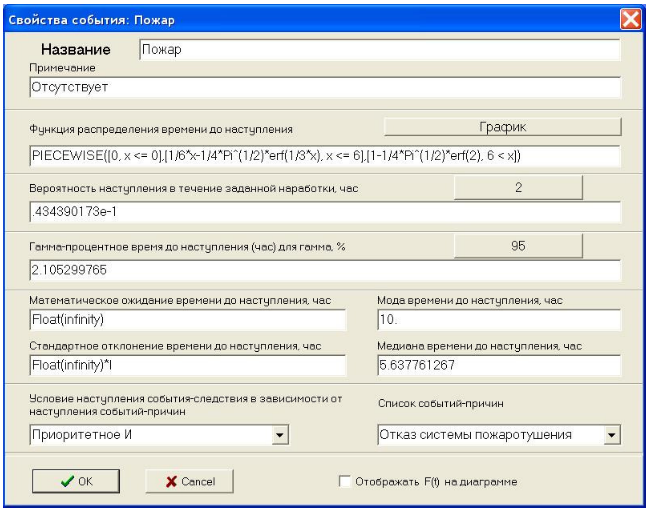

Рисунок 5 – Свойства события-следствия «Пожар» в пакете FDiTA

Заключение. Таким образом функция распределения времени до последовательного наступления двух случайных событий (функции отказа системы) по известным функциям распределения времени до наступления каждого из них.

Подобная функция применима для количественного анализа деревьев отказов с использованием причинно-следственных связей «приоритетное И», которая учитывает последовательность отказов и других воздействий на объект. Тем самым данная модель существенно расширяет возможности количественного анализа надежности объектов по сравнению с действующим стандартом [3].

Предлагаемый подход анализа деревьев отказов автоматизирован и апробирован в компьютерном пакете FDiTA.

Список литературы

1 **Половко, А. М.** Основы теории надежности / А. М. Половко, С. В. Гуров. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.

2 **ГОСТ Р 51901.5–2005.** Издания. Менеджмент риска. Руководство по применению методов анализа надежности. – Введ. 2006–02–01. – М. : Стандартинформ, 2006. – 43 с.

3 **ГОСТ Р 51901.13–2005** (МЭК 61025:1990). Издания. Менеджмент риска. Анализ дерева неисправностей. – Введ. 2005–09–01. – М. : Стандартинформ, 2005. – 11 с.

4 **Шевченко, Д. Н.** Анализ динамического дерева отказов / Д.Н. Шевченко // Электромагнитная совместимость и безопасность на железнодорожном транспорте. – 2011. – № 2. – Днепропетровск : Изд-во ДНУЖТ, 2011. – С. 142–148.

Получено 14.04.2014

D. N. Shevchenko, A. N. Starovoitov. Distribution function of time before consecutive occurrences of two events.

We consider a random variable equal to the time before the occurrence of two consecutive events (failures) takes place. The distribution function of the improper random variable is determined. The proposed model can be used in the quantitative analysis of reliability of objects based on the fault tree. In addition to existing approaches the proposed model takes into account the sequence of component failures and other actions on the objects.