

УДК 539.3

*А. А. ПОДДУБНЫЙ, кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, В. А. ГОРДОН, доктор технических наук, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, Российская Федерация*

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ, ПОГРУЖЕННОГО В УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

Предлагается разработанная методика расчета зависимостей критического значения сжимающей силы для стержня, частично опертого на упругое основание Винклера, от жесткостных свойств стержня и основания, длины опертого участка при различных граничных условиях стержня.

**П**роектирование и строительство современных зданий и сооружений, мостовых переходов во многом зависит от правильного определения качества грунта, выбора оптимальных конструкций, их размеров, а также материалов, из которых они изготовлены.

В различных областях строительства широко распространены конструкции, заглубленные в грунт. Они подвергаются воздействию как вертикальных, так и горизонтальных нагрузок.

**Обоснование научного исследования.** На несущую способность оснований горизонтально нагруженных свайных фундаментов большое влияние оказывают материал, форма и размеры подземной части сваи (стержня), глубина погружения в грунт, характеристики грунта, величина, направления и место приложения горизонтальных сил и т. д.

Существующие до настоящего времени теоретические методы расчета сооружений, опирающихся на свайные основания, очень часто не совпадают с данными практических экспериментов. Численные результаты решения такого типа задач сильно отличаются между собой. Это объясняется, главным образом, слабой изученностью совместной работы конструкции и основания, что может привести к разрушению недостаточно правильно рассчитанных конструкций и в дальнейшем – большим финансовым затратам для устранения последствий катастроф.

Утром 14 августа 2018 года произошла техногенная катастрофа в Италии на расположенном в черте Генуи путепроводе «Мост Моранди» скоростной трассы А10 Генуя – Савона (рисунок 1). Рухнула одна из двух центральных опор виадука, а вместе с ней – 200-метровый пролет, на котором в этот момент находилось более 30 легковых автомобилей и три грузовика. По предварительным данным погибло 43 человека, 4 из них – дети. Обрушение виадука в Генуе представлено на рисунке 1. Министр транспорта Италии считает, что к катастрофе могли привести недостатки в обслуживании моста. Износ объекта – наиболее вероятная причина катастрофы. Мост служил больше 50 лет и подвергался большой транспортной нагрузке, так как автострада ведет в Милан. Можно ли было предотвратить трагедию – сложный вопрос. К сожалению, подобные обрушения происходят нередко и в разных странах. Часто виной всему становятся погодные условия, но иногда причина в ошибках при расчетах и строительстве, а также в обветшалости конструкций.

В связи с этим необходимо совершенствовать существующие методики расчетов конструкций и объек-

тов, а также разрабатывать новые с учетом предыдущих недостатков.



Рисунок 1 – Катастрофа. Мост в Генуе. 2018 г.

Как показал практический анализ возникающих катастроф, важную роль в расчетах играет решение нелинейных задач. В строительной механике физическая нелинейность – это отклонение от закона Гука, геометрическая нелинейность – это отказ от рассмотрения уравнений равновесия по недеформированному состоянию, конструктивная нелинейность – это учет изменения расчетной схемы в процессе деформирования. С учетом вышесказанного предлагается методика расчёта частично погруженного стержня в упругие основания с целью ее дальнейшей апробации, сравнения численных результатов с экспериментальными данными и последующего применения в расчетной практике.

**Постановка задачи.** Расчетная схема стержня, моделирующая частично погруженную сваю, состоящая из двух участков, с указанием осей  $x_i$  и  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) и длины участков  $L_1$  и  $L_2$ , изображена на рисунке 2.

Стержень длиной  $L$  с изгибной жесткостью  $EI$  ( $E$  – модуль упругости материала;  $I$  – минимальный момент инерции сечения) частично оперт на упругое основание Винклера с коэффициентом жесткости  $k = \text{const}$  и нагружен осевой сжимающей силой  $N$ . Наличие упругого основания эквивалентно действию распределенной нагрузки.

$$q(x) = -ky(x),$$

где  $y = y(x)$  – поперечное перемещение оси стержня в сечении  $x$ .

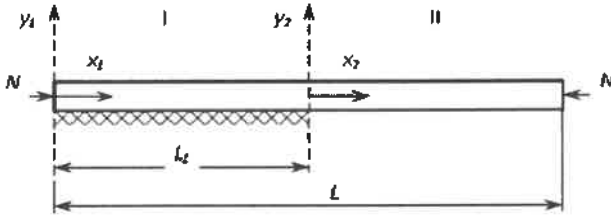


Рисунок 2 – Расчетная схема сжатого стержня, частично опертого на упругое основание

Ставится задача определения критического значения  $N_{кр}$  сжимающей силы при определенных условиях закрепления концов стержня  $x_1 = 0, x_2 = L_2$ .

Уравнения прогибов стержня по участкам  $i = 1, 2$  в безразмерных переменных и параметрах

$$\xi_1 = \frac{x_i}{L}; \quad w_i = \frac{y_i}{L}; \quad \bar{N}^2 = \frac{NL^2}{4EI};$$

$$\alpha^4 = \frac{kL^4}{4EI}; \quad v = \frac{L_1}{L} \quad (i = 1, 2) \quad \text{имеют вид [4–8]}$$

$$w_1^{IV} + 4\bar{N}^2 w_1'' + 4\alpha^4 w_1 = 0. \quad (1)$$

$$w_2^{IV} + 4\bar{N}^2 w_2'' = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) интегрируются независимо, постоянные интегрирования определяются из граничных условий и из условий сопряжения участков.

**Напряженно-деформированное состояние 1-го участка ( $0 \leq \xi_1 \leq v$ ).**

Решение уравнения (1) ищем подстановкой Эйлера:

$$w_1 = Ae^{n\xi_1}, \quad (3)$$

где  $A, n$  – константы, подлежащие определению.

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (1) получим, подставляя представление (3) в уравнение (1):

$$n^4 + 4\bar{N}^2 n^2 + 4\alpha^4 = 0. \quad (4)$$

Подстановкой  $n^2 = m$  биквадратное уравнение (4) приводится к квадратному

$$m^2 + 4\bar{N}^2 m + 4\alpha^4 = 0, \quad (5)$$

корни которого можно представить двойкой в зависимости от соотношения величин  $\bar{N}$  и  $\alpha$ :

$$m_{1,2} = -2\bar{N}^2 \pm 2\sqrt{\bar{N}^2 - \alpha^4}, \quad \text{если } \bar{N} > \alpha. \quad (6)$$

$$m_{1,2} = -2\bar{N}^2 \pm 2i\sqrt{\alpha^4 - \bar{N}^4}, \quad \text{если } \bar{N} < \alpha. \quad (7)$$

Заметим, что если ввести параметр  $N_0 = 2\sqrt{kEI}$ , имеющий размерность силы и потому названный «условной силой», то соотношения между  $\bar{N}$  и  $\alpha$  ( $\bar{N} > \alpha, \bar{N} = \alpha, \bar{N} < \alpha$ ) могут быть заменены аналогичными соотношениями между размерными величинами  $N$  и  $N_0$  ( $N > N_0, N = N_0, N < N_0$ ), так как

$$\bar{N} = \sqrt{\frac{NL^2}{4EI}} \quad \text{и} \quad \alpha = \sqrt{\frac{N_0 L^2}{4EI}}.$$

Корни  $m_{1,2}$  вида (6) используются, если  $\bar{N} > \alpha$ .

При этом корни характеристического уравнения (4) будут чисто мнимыми:

$$m_{1,2} = \pm ic, \quad m_{3,4} = \pm id, \quad (8)$$

где  $c = \sqrt{\bar{N}^2 + \alpha^2} + \sqrt{\bar{N}^2 - \alpha^2}, \quad d = \sqrt{\bar{N}^2 + \alpha^2} - \sqrt{\bar{N}^2 - \alpha^2}$ .

Функция прогибов (3) при этом принимает вид

$$w_1 = A_1 \cos c\xi_1 + A_2 \sin c\xi_1 + A_3 \cos d\xi_1 + A_4 \sin d\xi_1. \quad (9)$$

Корни  $m_{1,2}$  вида (7) используются, если  $\bar{N} < \alpha$ . В этом случае корни уравнения (4) становятся комплексными:

$$m_{1,2,3,4} = \pm a \pm ib, \quad (10)$$

где  $a = \sqrt{L^2 - \bar{N}^2}, \quad b = \sqrt{\alpha^2 + \bar{N}^2}$ .

Функция прогибов (3) принимает вид

$$w_1 = A_1 \operatorname{ch} a\xi_1 \cos b\xi_1 + A_2 \operatorname{sh} a\xi_1 \cos b\xi_1 + A_3 \operatorname{ch} a\xi_1 \sin b\xi_1 + A_4 \operatorname{sh} a\xi_1 \sin b\xi_1. \quad (11)$$

И, наконец, при  $\bar{N} = \alpha$  получаем из (6) или (7) двукратные корни уравнения (4):

$$m_{1,2} = ib, \quad m_{3,4} = -ib, \quad (12)$$

и функцию прогибов вида

$$w_1 = (A_1 + A_2 \xi_1) \cos b\xi_1 + (A_3 + A_4 \xi_1) \sin b\xi_1. \quad (13)$$

Постоянные интегрирования  $A_i (i=1+4)$  дифференциального уравнения (1) удобно выразить через начальные параметры  $w_{01} = w_1(0), w'_{01} = w'_1(0), w''_{01} = w''_1(0), w'''_{01} = w'''_1(0)$ . Процедуру преобразования коэффициентов функций (9), (11), (13) покажем на примере функции (9) ( $\bar{N} > \alpha$ ).

Дифференцируя функцию (9) трижды по  $\xi_1$ , получим безразмерные функции углов поворота поперечного сечения  $w'_1(\xi_1)$ , изгибающего момента  $w''_1(\xi_1)$ , поперечной силы  $w'''_1(\xi_1)$ :

$$\begin{aligned} w'_1 &= c(-A_1 \sin c\xi_1 + A_2 \cos c\xi_1) + d(-A_3 \sin d\xi_1 + A_4 \cos d\xi_1); \\ w''_1 &= c^2(-A_1 \cos c\xi_1 - A_2 \sin c\xi_1) + d^2(-A_3 \cos d\xi_1 - A_4 \sin d\xi_1); \\ w'''_1 &= c^3(A_1 \sin c\xi_1 - A_2 \cos c\xi_1) + d^3(A_3 \sin d\xi_1 - A_4 \cos d\xi_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Введем вектор состояния  $\bar{w}_1$  в произвольном сечении  $\xi_1$ :

$$\bar{w}_1 = \{ w_1(\xi_1) \quad w'_1(\xi_1) \quad w''_1(\xi_1) \quad w'''_1(\xi_1) \}^T,$$

вектор постоянных интегрирования

$$\bar{A} = \{ A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \}^T$$

и функциональную матрицу  $M(\xi_1)$ , полученную при дифференцировании функции (9),

$$M_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \cos c\xi_1 & \sin c\xi_1 & \cos d\xi_1 & \sin d\xi_1 \\ -c \sin c\xi_1 & c \cos c\xi_1 & -d \sin d\xi_1 & d \cos d\xi_1 \\ -c^2 \cos c\xi_1 & -c^2 \sin c\xi_1 & -d^2 \cos d\xi_1 & -d^2 \sin d\xi_1 \\ c^3 \sin c\xi_1 & -c^3 \cos c\xi_1 & d^3 \sin d\xi_1 & -d^3 \cos d\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Теперь систему уравнений (9), (14) можно представить матричным уравнением

$$\bar{w}_1 = M\bar{A}. \quad (15)$$

Вычисляя значения функций (9) и (14) в начале координат 1-го участка  $\xi_1 = 0$ , получим матричное уравнение, связывающее начальные параметры 1-го участка с постоянными интегрированиями  $A_i$ :

$$\bar{w}_{01} = L\bar{A}, \quad \bar{A} = L^{-1}\bar{w}_{01}, \quad (16)$$

где  $\bar{w}_{01} = \{ w_{01} \quad w'_{01} \quad w''_{01} \quad w'''_{01} \}$  – вектор начальных параметров 1-го участка.

$$L_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ -c^2 & 0 & -d^2 & 0 \\ 0 & -c^3 & 0 & -d^3 \end{pmatrix}; \quad L_{4 \times 4}^{-1} = \frac{1}{cd(d^2 - c^2)} \begin{pmatrix} cd^3 & 0 & cd & 0 \\ 0 & d^3 & 0 & d \\ -c^3 d & 0 & -cd & 0 \\ 0 & -c^3 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Подставляя вектор  $\bar{a}$  из (16) в уравнение (15), получим матричное уравнение

$$\bar{w}_1 = \Phi_1(\xi_1) \bar{w}_{01}, \quad (17)$$

где матрица  $\Phi_1 = ML^{-1}$  характеризует влияние начальных параметров на состояние произвольного сечения  $\xi_1$  1-го участка. Элементами матрицы

$\Phi_1 = \{\phi_{ij}\}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) являются функции

$$\phi_{11} = \frac{d^2 \cos c\xi_1 - c^2 \cos d\xi_1}{d^2 - c^2}; \quad \phi_{12} = \frac{d^3 \sin \xi_1 - c^3 \sin d\xi_1}{cd(d^2 - c^2)};$$

$$\phi_{13} = \frac{\cos c\xi_1 - \cos d\xi_1}{d^2 - c^2}; \quad \phi_{14} = \frac{d \sin c\xi_1 - c \sin d\xi_1}{cd(d^2 - c^2)};$$

$$\phi_{21} = -(cd)^2 \phi_{14}; \quad \phi_{22} = \phi_{11}; \quad \phi_{23} = \frac{d \sin d\xi_1 - c \sin c\xi_1}{d^2 - c^2};$$

$$\phi_{24} = \phi_{13};$$

$$\phi_{31} = -(cd)^2 \phi_{13}; \quad \phi_{32} = \phi_{21}; \quad \phi_{33} = \frac{d^2 \cos d\xi_1 - c^2 \cos c\xi_1}{d^2 - c^2};$$

$$\phi_{34} = \phi_{13};$$

$$\phi_{41} = -(cd)^2 \phi_{23}; \quad \phi_{42} = \phi_{31}; \quad \phi_{43} = \frac{c^3 \sin c\xi_1 - d^3 \sin d\xi_1}{d^2 - c^2};$$

$$\phi_{44} = \phi_{33}.$$

Применяя аналогичную процедуру к функциям (11) и (13), получим соответственно матричные уравнения

$$\bar{w}_1 = \chi_1(\xi_1) \bar{w}_{01}, \quad (18)$$

$$\bar{w}_1 = \psi_1(\xi_1) \bar{w}_{01}. \quad (19)$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние 1-го участка описывается одним из уравнений (17)–(19).

В конце 1-го участка при  $\xi_1 = v$  векторы состояния принимают значения  $\bar{w}_1(v) = \Phi_1(v) \bar{w}_{01}$ , либо  $\bar{w}_1(v) = \chi_1(v) \bar{w}_{01}$ , либо  $\bar{w}_1 = \psi_1(\xi_1) \bar{w}_{01}$ .

Напряженно-деформированное состояние 2-го участка ( $0 \leq \xi_2 \leq 1 - v$ ) имеет следующее решение:

$$w_2 = Ae^{n\xi_2}.$$

Тогда (2), получим характеристическое уравнение

$$n^4 + 4\bar{N}^2 n^2 = 0,$$

которое имеет четыре корня: двукратный корень  $n_{1,2} = 0$  и чисто мнимые корни  $n_{3,4} = \pm 2i\bar{N}$ . Тогда общее решение уравнения (2) принимает вид

$$w_2 = A_1 \sin 2\bar{N}\xi_2 + A_2 \cos 2\bar{N}\xi_2 + A_3 \xi_2 + A_4.$$

Заменяя константы  $A_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) начальными параметрами 2-го участка  $w_{20} = w_2(0)$ ,  $w'_{20} = w'_2(0)$ ,  $w''_{20} = w''_2(0)$ ,  $w'''_{20} = w'''_2(0)$ , выразим вектор состояния  $\bar{w}_2(\xi_2)$  в произвольном сечении  $\xi_2$  через вектор начальных параметров этого участка  $\bar{w}_{20}$

$$\bar{w}_2 = K(\xi_2) \bar{w}_{20}, \quad (20)$$

где  $\bar{w}_2 = \{w_2(\xi_2) \ w'_2(\xi_2) \ w''_2(\xi_2) \ w'''_2(\xi_2)\}$ ,

где  $\bar{w}_{20} = \{w_{20} \ w'_{20} \ w''_{20} \ w'''_{20}\}$ ;

$K_{4 \times 4}(\xi_2) = \{\alpha_{ij}\}$  – матрица влияния 2-го участка с элементами

$$\alpha_{11} = 1; \quad \alpha_{12} = \xi_2; \quad \alpha_{13} = \frac{\sin^2 \bar{N}\xi_2}{2\bar{N}^2}; \quad \alpha_{14} = \frac{\alpha_{12} - \alpha_{23}}{4\bar{N}^2};$$

$$\alpha_{21} = 0; \quad \alpha_{22} = 1; \quad \alpha_{23} = \frac{\sin 2\bar{N}\xi_2}{2\bar{N}}; \quad \alpha_{24} = \alpha_{13};$$

$$\alpha_{31} = 0; \quad \alpha_{32} = 0; \quad \alpha_{33} = \cos 2\bar{N}\xi_2; \quad \alpha_{34} = \alpha_{23};$$

$$\alpha_{41} = 0; \quad \alpha_{42} = 0; \quad \alpha_{43} = -2\bar{N} \sin 2\bar{N}\xi_2; \quad \alpha_{44} = \alpha_{33}.$$

Условием сопряжения участков стержня служит равенство векторов состояния в сечении, являющемся одновременно концевым 1-го участка и начальным – 2-го, то есть

$$\bar{w}_1(v) = \bar{w}_2(0). \quad (21)$$

Состояние в начальном сечении 2-го участка определяется вектором (20) при  $\xi_2 = 0$ . Учитывая, что матрица  $K(0)$  единичная, из (20) следует, что

$$\bar{w}_2(0) = \bar{w}_{20}.$$

Подставляя (21) в уравнения (17)–(19), получим связь между начальными параметрами участков для соответствующих вариантов представления корней характеристического уравнения (4):

$$\bar{w}_{20} = \Phi_1(v) \bar{w}_{01}, \quad \bar{N} > \alpha;$$

$$\bar{w}_{20} = \chi_1(v) \bar{w}_{01}, \quad \bar{N} < \alpha; \quad (22)$$

$$\bar{w}_{20} = \psi_1(v) \bar{w}_{01}, \quad \bar{N} = \alpha.$$

Уравнения связи начальных параметров (22) позволяют выразить состояние произвольного сечения любого участка через единичный набор начальных параметров 1-го участка:

– в случае  $\bar{N} > \alpha$  ( $N > N_0$ )

$$\bar{w}_1(\xi_1) = \Phi_1(\xi_1) \bar{w}_{01}; \quad (23)$$

$$\bar{w}_2(\xi_2) = K(\xi_2) \Phi_1(v) \bar{w}_{01} = \Phi_2(\xi_2) \bar{w}_{01}; \quad \Phi_2(\xi_2) = \{t_{ij}\};$$

– в случае  $\bar{N} < \alpha$  ( $N < N_0$ )

$$\bar{w}_1(\xi_1) = \chi_1(\xi_1) \bar{w}_{01}; \quad (24)$$

$$\bar{w}_2(\xi_2) = K(\xi_2) \chi_1(v) \bar{w}_{01} = \chi_2(\xi_2) \bar{w}_{01}; \quad \chi_2(\xi_2) = \{s_{ij}\};$$

– в случае  $\bar{N} = \alpha$  ( $N = N_0$ )

$$\bar{w}_1(\xi_1) = \psi_1(\xi_1) \bar{w}_{01}; \quad (25)$$

$$\bar{w}_2(\xi_2) = K(\xi_2) \psi_1(v) \bar{w}_{01} = \psi_2(\xi_2) \bar{w}_{01}; \quad \psi_2(\xi_2) = \{r_{ij}\}.$$

Для дальнейших построений необходимо определиться с условиями закрепления концов стержня.

**Критическая сила сжатого стержня с шарнирным закреплением концов.** Граничные условия в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0; & \quad w_{10} = w''_{10} = 0; \\ \xi_2 = 1 - v; & \quad w_2(1 - v) = w'_2(1 - v) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для определения критической силы вначале принимаем условие, согласно которому сжимающая стержень сила  $N$  равна «условной силе»  $N_0$ . Тогда для 1-го участка получим вариант (12), (13), (19), а для стержня в целом – вариант (25). Причем при  $\bar{N} = \alpha$  из соотно-

шения (10) следует  $\bar{N} = \frac{b}{\sqrt{2}}$ . Запишем второе уравнение

(25) для сечения  $\xi_2 = 1 - \nu$  в развернутом виде с учетом граничных условий (26)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ w_2'(1-\nu) \\ 0 \\ w_2''(1-\nu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}(1-\nu, \nu) & r_{12}(1-\nu, \nu) & r_{13}(1-\nu, \nu) & r_{14}(1-\nu, \nu) \\ r_{21}(1-\nu, \nu) & r_{22}(1-\nu, \nu) & r_{23}(1-\nu, \nu) & r_{24}(1-\nu, \nu) \\ r_{31}(1-\nu, \nu) & r_{32}(1-\nu, \nu) & r_{33}(1-\nu, \nu) & r_{34}(1-\nu, \nu) \\ r_{41}(1-\nu, \nu) & r_{42}(1-\nu, \nu) & r_{43}(1-\nu, \nu) & r_{44}(1-\nu, \nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_0' \\ 0 \\ w_0'' \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных начальных параметров  $w_0'$  и  $w_0''$

$$\begin{cases} r_{12}(1-\nu, \nu)w_0' + r_{14}(1-\nu, \nu)w_0'' = 0 \\ r_{32}(1-\nu, \nu)w_0' + r_{34}(1-\nu, \nu)w_0'' = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Приравняв определитель матрицы, составленной из коэффициентов системы (27), нулю, получим трансцендентное уравнение, минимальный положительный корень которого является критической силой заданного стержня при относительной длине части, контактирующей с упругим основанием, равной  $\nu$ :

$$r_{12}(1-\nu, \nu)r_{34}(1-\nu, \nu) - r_{14}(1-\nu, \nu)r_{32}(1-\nu, \nu) = 0. \quad (28)$$

Решение уравнения (28) при заданном  $\nu$  дает ряд значений параметра  $b_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ), каждому значению  $b_n$  соответствует безразмерный параметр  $\bar{N}_n$  (или  $\alpha_n$ ):

$$\bar{N}_n = \alpha_n = \frac{b_n}{\sqrt{2}}, \quad (29)$$

выражая жесткость основания  $k$  через «условную силу»  $N_0$ , получим

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N_0}{N_{крn}}}, \quad (30)$$

где  $N_{крn} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$  – критическая сила такого же, но свободного стержня.

Исключая из (29) и (30)  $\alpha_n$  и учитывая исходное предположение, что критическая сила стержня равна «условной силе», получим

$$N_{кр} = N_0 = \frac{2b_1^2}{\pi^2} N_{крn}. \quad (31)$$

Последнее равенство следует трактовать следующим образом: если «условная сила»  $N_0$  стержня с характеристиками  $E, I, L$ , поддерживаемого частично на относительной длине  $\nu$  упругим основанием с коэффициентом жесткости  $k$ , закрепленного шарнирно по концам, равна следующей величине:

$$N_0 = \frac{2b_1^2(\nu)}{\pi^2} N_{крn},$$

то и критическая сила такого стержня будет такой же,

$$N_{кр} = \frac{2b_1^2(\nu)}{\pi^2} N_{крn}.$$

При иных параметрах стержня и основания, дающих «условную силу»,

$$N_0 \neq \frac{2b_1^2(\nu)}{\pi^2} N_{крn},$$

расчет критической силы производится по вариантам либо (8), (9), (23), либо (10), (11), (24), в зависимости от того, в какую сторону  $N_0$  отклоняется от числа

$$\frac{2b_1^2(\nu)}{\pi^2} N_{крn}.$$

**Вывод.** Разработанная методика расчета критической силы сжатого стержня, частично опертого на упругое основание Винклера, отличается от известных методик [1–5] тем, что оценивает величину «условной силы» в долях известной критической силы такого же, но свободного (без основания) стержня. Это позволяет, определив коэффициент  $\frac{2b_1^2(\nu)}{\pi^2} N_{крn}$ , характеризующий

данную систему «стержень – основание», обоснованно выбрать одну из трех функций прогибов (форм потери устойчивости) и далее искать критическую силу на базе этих функций.

Кроме того, использование начальных параметров в разработанной методике позволяет эффективно применять ее для стержней и (или) оснований, состоящих из произвольного числа кусочно-непрерывных участков.

#### Список литературы

- 1 Поддубный, А. А. Теоретическое и экспериментальное определение перемещений трехслойной балки при неполном контакте с упругим основанием / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Мир транспорта и технологических машин. – 2015. – № 3(50). – С. 256–262.
- 2 Яровая, А. В. Деформирование упругой трехслойной балки, частично опертой на упругое основание, под действием равномерно распределенной нагрузки / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Теоретическая и прикладная механика. – 2016. – № 31. – С. 242–246.
- 3 Kraav, T. Buckling of beams and columns on elastic foundation / T. Kraav, J. Lellep // Proc. 2nd Intern. conf. on Optimization and Analysis of Structures : Tartu, Estonia, 2013. – P. 52–58.
- 4 Aristizabal-Ochoa, J. D. Stability of slender columns on an elastic foundations with generalised end conditions / J. D. Aristizabal-Ochoa // Ingenieria e Investigation. – Vol. 33, No. 3. – 2013. – P. 34–40.
- 5 Shatri, V. Analysis of buckling of piles fully embedded in ground according to finite element method / V. Shatri, L. Bozo, B. Shefkiu, B. Shatri // Intern. J. of Current Engineering and Technology. – Vol. 4, No. 1. – 2014. – P. 201–205.

Получено 05.05.2019

**A. A. Poddubny, V. A. Gordon.** Method of calculating the critical force of a compressed rod immersed in an elastic base.

The developed method of calculating the dependence of the critical value of the compressive force for the rod, partially supported on the elastic base of the Winkler, on the stiffness properties of the rod and the base, the length of the feathered section under different boundary conditions of the rod.