МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Высшая математика»

С. А. САФОНОВ, Д. Н. СИМОНЕНКО

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие

Часть II

ВЕКТОРЫ

Гомель 2013

УДК 512.64 (075.8)
ББК 22.143
С21

Р е ц е н з е н т – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» С. *А. Дудко* (УО «БелГУТ»).

Сафонов, С. А.

С21 Линейная алгебра : учеб.-метод. пособие : в 3 ч. / С. А. Сафонов, Д. Н. Симоненко; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2012. – Ч. 2 : Векторы. – 37 с.
ISBN 978-985-554-152-4 (ч. 2)

В первой части пособия (Гомель, 2012) были изложены основы линейной алгебры, введены понятия матрицы, определителя, указаны их свойства. Разобраны методы решения систем линейных уравнений.

Вторая часть пособия содержит элементы векторной алгебры. Рассмотрены векторы как направленные отрезки, показано выражение их через координаты в ортонормированном базисе в соответствии с действующей учебной программой. Теоретический материал сопровождается рассмотрением примеров по основным вопросам.

Предназначено для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 512. 64 (075.8)
ББК 22.143

ISBN 978-985-554-152-4 (ч. 2)
ISBN 978-985-468-955-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ

Величина, полностью определенная одним числовым значением, называется *скалярной* (*скаляром*). Например: масса, время, температура.

Величина, задаваемая числом и направлением, называется *векторной* (*вектором*). Например: сила, скорость.

Геометрически векторная величина изображается направленным отрезком.

Будем рассматривать реальное геометрическое пространство.

Определение 1.1. *Вектором* (*геометрическим вектором*) называется направленный отрезок прямой с указанием начальной (A) и конечной (B) точек.

Обозначения вектора: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ или, иногда, жирным шрифтом: $\boldsymbol{a}$.

Модулем (*длиной*) *вектора* $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$ называется длина отрезка AB. Модуль вектора является скаляром, принимающим неотрицательные значения.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадает. То есть, $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ при $A = B$ и $|\overrightarrow{AB}| = 0$. Нулевому вектору не приписывается конкретное направление.

Различают связанные, скользящие и свободные векторы.

Связанный вектор – если его начало жестко привязано к неподвижной точке. (Например, вектор силы тяжести в фиксированной точке связан с этой точкой).

Скользящий вектор – если он может перемещаться вдоль прямой, на которой лежит. (Например, вектор силы, действующий на твердое тело, можно перемещать вдоль прямой действия силы).

Свободный вектор – если он может перемещаться параллельно самому себе в любую точку пространства. (Например, геометрические векторы, определяемые модулем и направлением. Их можно переместить в любую точку пространства параллельным переносом или операцией “откладывания вектора”).

Мы будем рассматривать свободные векторы. Раздел математики, рассматривающий операции над векторами, называется *векторной* (*линейной*) *алгеброй*.

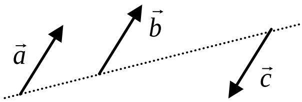
Определение 1.2. Векторы называют *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой (или на параллельных прямых). Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Нулевой вектор считают коллинеарным с любым вектором.

Коллинеарные векторы имеют одинаковое направление (они сонаправлены), если они располагаются в одной полуплоскости относительно прямой, проведенной через их начала. В противном случае они имеют противоположное направление.

Определение 1.3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют *равными*, если их длины равны, они коллинеарны и имеют одинаковое направление (при совмещении их начал они полностью совпадают).

Если же их направления противоположны, то они называются *противоположными*. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, то $\overrightarrow{BA}$ ему противоположный и обозначается $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.



На рисунке $\vec{a} = \vec{b}$ – векторы равны, $\vec{a} = -\vec{c}$ – векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ противоположные.

Сонаправленные векторы, имеющие одинаковые модули, равны.

Определение 1.4. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости (или в параллельных плоскостях).

Если их привести к общему началу, то они окажутся в одной плоскости. Любые два вектора компланарны, так как, будучи приведены к общему началу, определяют одну плоскость. Понятие компланарности поэтому применяется к трем и более векторам.

Векторы, в отличие от действительных чисел, не образуют упорядоченное множество, то есть к ним не применимы отношения “больше” и “меньше”. *Только коллинеарные векторы можно сравнивать.*

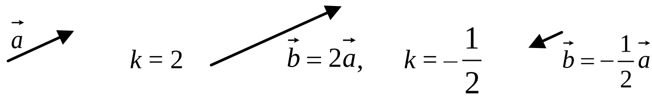
2 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

К линейным операциям над векторами относятся умножение вектора на число и сложение векторов, выполняемые по приведенным ниже правилам.

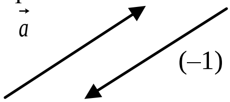
2.1 Умножение вектора на число

Заметим, что для задания вектора необходимо указать его длину и направление. Задание вектора двумя точками (направленным отрезком) сразу определяет его длину и направление.

Определение 2.1. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* k называется вектор $\vec{b}$, модуль которого $|\vec{b}|=|k|\cdot|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $k > 0$ и противоположно при $k < 0$.



Отметим, что $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$, то есть при умножении вектора $\vec{a}$ на –1 получаем вектор, противоположный ему.



$$(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a},\ \text{здесь}\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Деление вектора на число рассматривается как умножение. То есть $\frac{\vec{a}}{k} = \frac{1}{k}\cdot\vec{a}$.

Если длина вектора равна 1, то он называется *единичным вектором* (данного направления) и обозначается $\vec{a}^{\circ}$. При этом $\vec{a}^{\circ} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Отсюда получаем $\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\vec{a}^{\circ}$, то есть любой вектор может быть задан модулем и единичным вектором данного направления.

Теорема 2.1. *Два вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число* λ *такое, что* $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Доказательство.

Достаточность. Пусть существует число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Тогда согласно определению произведения вектора на число получаем, что вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

Необходимость. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда $\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\vec{a}^{\circ}$ и $\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\vec{b}^{\circ}$, причем $\vec{a}^{\circ} = \pm\vec{b}^{\circ}$ ("+", если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, и "–", если противоположно). $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \pm\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\vec{b} = \pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$. Число $\pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \lambda$ – искомое. Получаем $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

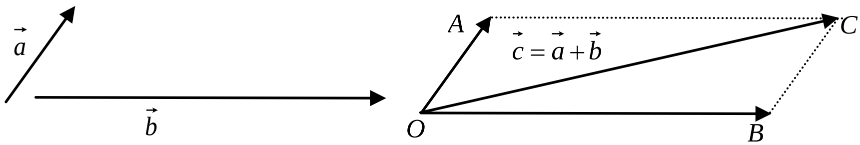
Из этой теоремы следует условие коллинеарности векторов:

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a}.$$

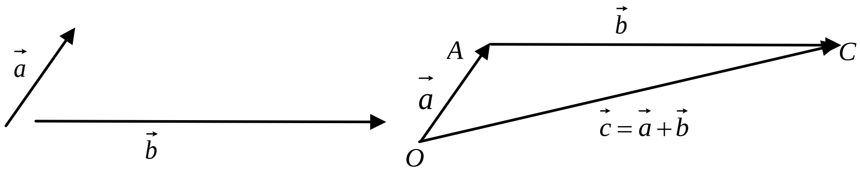
2.2 Сложение векторов

Определение. *Суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, полученный из исходных по “правилу параллелограмма” или по “правилу замыкающей”.

Правило параллелограмма. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и построим на них параллелограмм. Тогда их суммой будет вектор $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, который является диагональю параллелограмма, выходящей из общего начала.

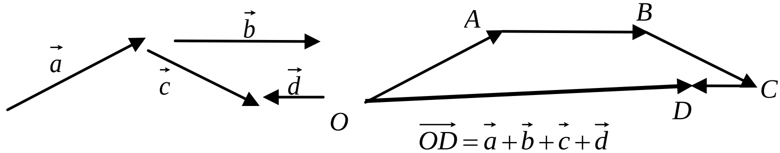


Правило замыкающей. От произвольной точки O отложим $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. Начало второго вектора $\vec{b}$ поместим в конец первого – точку A. Отложим $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Тогда замыкающий вектор $\overrightarrow{OC}$ – выходящий из точки O – начала первого и приходящий в точку C – конец второго даст сумму $\vec{a}+\vec{b}$.



Нетрудно убедиться, что оба правила дают один и тот же результат.

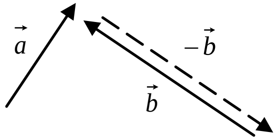
Правило замыкающей справедливо и для большего числа слагаемых векторов. Это проиллюстрировано на рисунке ниже.

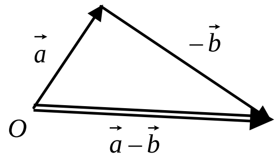


Разность векторов можно рассматривать как алгебраическую сумму векторов: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Отсюда получается правило вычитания векторов:

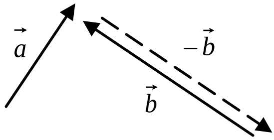
чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, нужно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор ($-\vec{b}$) – противоположный вектору $\vec{b}$.

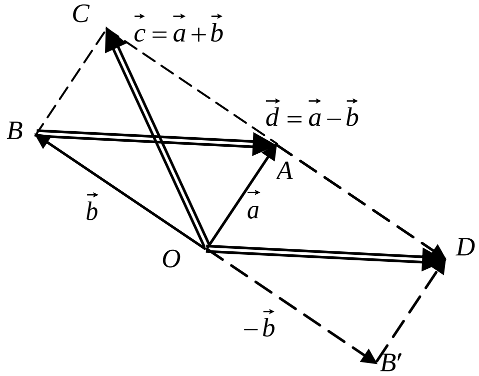
По правилу замыкающей:





Можно рассматривать обе операции на одном параллелограмме:

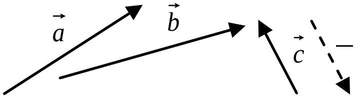


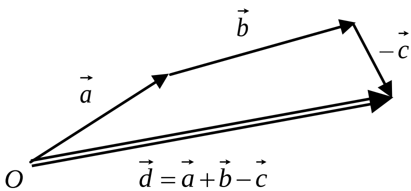


Из чертежа видно, что $\overrightarrow{OC}=\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OD}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$. То есть сумма векторов $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ есть диагональ $\overrightarrow{OC}$, выходящая из общего начала, а разность $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$ есть вторая диагональ $\overrightarrow{BA}$. Причем ее направление берется таким образом, чтобы выполнялось условие $\vec{a}=\vec{b}+\vec{d}$ (следует из $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$).

П р и м е р . Найти вектор $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

Решение.





3 ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

3.1 Определение векторного пространства

Теорема 3.1. Для множества геометрических векторов с введенными операциями сложения векторов и умножения вектора на число выполняются следующие свойства:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность сложения);

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность сложения);

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (существование нулевого элемента);

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (существование противоположного элемента);

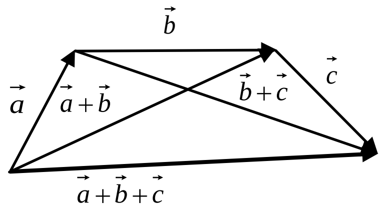
5) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (дистрибутивность сложения чисел);

6) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (дистрибутивность сложения векторов);

7) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (существование единичного элемента);

8) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (ассоциативность умножения на число).

Все свойства легко доказываются, исходя из геометрической трактовки введенных операций над векторами. Например, свойство 2) следует из чертежа:



Отметим, что введение операций над множеством элементов S требует, чтобы результат операции принадлежал этому же множеству (свойство замкнутости множества относительно операции).

Следует заметить, что алгоритм «сложения» и «умножения на число» векторов отличается от обычных операций над числами. Здесь основную роль играет то обстоятельство, что множество замкнуто относительно операций и при этом выполняются свойства 1–8. Это позволяет ввести важное понятие линейного пространства.

Определение 3.1. Множество элементов произвольной природы, для которого определены операции сложения и умножения на число с выполнением требований 1–8, называется *векторным пространством* (*линейным пространством*).

Путем проверки выполнения требований 1–8 можно убедиться, что справедлива следующая

Теорема 3.2. (А) Векторы, лежащие на одной прямой, образуют векторное пространство V_1. (В) Векторы, лежащие на одной плоскости, образуют векторное пространство V_2. (С) Векторы геометрического пространства образуют векторное пространство V_3.

Смысл индекса 1, 2, 3 будет раскрыт позже.

Чрезвычайно важным обстоятельством является то, что под определение векторного (линейного) пространства подходят помимо множества векторов – направленных отрезков и множества элементов другой природы. Элементы таких множеств также называют векторами, вкладывая в этот термин другой смысл.

Примеры векторных (линейных) пространств.

1 *Множество многочленов n-й степени* S_n.

Векторы: $A = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, $B = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$ – многочлены n-й степени.

Операции сложения и умножения на число определяются следующим образом.

Сумма: $A + B = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0) \in S_n$.

Произведение на число: $kA = ka_n x^n + ka_{n-1}x^{n-1} + \dots + ka_0 \in S_n$.

Нулевой элемент: $E_0 = 0 \in S_n$.

Элемент, противоположный элементу A:

$-A = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0 \in S_n$ и выполняется $A + (-A) = 0 = E_0$.

Нетрудно проверить выполнимость и остальных требований.

2 *Множество матриц одной размерности*.

Операции сложения и умножения матрицы на число введены в разделе матрицы (в пункте 2 первой части нашего пособия). При этом все 8 свойств выполняются.

3 *Множество натуральных чисел* векторного пространства не образуют прежде всего потому, что операция умножения на действительное число не замкнута. Так, $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ не принадлежит уже к натуральным числам. Кроме того, нет «нуля» (свойство 3) и нет противоположного элемента (свойство 4).

Отметим, что линейные пространства играют очень важную роль в математике. Обращаем внимание на тот факт, что, в общем случае, для линейного пространства не существует понятий «длины вектора» и «угла между векторами». Если эти понятия введены, то получают более узкий класс пространств – евклидовы векторные пространства (так называемые метрические линейные пространства). Примером такого пространства и является пространство векторов – геометрических отрезков, рассматриваемое в этой (второй) части пособия.

3.2 Линейная зависимость векторов

Под *линейной комбинацией векторов* понимается сумма произведений векторов на числа, представляющая собой некоторый вектор $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+$ $+\dots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{b}$. В этом случае говорят также, что вектор $\vec{b}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$.

Определение 3.2. Система векторов $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа α_1, …, α_n, одновременно не равные нулю такие, что равна нулю линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$. Если же последнее равенство выполняется только при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, то система векторов $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ называется *линейно независимой*.

Свойства системы линейно зависимых векторов.

Свойство 1. Если система векторов линейно зависима, то хотя бы один из векторов представим в виде линейной комбинации остальных. И обратно.

Доказательство.

Пусть векторы $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ линейно зависимы. По определению существует линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$, причем можно положить $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $\overrightarrow{a_1}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{a_2}-\dots-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overrightarrow{a_n}$ является линейной комбинацией остальных.

Обратно, если $\overrightarrow{a_1}=\beta_2\overrightarrow{a_2}+\dots+\beta_n\overrightarrow{a_n}$, то $\beta_2\overrightarrow{a_2}+\dots+\beta_n\overrightarrow{a_n}-1\cdot\overrightarrow{a_1}=0$. По определению, система векторов $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ линейно зависима.

Свойство 2. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Доказательство.

Пусть в системе $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{a_{k+1}},...,\ \overrightarrow{a_n}$ подсистема $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_k}$ линейно зависима. Тогда по определению $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\dots+\alpha_k\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$ и хотя бы одно из α_i (например, α_k) не равно нулю. Следовательно, $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\dots+\alpha_k\overrightarrow{a_k}+$

$+0\cdot\overrightarrow{a_{k+1}}+\cdots+0\cdot\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$. По определению, векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{a_{k+1}},...,\ \overrightarrow{a_n}$ линейно зависимы.

Свойство 3. Совокупность векторов $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n},\vec{0}$, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Доказательство следует, по определению, из выражения $0\cdot\overrightarrow{a_1}+\cdots+$ $+0\cdot\overrightarrow{a_k}+1\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

Доказанные свойства позволяют дать второе определение линейной зависимости, которое бывает удобно для использования.

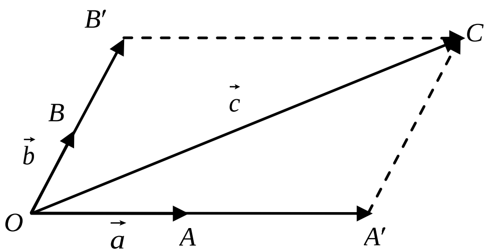
Определение 3.3. Система векторов $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ называется *линейно зависимой*, если хотя бы один из векторов системы представим в виде линейной комбинации остальных.

Теорема 3.3.

(A) На прямой любые два вектора линейно зависимы.

(B) На плоскости любые три вектора линейно зависимы.

(C) В геометрическом пространстве любые четыре вектора линейно зависимы.



Доказательство. (A) Следует, по определению, из того, что любой вектор прямой может быть выражен через ненулевой вектор $\vec{a}$.

(B) Возьмем на плоскости (π) три вектора – $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и отложим их от общего начала – точки $O\in(\pi)$. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они линейно зависимы по (A). Тогда $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы по свойству 2. Если же $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то, отложив их от общего начала O и проведя через точку C прямые параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим параллелограмм $OB'CA'$. Имеем, что $\vec{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

Таким образом получаем, что произвольный вектор $\vec{c}$ плоскости представим в виде линейной комбинации пары неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

(C) Для доказательства утверждения (C) необходимо строить вместо параллелограмма параллелепипед. Проведите доказательство самостоятельно.

3.3 Базис векторного пространства

Доказанные выше теоремы позволяют ввести следующее

Определение 3.4. Упорядоченная совокупность линейно независимых векторов линейного пространства, через которые можно выразить любой вектор этого пространства, называется *базисом* векторного пространства.

Векторы базиса называются *базисными*, а их число определяет *размерность* векторного пространства. Отметим, что базисные векторы линейно независимы и что базис может быть выбран различными способами. Но число базисных векторов пространства постоянно.

Обозначения: V_n – n-мерное пространство, $B = \{\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}\}$ – базис этого n-мерного пространства, $n = \dim V_n$ – размерность пространства.

Таким образом, V_1 – одномерное векторное пространство (на прямой), V_2 – двумерное (на плоскости), V_3 – трехмерное (геометрическое пространство).

Справедлива

Теорема 3.4. В V_1 (на прямой) любой вектор образует базис; в V_2 (на плоскости) базис образует любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов; в V_3 (в пространстве) базис образует любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Вообще в n-мерном пространстве базис образует любая упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов, таких, что любые $n + 1$ векторы уже линейно зависимы.

Если вектор $\vec{d}$ выражается через базисные $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в виде $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, то числа α, β и γ называются *координатами вектора* $\vec{d}$ *в базисе* $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ и обозначается $\vec{d} = (\alpha; \beta; \gamma)$. Отметим также, что любой вектор выражается через базисные единственным образом, а в различных базисах координаты одного и того же вектора будут различными. Сами же базисные векторы в этом базисе имеют координаты: $\vec{a} = (1; 0; 0)$, $\vec{b} = (0; 1; 0)$, $\vec{c} = (0; 0; 1)$, так как $\vec{a} = 1\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c}$. Очевидно, что у нулевого вектора все координаты равны нулю. $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = (0; 0; 0)$.

Выражение векторов через базисные векторы пространства (с помощью чисел – координат) позволяет определить вектор как объект, задаваемый наборами чисел, которые называют *координатами*:

в одномерном пространстве (на прямой) $\vec{a} = (a_1)$;

в двумерном пространстве (на плоскости) $\vec{a} = (a_1; a_2)$;

в трехмерном пространстве (реальном геометрическом) $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Такой подход к заданию вектора позволяет сделать важное обобщение понятия вектора. При этом вектор уже не обязательно направленный отрезок, а объект, удовлетворяющий определению.

Определение 3.5. *Арифметическим n-мерным вектором* называется объект, определенный n числами – координатами $\vec{a} = (a_1; \ldots; a_n)$.

Для них вводятся линейные операции: 1) умножение на число: $k \cdot \vec{a} = (ka_1; \ldots; ka_n)$ и 2) сложения: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1; \ldots; a_n+b_n)$.

Арифметические n-мерные векторы при этом образуют векторное пространство, так как выполняется определение векторного пространства. Введенное выше пространство n-мерных векторов называется *арифметическим n-мерным векторным (или линейным) пространством*.

В нем в качестве базиса удобно брать $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$, при этом $\vec{e_1} = (1; 0; \ldots, 0)$, $\vec{e_2} = (0; 1; \ldots, 0)$, …, $\vec{e_n} = (0; 0; \ldots, 1)$ – базисные векторы. В выбранном базисе любой вектор $\vec{a}$ однозначно выражается через базисные: $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \ldots + a_n\vec{e_n}$. Коэффициенты выражения вектора через базис являются его координатами в этом базисе: $\vec{a} = (a_1; \ldots; a_n)$.

Потребности математики в рассмотрении функций, зависящих от многих аргументов, приводят к необходимости введения n-мерных точечно-векторных пространств, объектами которых являются точки и векторы, задаваемые не тремя, а большим числом координат. Геометрической интерпретации такие «n-мерные пространства» не имеют. Такой подход широко распространен в физике, экономике и др. науках. Например, если движущаяся точка M в момент времени t в геометрическом пространстве имеет координаты $(x; y; z)$, то ее можно рассматривать как точку $M(x; y; z; t)$ четырехмерного пространства.

Замечание. Раздел 3 посвящен знакомству с важными понятиями, выходящими за пределы реального геометрического (трехмерного) пространства и трактовки вектора как направленного отрезка. Хотя все введенные понятия имеют место и для пространства векторов – направленных отрезков. В дальнейшем ограничимся рассмотрением трехмерного геометрического пространства и трактовки векторов как направленных отрезков.

3.4 Переход к новому базису

Рассмотрим **метод нахождения координат вектора при переходе к новому базису**. Вопрос рассмотрим для трехмерного пространства V_3.

Пусть в исходном базисе $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ трехмерного пространства заданы векторы $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$, и $\vec{d} = (d_1; d_2;$

d_3). Если в качестве нового базиса взять векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то как найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе? Решение задачи состоит из двух этапов.

I Прежде всего, следует проверить, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис. Ранее было отмечено, что любые n линейно независимых векторов образуют базис n-мерного векторного пространства. Следовательно, надо проверить линейную независимость векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. По определению 3.2 их линейная комбинация равна нулю, то есть $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ **(*)** только при $\alpha=\beta=\gamma=0$. Подставим в (*) выражения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ через исходный базис. Получим

$$\alpha(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3})+\beta(b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+b_3\overrightarrow{e_3})+\gamma(c_1\overrightarrow{e_1}+c_2\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3})=\vec{0}.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части

$$(\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1)\overrightarrow{e_1}+(\alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2)\overrightarrow{e_2}+(\alpha a_3+\beta b_3+\gamma c_3)\overrightarrow{e_3}=\vec{0}.$$

У нулевого вектора $\vec{0}$ все координаты разложения по базису равны нулю. Поэтому

$$\begin{cases}\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1=0,\\ \alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2=0,\\ \alpha a_3+\beta b_3+\gamma c_3=0.\end{cases}$$

Получили систему однородных линейных уравнений с неизвестными α, β и γ, которая должна иметь только нулевое решение. Следовательно, ее определитель должен быть отличен от нуля (см. п. 3.3 пособия «Линейная алгебра». Ч. 1).

Таким образом, если определитель из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отличен от нуля, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в V_3. То есть должно выполняться условие

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

Замечание. Если задача рассматривается в V_2 (на плоскости), то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис тогда и только тогда, когда они не коллинеарны. Другими словами, если $\dfrac{a_1}{b_1}\neq\dfrac{a_2}{b_2}$, то есть $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$.

II Координатами вектора $\vec{d}$ в новом базисе $B_1 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ по определению являются коэффициенты его выражения через базисные векторы. Если **(**)** $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, то $\vec{d} = (m; n; p)$ в базисе B_1.

Подставив в (**) выражения векторов через исходный базис B, получим

$$m(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) + n(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}) + p(c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3}) = d_1\vec{e_1} + d_2\vec{e_2} + d_3\vec{e_3}.$$

Собрав коэффициенты при базисных векторах, получим $(ma_1 + nb_1 +$ $+ pc_1)\vec{e_1} + (ma_2 + nb_2 + pc_2)\vec{e_2} + (ma_3 + nb_3 + pc_3)\vec{e_3} = d_1\vec{e_1} + d_2\vec{e_2} + d_3\vec{e_3}$.

Ввиду равенства векторов имеем

$$\begin{cases} ma_1 + nb_1 + pc_1 = d_1, \\ ma_2 + nb_2 + pc_2 = d_2, \\ ma_3 + nb_3 + pc_3 = d_3, \end{cases}$$

где m, n и p – некоторые неизвестные.

Определитель этой системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ (см. Ч. 1 пособия). Поэтому система имеет единственное решение, которое находим по формулам Крамера $m = \dfrac{\Delta m}{\Delta}$, $n = \dfrac{\Delta n}{\Delta}$, $p = \dfrac{\Delta p}{\Delta}$. В базисе $B_1 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ получаем $\vec{d} = (m; n; p)$. Отметим, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в этом базисе имеют координаты $\vec{a} = (1; 0; 0)$, $\vec{b} = (0; 1; 0)$, $\vec{c} = (0; 0; 1)$.

П р и м е р . В некотором базисе $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ заданы векторы $\vec{a} = (2; 0; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 1)$, $\vec{c} = (-2; 1; 0)$, и $\vec{d} = (1; 2; 3)$. Найти координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $B_1 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Решение.

Вначале убедимся, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис. Определитель из их координат $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, следовательно, они линейно независимы и образуют базис в V_3.

Пусть $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Подставив сюда выражения векторов в старом базисе и приравняв коэффициенты при $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$, получим систему для определения m, n и p

$$\begin{cases} 2m + n - 2p = 1, \\ \quad -2n + p = 2, \\ \quad -m + n = 3. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, получим $m = -14$, $n = -11$, $p = -20$. Таким образом, в базисе $B_1 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ вектор $\vec{d} = (-14; -11; -20)$.

4 ВЕКТОРЫ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

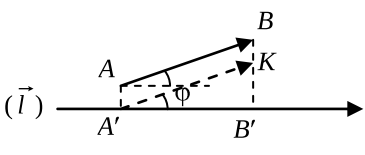
Согласно замечанию в предыдущем разделе в дальнейшем рассматриваются векторы – направленные отрезки в реальном геометрическом пространстве с имеющими место понятиями длины отрезка (вектора) и угла между ними.

4.1 Проекция вектора на ось

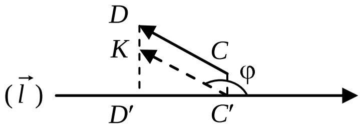
Под осью понимаем прямую, на которой указано положительное направление. Обозначают ее $(\vec{l})$.

Определение 4.1. На плоскости *проекцией точки* на ось называется основание перпендикуляра, опущенного из точки на эту ось, в пространстве – точка пересечения оси с плоскостью, проведенной через точку перпендикулярно оси.

Определение 4.2. Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $(\vec{l})$ называется длина отрезка $A'B'$ этой оси, заключенного между проекциями точек начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$, взятая со знаком плюс, если направление $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением оси $(\vec{l})$, и со знаком минус, если эти направления противоположны. Обозначается $\text{пр}_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$.



$A'B' = \text{пр}_{\vec{l}}\overrightarrow{AB} > 0$



$$C'D' = \text{пр}_{\vec{l}}\,\overrightarrow{CD} < 0$$

Определение 4.3. Углом между вектором $\overrightarrow{AB}$ (или равного ему $\overrightarrow{A'K}$) и осью называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть ось $\vec{l}$, чтобы ее направление совпало с направлением $\overrightarrow{A'K}$. Обозначение: $\angle\varphi = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{l}})$. Очевидно, $0 \le \varphi \le \pi$. Направление поворота здесь роли не играет.

Под углом между векторами будем понимать угол между векторами, равными данным и имеющим общее начало. Если угол между векторами равен прямому $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, то векторы называют ортогональными. Обозначают ортогональность $\vec{a} \perp \vec{b}$.

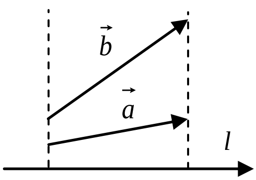
Из определения проекции вектора на ось и правил умножения вектора на число и сложения векторов вытекают следующие *свойства проекций*:

Свойство 1. Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между ними:

$$\text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{l}}).$$

Свойство 2. Равные векторы имеют равные проекции:

$$\vec{a} = \vec{b} \;\Rightarrow\; \text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{a} = \text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{b}.$$



Но из равенства проекций на ось равенства векторов не следует. Так, неравные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одну и ту же проекцию: $\text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{a} = \text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{b}$, но $\vec{a} \ne \vec{b}$.

Свойство 3. При умножении вектора на число его проекция умножается на это же число:

$$\vec{a} = k\cdot\vec{b} \;\Rightarrow\; \text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{a} = \text{пр}_{\vec{l}}\,(k\cdot\vec{b}) = k\cdot\text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{b}.$$

Свойство 4. Проекция суммы векторов равна сумме проекций. (Проекция суммы векторов равна проекции замыкающей).

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{d} \;\Rightarrow\; \text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{b} - \text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{c} = \text{пр}_{\vec{l}}\,(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}).$$

4.2 Прямоугольная декартова система координат

Положение любого объекта в пространстве можно определить только по отношению к другим объектам. Такой метод задания точек ввел в XVII веке французский математик Рене Декарт путем задания системы координат. Это позволило указывать положение точек, векторов в пространстве с помощью чисел – координат, определяющих их положение относительно выбранной координатной системы. Метод координат Декарта позволил решение геометрических задач (вычисление длин, площадей, взаимного расположения фигур и т.д.) свести к решению алгебраических задач – выполнению алгебраических операций над числами (координатами). Это является основным содержанием раздела математики – аналитической геометрии.

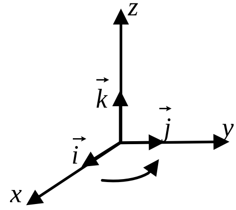
Определение 4.4. *Декартовой системой координат* (в пространстве) называется совокупность точки O и базиса $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

Зафиксировав положение точки O, поместим в нее начала координатных базисных векторов. Они определяют положение оси Ox (абсцисс), Oy (ординат) и Oz (иппликат).

Этим определены и координатные плоскости xOy; yOz; xOz. Саму координатную систему обозначим $Oxyz$. Для произвольной точки пространства M определяются ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Как известно, любой вектор $\overrightarrow{OM}$ пространства однозначно выражается через базисные $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$. Тогда векторы $x\vec{e_1}$, $y\vec{e_2}$ и $z\vec{e_3}$ называются *компонентами* или *составляющими*, а числа x, y, z – координатами вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$. Координатами точки M в системе $Oxyz$ называются координаты ее радиус-вектора. Записывается в виде $M(x; y; z)$. Координаты по названию осей называются: x – абсцисса, y – ордината и z – иппликата.

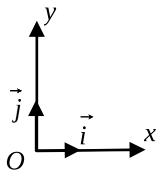
Определение 4.5. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и по длине равны единице (нормированы).

Декартова прямоугольная система координат – координатная система, базис которой ортонормирован: $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называются *ортами*.



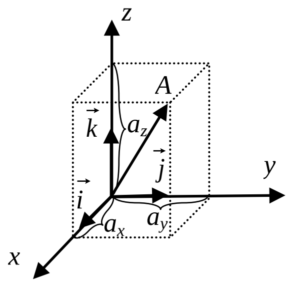
В дальнейшем будем пользоваться прямоугольной декартовой системой координат, причем *правой* ориентации, когда ориентация ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) совпадает с ориентацией большого, указательного и среднего пальцев правой руки (или когда вращение орта $\vec{i}$ к орту $\vec{j}$

происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца орта $\vec{k}$).



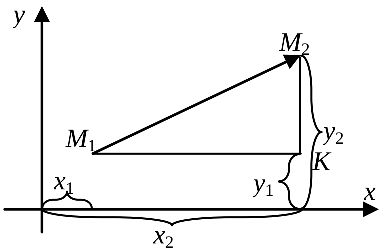
Если задача рассматривается на плоскости, то берут декартову систему координат *Oxy*. В такой системе только два орта – $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Рассмотрим *способы задания вектора в прямоугольной декартовой системой координат*. Возьмем в пространстве с введенной координатной системой (*Oxyz*) точку *A*. Тем самым будет определен вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ с началом в начале координат и концом в точке *A*. Его координатами будут проекции на координатные оси: $a_x = \text{пр}_{Ox}\vec{a}$, $a_y = \text{пр}_{Oy}\vec{a}$, $a_z = \text{пр}_{Oz}\vec{a}$.



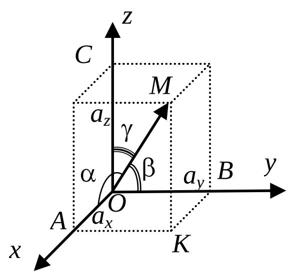
Таким образом, $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Вектор $\overrightarrow{OA}$, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке *A*, называется *радиус-вектором точки A*. И *координатами точки A* называются координаты его радиус-вектора: $A(a_x; a_y; a_z) = A(x_a; y_a; z_a)$.

Зная координаты вектора, можем выразить его через составляющие компоненты: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.



Возьмем две точки в пространстве – M_1 и M_2. Координаты точек совпадают с координатами их радиус-векторов $\overrightarrow{OM_1} = (x_1; y_1; z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\overrightarrow{OM_2} = (x_2; y_2; z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Так что $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, задаваемый точками начала $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и конца $M_2(x_2; y_2; z_2)$, можно представить в виде разности радиус-векторов $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ (по правилу вычитания векторов). Из свойства 4 для проекций получаем $\text{пр}_{Ox}(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) = x_2 - x_1$, $\text{пр}_{Oy}(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) = y_2 - y_1$ и $\text{пр}_{Oz}(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) = z_2 - z_1$. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, то есть *координаты вектора равны разности координат конечной и начальной точек:* $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Длину (*модуль*) *вектора* в прямоугольной системе координат можем определить как расстояние между двумя точками: на плоскости – как гипотенузу прямоугольного треугольника – по теореме Пифагора $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; в пространстве – как диагональ прямоугольного параллелепипеда $|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$.



Углы α, β, γ, образованные вектором $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ с осями координат, называются *направляющими углами*, а их косинусы: cos α, cos β, cos γ – *направляющими косинусами*.

По свойству 1 проекций вектора на ось имеем: $a_x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\vec{a}|\cos\beta$, $a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$, а также $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|} = \dfrac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|} = \dfrac{a_y}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}$, и для третьего угла $\cos\gamma = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|} = \dfrac{a_y}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}$. Так как длина единичного вектора $|\overrightarrow{a^0}| = 1$, то *направляющие косинусы являются координатами единичного вектора* $\overrightarrow{a^0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ и они связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Поскольку для задания вектора нужно задать его модуль и направление, то вектор может быть задан также модулем и единичным вектором (направляющими косинусами): $|\vec{a}|$ и $\overrightarrow{a^0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Таким образом, вектор в прямоугольной системе координат может быть задан одним из способов:

1) $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ – координатами;

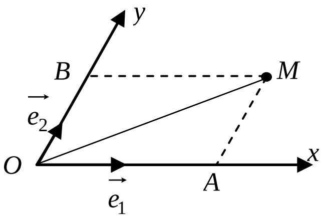
2) $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ – компонентами (составляющими);

3) $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ – двумя точками: началом $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и концом $M_2(x_2; y_2; z_2)$, так что $\vec{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$;

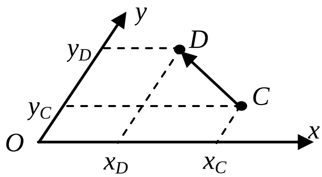
4) модулем $|\vec{a}|$ и направлением – направляющими косинусами cos α, cos β, cos γ (или направляющими углами α, β, γ);

5) модулем $|\vec{a}|$ и единичным вектором $\overrightarrow{a^0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

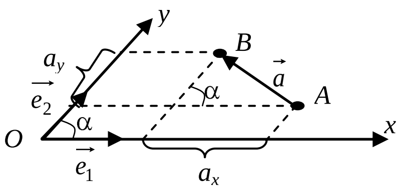
Замечание. В косоугольной системе координат углы между базисными векторами не будут прямыми, и поэтому приведенными формулами, которые основаны на ортогональном проектировании и теореме Пифагора (например, для определения длины вектора), пользоваться нельзя.



На плоскости для получения координат точки M в косоугольной системе нужно построить параллелограмм с диагональю OM и сторонами, параллельными осям (базисным векторам). Тогда из разложения радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M по направлениям осей получим $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x_M \vec{e}_1 + y_M \vec{e}_2$. То есть $\overrightarrow{OM}$ = (x_M; y_M) и точка M(x_M; y_M).



Для произвольного расположенного вектора $\overrightarrow{CD}$ аналогично предыдущему находим координаты точек C и D. Тогда $\overrightarrow{CD}$ = ($x_D - x_C$; $y_D - y_C$).



Длина вектора в нормированной ($|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$) косоугольной системе определяется по теореме косинусов: $\overrightarrow{AB} = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 - 2a_x a_y \cos\alpha}$, где α – угол между осями.

Это может быть использовано при разложении силы по заданным направлениям.

4.3 Выражение линейных операций над векторами через координаты в ортонормированном базисе

Отметим очень важное обстоятельство: *одно векторное равенство эквивалентно трем координатным*, то есть

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

Оно вытекает из единственности разложения вектора по базису. При умножении вектора на число все его компоненты умножаются на это число. Это следует из свойств проекций:

$$n\vec{a} = n(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = na_x \vec{i} + na_y \vec{j} + na_z \vec{k} = \vec{d} = (na_x; na_y; na_z).$$

Аналогичным образом получается правило сложения векторов: $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{l}=(a_x+b_x-c_x;\, a_y+b_y-c_y;\, a_z+b_z-c_z)$. Условия коллинеарности векторов в координатах принимают вид

$$\vec{a}\,\|\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x=\lambda b_x \\ a_y=\lambda b_y \\ a_z=\lambda b_z \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda .$$

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов является пропорциональность их координат.

Рассмотрим решение некоторых задач. Задачи будем решать в общем (буквенном) виде. Это позволит нам получить формулы для решения задач подобного типа по формулам.

Задача 1. Операция «откладывания вектора».

От точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ отложен вектор $\vec{a}=(a_x;\, a_y;\, a_z)$. Требуется найти конечную точку $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ вектора.

Решение.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1)$ равен вектору $\vec{a}=(a_x;\, a_y;\, a_z)$. По условиям равенства векторов имеем

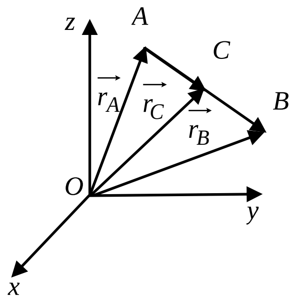
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2-x_1=a_x \\ y_2-y_1=a_y \\ z_2-z_1=a_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=x_1+a_x \\ y_2=y_1+a_y \\ z_2=z_1+a_z \end{cases}.$$

То есть найдены координаты точки M_2.

Задача 2. Деление отрезка в данном отношении.

Отрезок AB задан точками $A(x_A;\, y_A;\, z_A)$ и $B(x_B;\, y_B;\, z_B)$. На отрезке AB найти точку $C(x_C;\, y_C;\, z_C)$, делящую отрезок AB в отношении λ так, что $\dfrac{|AC|}{|CB|}=\lambda$.

Решение.



Последнему соотношению соответствует равенство в векторной форме $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$. Распишем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ через радиус-векторы: $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$, $\overrightarrow{AC}=\vec{r}_C-\vec{r}_A$, $\overrightarrow{CB}=\vec{r}_B-\vec{r}_C$. Поэтому $\vec{r}_C-\vec{r}_A=\lambda(\vec{r}_B-\vec{r}_C)$. Раскроем скобки и получим $\vec{r}_C-\vec{r}_A=\lambda\vec{r}_B-\lambda\vec{r}_C$.

Перенесем слагаемые $\overrightarrow{r_C}$ в левую часть равенства, а без него в правую. Имеем: $\overrightarrow{r_C}(1+\lambda)=\overrightarrow{r_A}+\lambda\overrightarrow{r_B}$.

Отсюда получаем формулы деления отрезка в данном отношении. В векторной форме $\overrightarrow{r_C}=\dfrac{\overrightarrow{r_A}+\lambda\overrightarrow{r_B}}{1+\lambda}$. В координатной форме, проектируя векторное равенство на оси, получим

$$x_C=\frac{x_A+\lambda\cdot x_B}{1+\lambda},\ y_C=\frac{y_A+\lambda\cdot y_B}{1+\lambda},\ z_C=\frac{z_A+\lambda\cdot z_B}{1+\lambda}.$$

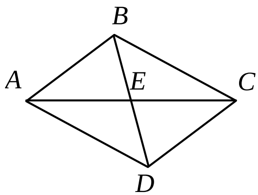
Отметим, что при $\lambda>0$ получается деление «внутренним образом» – точка C лежит между A и B, а при $\lambda<0$ получается деление «внешним» – точка C лежит вне отрезка AB.

При $\lambda = 1$ точка C делит отрезок пополам и получаем координаты середины отрезка:

$$x_{\text{сер}}=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_{\text{сер}}=\frac{y_A+y_B}{2},\ z_{\text{сер}}=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

Если две точки A и B лежат на плоскости, то остаются только две первые формулы (так как $z_i = 0$).

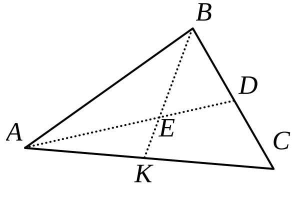
Задача 3. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трех точек: $A(2; 0; –3)$, $B(0; 3; 1)$ и $C(6; 2; 5)$. Найти координаты четвертой вершины D.



Решение.

Диагонали параллелограмма точкой пересечения E делятся пополам. Найдем координаты точки E как середины отрезка AC. Из задачи 2 имеем формулу $x_E=\dfrac{x_A+x_C}{2}$, то есть $x_E=\dfrac{2+6}{2}=4$. Аналогично, $y_E=\dfrac{0+2}{2}=1$, $z_E=\dfrac{-3+5}{2}=1$. Получили $E(4; 1; 1)$. В отрезке BD известны начало и середина E. Из $x_E=\dfrac{x_B+x_D}{2}$ найдем $2x_E=x_B+x_D$. Значит, $x_D=2x_E-x_B$, то есть $x_D=2\cdot4-0=8$. Аналогично, $y_D=2y_E-y_B$, то есть $y_D=2\cdot1-3=-1$, $z_D=2\cdot1-1=1$. Получили, $D(8; –1; 1)$.

Задача 4. Найти координаты центра тяжести треугольника.



Решение.

Пусть треугольник ABC задан координатами вершин $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$. Как известно из физики, центр тяжести треугольника лежит в точке E пересечения его медиан. Причем точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. Используя формулы деления отрезка в данном отношении, находим точку D – середину отрезка BC:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2},\ y_D = \frac{y_B + y_C}{2},\ z_D = \frac{z_B + z_C}{2}.$$

По условию $AE{:}ED = 2{:}1$, то есть $\lambda = 2$. Значит, $x_E = \dfrac{x_A + \lambda \cdot x_D}{1+\lambda}$ или

$x_E = \dfrac{x_A + 2 \cdot x_D}{1+2} = \dfrac{x_A + 2 \cdot \dfrac{x_B + x_C}{2}}{3} = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$. Остальные координаты получаем аналогично. Итак, получили формулы:

$$x_{\text{ц.т.}} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ y_{\text{ц.т.}} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3},\ z_{\text{ц.т.}} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

4.4 Скалярное произведение векторов

Определение 4.6. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей (длин) на косинус угла между ними.

Обозначение скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$. По определению имеем следующее равенство:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Поскольку $|\vec{b}| \cos\varphi = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$, то получаем следующее эквивалентное определение.

Определение 4.7. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение модуля одного из них на проекцию второго на направление первый:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Из определения скалярного произведения и свойств проекций векторов вытекают свойства скалярного произведения:

1 Скалярное произведение коммутативно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

2 Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Отсюда

$$|\vec{a}|=\sqrt{|\vec{a}|^2}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\ .$$

3 Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители ортогональны или хотя бы один из них равен нулю.

Так как нулевой вектор можно считать ортогональным любому вектору, то свойство 3 можно трактовать как *признак ортогональности векторов*:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

Выразим скалярное произведение векторов через координаты сомножителей. Рассмотрим скалярное произведение орт

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cdot\cos(\widehat{\vec{i},\vec{i}})=1\cdot1\cdot\cos 0=1\,.$$

Аналогично, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$ и $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot\cos(\widehat{\vec{i},\vec{j}})=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$; $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$ и $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$. Ввиду коммутативности скалярного произведения получаем

Вывод. *Скалярное произведение одноименных орт равно единице, разноименных орт – нулю.*

Если $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ и $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+$$
$$+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}=a_xb_x+a_yb_y+$$
$$+a_zb_z.$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений одноименных координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Отсюда для скалярного квадрата следует

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2=|\vec{a}|^2,\ |\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\ .$$

Модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Из второго определения скалярного произведения получаем

$$a_x=|\vec{i}|\cdot\text{пр}_{\vec{i}}\,\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{i}\,,\quad a_y=\vec{a}\cdot\vec{j}\,,\quad a_z=\vec{a}\cdot\vec{k}\ .$$

Координаты вектора равны скалярному произведению вектора на соответствующий орт.

Скалярное произведение позволяет определить угол между векторами в прямоугольных координатах.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi .$$

Отсюда $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. В координатах получаем следующую формулу:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}} .$$

Учитывая координаты орт $\vec{i}$ = (1; 0; 0), $\vec{j}$ = (0; 1; 0), $\vec{k}$ = (0; 0; 1), получаем выражения для направляющих косинусов: $a_x=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha$, $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$,

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}} .$$

Условие ортогональности векторов принимает вид

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0 .$$

Напомним, что условие коллинеарнорсти

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda .$$

Для приложений исключительно важным является физический смысл скалярного произведения.

По определению работа постоянной силы при перемещении тела на прямолинейном отрезке пути есть произведение проекции силы на путь. То есть $A=|\vec{F_s}|\cdot|\vec{S}|$, $|\vec{F_s}|=|\vec{F}|\cos\varphi$ и $A=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cos\varphi=\vec{F}\cdot\vec{S}$. Таким образом, *физический смысл скалярного произведения – работа силы на прямолинейном участке пути.*

П р и м е р 1. Вычислить работу, произведенную силой $\vec{F}$ = (3; 2; –1) при перемещении тела из точки M(2; 3; –1) в точку N(3; 5; 4), и угол между направлением силы и перемещения.

Решение.

Перемещение $\vec{S}=\overrightarrow{MN}=(3-2;5-3;4+1)$. Имеем: $\vec{S}=1\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+5\cdot\vec{k}$, $\vec{F}=3\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-1\cdot\vec{k}$.

Работа $A=\vec{F}\cdot\vec{S}=1\cdot3+2\cdot2+5\cdot(-1)=3+4-5=2$ (ед.раб).

Косинус искомого угла $\cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{S}}) = \dfrac{\vec{F} \cdot \vec{S}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{S}|}$. Тогда получаем, что $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{9+4+1} \cdot \sqrt{1+4+25}} = \dfrac{2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{30}} = \dfrac{2}{2\sqrt{7 \cdot 15}} = \dfrac{1}{\sqrt{105}}$ и сам угол в этом случае $\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{105}} \approx 84{,}4^\circ$.

П р и м е р 2. Даны координаты вершин треугольника $A(-3; -2)$, $B(3; 4)$, $C(1; 0)$. Найти: 1. Координаты точки D – основания высоты h_B, 2. Угол A треугольника ABC.

Решение.

1. Искомая точка $D(x; y)$ является концом вектора $\overrightarrow{BD} = (x_D - x_B; y_D - y_B)$, $\overrightarrow{BD} = (x - 3; y - 4)$. Аналогично находим векторы $\overrightarrow{AC} = (4; 2)$ и $\overrightarrow{AD} =$ $= (x + 3; y + 2)$. Используем условия перпендикулярности и параллельности векторов:

$\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x - 3)\cdot 4 + (y - 4)\cdot 2 = 0;$

$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+2}{2}$.

Решая полученную систему уравнений

$$\begin{cases} (x-3)\cdot 2 + y - 4 = 0, \\ \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+2}{2}, \end{cases}$$

получаем координаты точки D. $D\left(\dfrac{21}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$.

2. Поскольку $\angle A = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, нам потребуются векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Вектор $\overrightarrow{AC} = (4; 2)$ найден выше. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$, $\overrightarrow{AB} = (6; 6)$.

По формуле $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$ находим косинус угла:

$$\cos(\angle A) = \frac{6 \cdot 4 + 6 \cdot 2}{\sqrt{6^2 + 6^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{36}{6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Тогда $\angle A = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}} \approx 18^\circ$.

4.5 Векторное произведение векторов

Определение 4.8. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

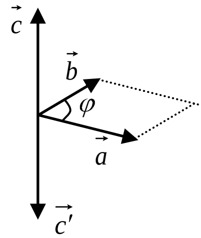
1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$ (φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$);

2) $\vec{c}\perp\pi(\vec{a};\vec{b})$ – перпендикулярен к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку (одноименную с координатной).

Обозначение векторного произведения: $\vec{a}\times\vec{b}$, $[\vec{a};\vec{b}]$.

Из п.1) следует, что модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Условия 2) и 3) определяют направление вектора $\vec{c}$. Если пользуются левой системой координат, то $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}'$ (векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}'$ образуют левую тройку).

Отметим *свойства векторного произведения*:

1 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$. Векторное произведение антикоммутативно.

Действительно. Их модули равны, так как параллелограмм один и тот же. Векторы $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}'=\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярны одной и той же плоскости, но имеют противоположное направление: $\vec{c}=-\vec{c}'$.

2 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{b}\times\vec{a})$ – выполняется ассоциативный (сочетательный) закон относительно числового множителя.

3 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ – выполняется дистрибутивный (распределительный) закон относительно сложения.

Свойства 2 и 3 обусловливают *линейность* векторного произведения.

4 $\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$ – *необходимое и достаточное условие коллинеарности* векторов – равенство векторного произведения нулю.

Доказательство свойств 2–4 проводятся путем проверки пунктов определения векторного произведения.

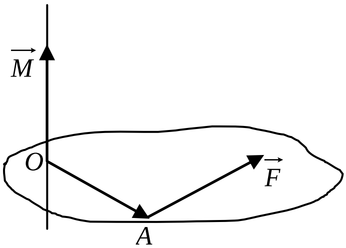
Пример. Вычислить $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$.

Решение.

$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{0}=2(\vec{b}\times\vec{a})$.

В примере мы получили равенство векторов, значит их модули также равны: $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=2|\vec{b}\times\vec{a}|$. Таким образом, удвоенная площадь параллелограмма равна площади параллелограмма, построенного на его диагоналях.

Физический смысл векторного произведения – момент сил. Если тело закреплено в точке *O*, а сила $\vec{F}$ приложена к точке *A*, то *момент силы* $\vec{F}$ *относительно точки O* (*вращающий момент силы*) равен $\vec{M}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$.



Найдем выражение векторного произведения через координаты. Для этого рассмотрим векторное произведение орт $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Заметим, что $\vec{i}\times\vec{i}=0$, так как по п. 1 определения векторного произведения $|\vec{i}\times\vec{i}|=|\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cdot\sin\varphi=1\cdot1\cdot\sin0=0$. Аналогично, $\vec{j}\times\vec{j}=0$, $\vec{k}\times\vec{k}=0$.

Найдем $\vec{i}\times\vec{j}$. Согласно определению

1) $|\vec{i}\times\vec{j}|=1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1$;

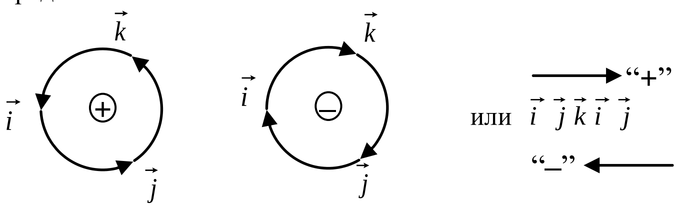
2) вектор произведения направлен перпендикулярно плоскости *xOy*.

3) по правилу правой руки он направлен в положительном направлении оси *Oz*.

Таким образом, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$. По свойству 1 $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$. Аналогично, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$.

Векторное произведение одноименных орт равно нулю, разноименных – третьему орту со знаком, определяемым по правилу правой руки.

Для определения знака можно воспользоваться схемами



против часовой стрелке

по часовой стрелке

Пусть заданы векторы $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ и $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$. Их векторное произведение (по свойствам 1–4 и правилам перемножения орт):

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+$$

$$+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+$$

$$+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}=0+a_xb_y\vec{k}+a_xb_z(-\vec{j})+a_yb_x(-\vec{k})+0+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}+$$

$$+a_zb_y(-\vec{i})+0=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

Полученное выражение можно записать в виде определителя третьего порядка (раскрываемого по элементам первой строки).

Таким образом,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

что очень легко запомнить. Если $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$, то

$$\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}\ \text{ и }\ \vec{c}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right).$$

Здесь учтено, что при раскрытии определителя получаем слагаемое

$$(-1)^{1+2}\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\vec{j}.$$

Также

$$|\vec{c}|=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}=\sqrt{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2}.$$

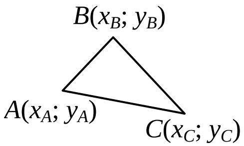
Из выражения векторного произведения через координаты следует, что *площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения векторов, являющихся его смежными сторонами*.

Площадь треугольника равна половине модуля векторного произведения любых двух векторов – сторон треугольника.

Если треугольник лежит в координатной плоскости *xOy,* то получаем:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}(x_B-x_A;\,y_B-y_A)=\vec{a}(a_x;a_y)=\vec{a}(a_x;a_y;0);$$

$$\overrightarrow{AC}=\vec{b}(x_C-x_A;\,y_C-y_A)=\vec{b}(b_x;b_y)=\vec{b}(b_x;b_y;0).$$



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & 0\\ b_x & b_y & 0\end{vmatrix}.$$

Раскрыв определитель по элементам третьего столбца, получим $S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\left(\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\left(\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$. Подставим координаты векторов и вычислим определитель:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\left(\begin{vmatrix}x_B-x_A & y_B-y_A\\ x_C-x_A & y_C-y_A\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{mod}(x_By_C-x_By_A-x_Ay_C+x_Ay_A-$$

$$-x_Cy_B+x_Cy_A+x_Ay_B-x_Ay_A)=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}.$$

Выражение в скобках свернули в определитель третьего порядка. Таким образом, получили формулу для вычисления площади треугольника, лежащего в координатной плоскости *xOy*: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$.

Пример 1. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=(1;2;-3)$ и $\vec{b}=(4;0;5)$.

Решение.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & 5\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=10\vec{i}-17\vec{j}-8\vec{k}.$$

Пример 2. Найти площадь треугольника *ABC*, если *A*(2; –3), *B*(4; 0), *C*(1; –2).

Решение.

Можем воспользоваться выведенной формулой для нахождения площади треугольника, лежащего в плоскости *xOy*, то есть

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix},$$

либо общей формулой пощади треугольника в пространстве $S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$, принимая в этом случае $A(2; –3; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(1; –2; 0)$. Решим задачу вторым методом. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Напомним, что $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;\, y_B-y_A;\, z_B-z_A)$. В нашем случае вектор $\overrightarrow{AB}=\quad=(4-2;\, 0-(-3);\, 0-0)$, то есть $\overrightarrow{AB}=(2; 3; 0)$. Аналогично, $\overrightarrow{AC}=(-1; 1; 0)$.

Следовательно,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 2 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\vec j\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=(2+3)\vec k=5\vec k;$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\mathrm{mod}(5\vec k)=\frac{5}{2}.$$

Пример 3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec a=\vec m+2\vec n$ и $\vec b=3\vec m-4\vec n$, где $\vec m$ и $\vec n$ – единичные векторы, образующие угол φ = 30°.

Решение.

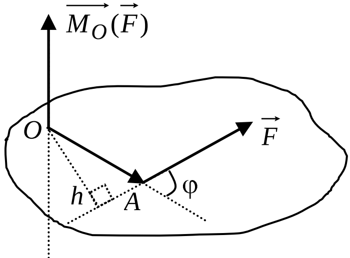
На основании свойств векторного произведения получаем

$$\vec c=\vec a\times\vec b=(\vec m+2\vec n)\times(3\vec m-4\vec n)=\vec m\times 3\vec m+2\vec n\times 3\vec m-\vec m\times 4\vec n-2\vec n\times 4\vec n=$$
$$=0+6(\vec n\times\vec m)+4(\vec n\times\vec m)=10(\vec n\times\vec m).$$

Тогда

$$S_{\text{пар-ма}}=\mathrm{mod}(\vec c)=10\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{6}=10\cdot\frac{1}{2}=5.$$

Приложения векторного произведения. Векторное произведение находит широкое применение в физике, механике и в других дисциплинах, прежде всего через понятие момента вектора (момента силы, момента количества движения и так далее).



В качестве примера рассмотрим момент силы относительно точки.

В точке A твердого тела приложена сила $\vec{F}$. Моментом силы $\vec{F}$ относительно произвольной точки O называется вектор $\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$, выходящий из точки O перпендикулярно плоскости, определяемой векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{F}$ и численно равный произведению силы на плечо: $\left|\overrightarrow{M_O}(\vec{F})\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot h = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \sin\varphi = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{OA}, \vec{F}})$. Причем векторы $\overrightarrow{OA}$, $\vec{F}$, $\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$ образуют правую тройку.

Согласно определению, $\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$, то есть момент сил есть векторное произведение.

П р и м е р 4. Твердое тело закреплено в точке $A(1; 2; -3)$. При этом в точке $B(4; 0; -4)$ приложена сила $\vec{F} = (5; 3; 0)$. Найти момент силы относительно точки A.

Решение.

Найдем вначале координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Напомним, что $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. В нашем случае $\overrightarrow{AB} = (4-1; 0-2; -4-(-3))$, то есть $\overrightarrow{AB} = (3; -2; -1)$.

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 19\vec{k}$$

Величина момента $\left|\overrightarrow{M_A}(\vec{F})\right| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 19^2} = \sqrt{395}$.

4.6 Смешанное произведение трех векторов

Определение 4.9. *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, получаемое от умножения векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ первых двух векторов на третий $\vec{c}$ скалярно. Оно называется векторно-скалярным произведением.

Обозначение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$.

Найдем выражение смешанного произведения через координаты сомножителей.

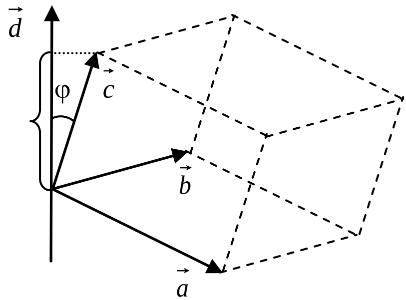
Пусть $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ и $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$. Тогда

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k},\quad \vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}.$$

В этом случае $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z$.

Правую часть равенства можем рассматривать как разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки. Сворачивая его, получим $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Установим геометрический смысл смешанного произведения. Пусть некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку. Обозначим $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$, причем $|\vec{d}|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По второму определению скалярного произведения $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=|\vec{d}|\,\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}=S\cdot h=V$.



Для правой тройки угол φ острый и $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}$ есть h – высота параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. (При левой ориентации тройки векторов $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}=-h$ будет иметь знак “–”). Таким образом, для правой тройки векторов-сомножителей смешанное произведение дает объем параллелепипеда, построенного на них, а для левой – дает объем со знаком “–”. (Поэтому говорят об “ориентированном” объеме):

$$V = \pm(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

“+” берется для правой тройки и “–” для левой, то есть если произведение даст “–”, то берут знак “–”, так что итоговый знак “+”.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ *по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях. Оно положительно, если тройка правая и отрицательно, если тройка левая.*

Свойства смешанного произведения. Исходя из геометрического смысла смешанного произведения, без особого труда можно получить свойства смешанного произведения векторов:

1 При перестановке местами любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}.$$

2 Смешанное произведение допускает круговую перестановку множителей:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}.$$

3 Если смешанное произведение равно нулю, то сомножители компланарны. И обратно.

Это свойство дает *необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов*:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим некоторые приложения смешанного произведения.

П р и м е р 1. Определить ориентацию тройки векторов $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (-2; 0; 4)$, $\vec{c} = (2; 3; 0)$.

Решение.

Как следует из рассмотрения геометрического смысла смешанного произведения, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, если векторы в этой последовательности образуют правую тройку, и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, если левую.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 0 + (-2)\cdot 3\cdot(-3) + 2\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot(-3) - 1\cdot 3\cdot 4 -$$

$$-(-2)\cdot 2\cdot 0 = 0 + 18 + 16 - 0 - 12 - 0 = 22 > 0$$

Следовательно, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

П р и м е р 2. Определить высоту AK треугольной пирамиды $ABCD$, если она задана вершинами $A(7; 3; -1)$, $B(3; -1; 5)$, $C(5; 2; 6)$ и $D(-1; 3; 4)$.

Решение.

Найдем координаты векторов, выходящих из точки B:

$$\overrightarrow{BA} = (7-3;\ 3+1;\ -1-5) = (4;\ 4;\ -6),$$

$$\overrightarrow{BC} = (5-3;\ 2+1;\ 6-5) = (2;\ 3;\ 1),$$

$$\overrightarrow{BD} = (-1-3;\ 3+1;\ 4-5) = (-4;\ 4;\ -1)\ .$$

Объем треугольной пирамиды $V = \dfrac{1}{6}\operatorname{mod}(\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{BD})$. С другой стороны $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$. Площадь основания $S_{\text{осн}} = S_{BCD} = \dfrac{1}{2}\operatorname{mod}(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD})$, $h = \left|\overrightarrow{AK}\right|$. Отсюда

$$\left|\overrightarrow{AK}\right| = \frac{3\cdot\frac{1}{6}\operatorname{mod}(\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{BD})}{\frac{1}{2}\operatorname{mod}(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD})} = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\operatorname{mod}(-156)}{\operatorname{mod}(-7\vec{i} - 2\vec{j} + 20\vec{k})} = \frac{156}{\sqrt{453}}.$$

Отметим, что с помощью смешанного произведения легко устанавливается факт, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в V_3: если смешанное произведение $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \neq 0$, то векторы не компланарны, они линейно независимы и образуют базис в V_3.

В заключение отметим, что большое количество разобранных примеров на векторы содержится в методических пособиях Задорожнюк Е.А. [3], а также Дергачевой И.М. и Сокольского А.Ю. [6], которые рекомендуются для использования в процессе изучения материала.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Бугров Я. С.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. для вузов. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 224 с.

2 **Гурский, Е. И.** Основы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. для инж.-техн. спец. вузов / Е. И. Гурский. – 2-е изд., доп. – Минск : Высш. школа, 1982. – 272 с.

3 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 2-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

4 **Сафонов, С. А.** Линейная алгебра : учеб.-метод. пособие : в 3 ч. / С. А. Сафонов, Д. Н. Симоненко. – Гомель : БелГУТ, 2012. – Ч. 1 : Определители. Матрицы. Уравнения. – 42 с.

5 **Задорожнюк, Е. А.** Векторы / Е. А. Задорожнюк – Гомель : БелГУТ, 2008. – 49 с.

6 **Дергачева, И. М.** Линейная и векторная алгебра / И. М. Дергачева, А. Ю. Сокольский. – Гомель : БелГУТ, 2012. – 40 с.