МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Высшая математика»

А. М. ЩЕРБО, И. П. ШАБАЛИНА, А. И. ПРОКОПЕНКО

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Одобрено методической комиссией электротехнического факультета

Гомель 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Высшая математика»

А. М. ЩЕРБО, И. П. ШАБАЛИНА, А. И. ПРОКОПЕНКО

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2010

УДК 517(075.8)
ББК 22.161
Щ66

Р е ц е н з е н т – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и геометрии *В. В. Подгорная* (УО «ГГУ им. Ф. Скорины»).

Щербо, А. М.

Щ66 Производная и ее приложения : учеб.-метод. пособие / А. М. Щербо, И. П. Шабалина, А. И. Прокопенко ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2010. – 80 с.
ISBN 978-985-468-768-1

Кратко изложены основные теоретические сведения о производной и ее приложениях. Излагаемый материал сопровождается большим количеством примеров с подробными пояснениями, что существенно облегчает усвоение основных положений теории. Приведены задачи для аудиторных и домашних работ. Для проверки полученных знаний даны самостоятельные и контрольная работы.

Предназначено для студентов всех специальностей и составлено в соответствии с действующей программой по высшей математике.

УДК 517. 33(075.8)
ББК 22.161.1

ISBN 978-985-468-768-1

1 ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОСТЫХ ФУНКЦИЙ

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению независимого переменного при условии, что это последнее стремится к нулю произвольным образом:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Нахождение производной y' называют дифференцированием функции. Производная $y' = f'(x)$ представляет собой скорость изменения функции в точке x.

***Пример* 1.1.** Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = 3x^2 - 2x$.

Решение. Найдем приращение функции

$$\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f(x) = 3\left(x+\Delta x\right)^2 - 2\left(x+\Delta x\right) - 3x^2 + 2x =$$
$$= 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x - 2\Delta x - 3x^2 + 2x = 6x\Delta x - 2\Delta x + 3\Delta x^2.$$

Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x - 2\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(6x - 2 + 3\Delta x\right) = 6x - 2.$$

Имеют место следующие основные правила дифференцирования (здесь c – постоянная, а u и v – функции от x, имеющие производные):

$$(c)' = 0; \quad (1.2) \qquad (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (1.5)$$

$$(x)' = 1; \quad (1.3) \qquad (uv)' = u'v + uv'; \quad (1.6)$$

$$(cu)' = cu'; \quad (1.4) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (1.7)$$

Пользуясь приведенным определением производной, можно получить таблицу формул дифференцирования основных функций:

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}; \quad (1.8) \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (1.14)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (1.9) \qquad (\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad (1.15)$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a; \quad (1.10) \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (1.16)$$

$$\left(e^x\right)' = e^x; \quad (1.11) \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (1.17)$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (1.12) \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (1.18)$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \quad (1.13) \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (1.19)$$

***Пример* 1.2.** Найти производную функции $y = 4x^3 - 4x + \dfrac{5}{x}$.

Решение. Основываясь на формуле (1.5), получаем

$$y' = (4x^3)' - (4x)' + \left(\frac{5}{x}\right)'.$$

Далее, применяя формулу (1.4), имеем

$$y' = 4\left(x^3\right)' - 4\left(x\right)' + 5\left(\frac{1}{x}\right)'.$$

Применяя формулы (1.8), (1.3) и (1.5), получаем

$$y' = 4\cdot 3x^2 - 4\cdot 1 + 5\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 12x^2 - 4 - \frac{5}{x^2}.$$

Естественно, при некотором навыке подобные промежуточные выкладки опускают.

Пример **1.3.** Найти y', если $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$.

Решение. Применяя формулы (1.7), (1.8) и (1.18), получим

$$y' = \frac{\dfrac{1}{1+x^2}\cdot x^2 - \operatorname{arctg} x\cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x}{x^3\left(1+x^2\right)}.$$

Если это целесообразно, т. е. ведет к упрощению дифференцирования, то функцию можно предварительно тождественно преобразовать, а потом уже находить производную.

Пример **1.4.** Найти y', если $y = \dfrac{2x - x^2 + \sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}}$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$y = \frac{2x - x^2 + x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}} = 2x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{7}{6}}.$$

Тогда

$$y' = 2\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{7}{6}x^{-\frac{13}{6}} = -x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{7}{6}x^{-\frac{13}{6}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{7}{6\sqrt[6]{x^{13}}}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Используя правила дифференцирования и таблицу производных основных функций, найти производные:

1.1 $y=3x^5-2x^3+0,4.$

1.2 $y=2\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}+\sqrt[3]{2}.$

1.3 $y=5x^{-3}+x^{-1}+0,1x.$

1.4 $y=\frac{3x^2-6x+7}{4x}.$

1.5 $y=\frac{4x^3-2x}{5-x^2}.$

1.6 $y=\frac{\sin x+5x^3}{4x}.$

1.7 $y=(9-2x)\left(2x^3-9x^2+1\right).$

1.8 $y=\left(\frac{2}{x}+3x\right)\left(\sqrt{x}-1\right).$

1.9 $y=\left(6\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x^2}\right)(7x-3).$

1.10 $y=(\sin x+3\cos x)\sqrt[3]{x}.$

1.11 $y=(\operatorname{tg}x-1)\arcsin x.$

1.12 $y=\left(\sqrt[5]{x^3}-1\right)\operatorname{arctg}x.$

1.13 $s=\frac{t^2+2\cos t}{\sin t}.$

1.14 $y=\frac{2\cos x-\sin x}{3\sin x+\cos x}.$

1.15 $y=\frac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt[4]{x}+1}.$

1.16 $y=\frac{\arcsin x}{x+1}-\frac{2}{x^2}.$

1.17 $y=e^x\cdot\operatorname{ctg}x.$

1.18 $y=7^x\cdot\operatorname{arctg}x.$

1.19 $y=3\operatorname{ctg}x+\frac{4}{x^3}.$

1.20 $y=\frac{\operatorname{tg}x\cdot\ln x}{5^x}.$

1.21 $y=\frac{10^x\cdot\ln x}{\operatorname{ctg}x}.$

1.22 $y=\frac{e^x\cdot\cos x}{1+\ln x}.$

1.23 $y=\frac{\log_5 x}{5^x}.$

1.24 $y=\ln x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{2^x}{x}.$

1.25 $y=\frac{7^x+1}{x^2\cdot\operatorname{arctg}x}.$

1.26 $s=(\ln t-\log_2 t)\sqrt[5]{t^2}.$

1.27 $y=-8\sqrt[4]{x}\cdot\operatorname{arctg}x.$

1.28 $y=0,2\sqrt[4]{x}-x^3+\frac{1}{5x^2}.$

1.29 $y=x^{-4}-3x^{-3}-0,7x^{-2}.$

1.30 $y=\frac{6x^4-7x^3+x^2-5x+3}{2x^3}.$

1.31 $y=\frac{1}{e^x+1}.$

1.32 $y=\sqrt{x}\cdot\arccos x.$

1.33 $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2).$

1.34 $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}.$

1.35 $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$

1.36 $y = \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}.$

1.37 $y = \left(\sqrt[3]{x} + 2x\right)\left(1 + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\right).$

1.38 $y = 3\arcsin x - 4\sqrt{x}.$

1.39 $y = \dfrac{\arccos x}{x - \arcsin x}.$

1.40 $y = 4^x \cdot \arccos x - \dfrac{e^x}{x}.$

1.41 $\tau = \dfrac{\cos\varphi + \varphi^2}{e^{\varphi}}.$

1.42 $y = 2\ln x - \dfrac{3}{x^2}.$

1.43 $y = 8\sqrt[4]{x^3} - 3\log_9 x.$

1.44 $y = \dfrac{x^5 + 2^x}{e^x}.$

1.45 $y = \left(\cos x - 2^x\right)\left(4^x + 3\sin x\right).$

1.46 $y = \dfrac{\left(\sqrt{x} + 2\right)\cdot 6^x}{\operatorname{arctg} x}.$

1.47 $y = \dfrac{x^3}{4^x}.$

1.48 $y = 5^x\left(x^5 - 10x\right).$

1.49 $y = \pi x^2 - \arccos x.$

1.50 $y = \sin x \cdot \arccos x.$

2 ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ есть также дифференцируемая функция, причем

$$y' = f_u'(u)\cdot u_x', \tag{2.1}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{2.1$'$}$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, можно получить таблицу более общих формул дифференцирования основных элементарных функций, где $u = \varphi(x)$:

$$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'; \qquad (2.2)$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'; \qquad (2.3)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'; \qquad (2.4)$$

$$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \qquad (2.5)$$

$$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'; \qquad (2.6)$$

$$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'. \qquad (2.7)$$

$$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'. \qquad (2.8)$$

$$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'. \qquad (2.9)$$

$$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'. \qquad (2.10)$$

$$\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'. \qquad (2.11)$$

$$\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'. \qquad (2.12)$$

$$\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \qquad (2.13)$$

$$\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \qquad (2.14)$$

$$\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'. \qquad (2.15)$$

$$\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'. \qquad (2.16)$$

$$\left(\mathrm{sh}\, u\right)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'. \qquad (2.17)$$

$$\left(\mathrm{ch}\, u\right)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'. \qquad (2.18)$$

$$\left(\mathrm{th}\, u\right)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'. \qquad (2.19)$$

$$\left(\mathrm{cth}\, u\right)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'. \qquad (2.20)$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'. \qquad (2.21)$$

***Пример* 2.1.** Найти y', если $y = \left(2x^3 - 2x + 5\right)^7$.

Решение. Полагая $y = u^7$, где $u = 2x^3 - 2x + 5$, согласно (2.2) будем иметь

$$y' = 7u^6 \cdot \left(6x^2 - 2\right) = 7\left(2x^3 - 2x + 5\right)^6 \cdot \left(6x^2 - 2\right).$$

***Пример* 2.2.** Найти y', если $y = \cos^4 3x$.

Решение. Полагая $y = u^4$, где $u = \cos v$, $v = 3x$, находим

$$y' = 4u^3 \cdot (-\sin v) \cdot 3 = -12\cos^3 3x \cdot \sin 3x.$$

При дифференцировании сложных функций обычно обходятся без введения промежуточных аргументов $u, v, \ldots,$ их только подразумевают. Например, последовательность нахождения производной функции, рассмотренной в данном примере, можно записать так:

$$y' = 4\cos^3 3x \cdot \left(\cos 3x\right)' = 4\cos^3 3x \cdot \left(-\sin 3x\right) \cdot \left(3x\right)' =$$

$$= 4\cos^3 3x \cdot \left(-\sin 3x\right)' \cdot 3 = -12\cos^3 3x \cdot \sin 3x.$$

Кроме того, нет необходимости последовательно записывать, что сначала взята производная степенной функции с основанием $\cos 3x$, а затем производная косинуса и на последнем этапе производная его аргумента. Результат можно записать сразу:

$$y' = 4\cos^3 3x \cdot \left(-\sin 3x\right) \cdot 3.$$

В последующих примерах так и будем поступать.

Последовательность нахождения сложной производной можно задавать с помощью скобок. Для функции данного примера

$$y = \left(\cos\left(3x\right)\right)^4.$$

Чтобы не путаться в сложных случаях при дифференцировании, можно рекомендовать придерживаться следующего правила: если подлежащая дифференцированию функция является результатом целого ряда действий над аргументом x, то за промежуточный аргумент u следует принять результат всех этих действий, кроме последнего. Например, если $y = \operatorname{tg}^4 \sqrt[3]{\cos 2x}$, то $u = \operatorname{tg}\sqrt[3]{\cos 2x}$, так как при вычислении последним действием является возведение в четвертую степень. Тогда производная

$$y' = 4\operatorname{tg}^3 \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt[3]{\cos 2x}} \cdot \frac{1}{3}\left(\cos 2x\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-\sin 2x\right) \cdot 2 =$$

$$= \frac{-8\operatorname{tg}^3 \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sin 2x}{3\cos^2 \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos^2 2x}}.$$

***Пример* 2.3.** Найти производную функции

$$y = \cos\left(1 + t^2 - 2t + \sqrt{2t - t^3}\right)^5.$$

Решение.

$$y' = -\sin\left(1 + t^2 - 2t + \sqrt{2t - t^3}\right)^5 \cdot 5\left(1 + t^2 - 2t + \sqrt{2t - t^3}\right)^4 \times$$

$$\times\left(2t-2+\frac{1}{2\sqrt{2t-t^3}}(2-3t^2)\right).$$

***Пример* 2.4.** Найти производную функции $y=5^{x^2-\ln 3x}$.

Решение. $y'=5^{x^2-\ln 3x}\cdot\ln 5\cdot\left(2x-\frac{1}{3x}\cdot 3\right)$.

***Пример* 2.5.** Найти производную функции $y=\ln^2\arccos 2x$.

Решение.

$$y'=2\ln\arccos 2x\cdot\frac{1}{\arccos 2x}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2=\frac{-4\ln\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}\cdot\arccos 2x}.$$

***Пример* 2.6.** Найти производную $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\operatorname{ctg}^3 x^4$.

Решение.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\cdot\operatorname{ctg}^3 x^4+\sqrt{1-x^2}\cdot 3\operatorname{ctg}^2 x^4\cdot\frac{-1}{\sin^2 x^4}\cdot 4x^3=$$

$$=\frac{-x\operatorname{ctg}^3 x^4}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{12x^3\operatorname{ctg}^2 x^4}{\sin^2 x^4}.$$

***Пример* 2.7.** Вычислить $f'(1)$, если $f(x)=3x^4-2x^3+x^2-2x$.

Решение. Находим производную заданной функции:

$$f'(x)=12x^3-6x^2+2x-2.$$

Подставляем в выражение производной вместо x единицу:

$$f'(1)=12\cdot 1-6\cdot 1+2\cdot 1-2=6.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти производную функций:

2.1 $y=\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$.

2.2 $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{3x}}$.

2.3 $y=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$.

2.4 $y=\log_3\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

2.5 $y=\ln\left(5x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

2.6 $y=\arcsin\frac{2x^2}{1+x^4}$.

2.7 $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\ln 3t}$.

2.8 $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$.

2.9 $y=(\operatorname{ctg}4x)^{2e^x}$.

2.10 $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$.

2.11 $y=\ln\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}$.

2.12 $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$.

2.13 $y=\frac{2}{3}\sqrt{\left(\operatorname{arcctg}e^{4x}\right)^3}$.

2.14 $y=\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\frac{1-2x}{1+2x}}$.

2.15 $y=\arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

2.16 $y=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

2.17 $y=-\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}}$.

2.18 $y=\operatorname{tg}\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

2.19 $y=\ln\operatorname{tg}\frac{e^{2\sin 5x}}{4}$.

2.20 $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

2.21 $y=\log_2\sin^2 3t$.

2.22 $y=5^{\ln 3x\cdot\cos^3(1-x)}$.

2.23 $y=x^{\arcsin x}$.

2.24 $y=\arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

2.25 $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

2.26 $y=\log_{e^2}\left(x^n+\sqrt{x^{2n}+1}\right)$.

2.27 $y=\frac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$.

2.28 $y=\arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$.

2.29 $y=5^{x^3-3x^2+2x}$.

2.30 $y=\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot e^{-\arcsin 2x}$.

2.31 $y=\sqrt{(x+5)^3}\cdot\arccos^4 x$.

2.32 $y=\log_5(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^2 x^3$.

2.33 $y=\frac{e^{\operatorname{tg}3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$.

2.34 $y=\frac{\log_3(4x+5)}{2\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$.

2.35 $y=\operatorname{ch}^3 9x\cdot\operatorname{arctg}(5x-1)$.

2.36 $y=\sqrt[6]{\frac{x-9}{x+9}}\cdot\operatorname{tg}\left(3x^2-4x+1\right)$.

2.37 $y=(\operatorname{th}5x)^{\arcsin(x+1)}$.

2.38 $y=\left(\operatorname{arcctg}(3x-3)\right)^{\sin 4x}$.

2.39 $y=\dfrac{\arcsin^3 4x}{\operatorname{sh}(3x+1)}$.

2.40 $y=\cos^5 3x\cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3$.

2.41 $y=3^{-x^3}\cdot \operatorname{arctg} 2x^5$.

2.42 $y=\ln\ln^3\ln^2 x$.

2.43 $y=\dfrac{(x+2)^7\cdot(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$.

2.44 $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4\cdot(x-3)^5}$.

2.45 $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$.

2.46 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

2.47 $y=\ln\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$.

2.48 $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}$.

3 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная функции $y=f(x)$ при значении аргумента $x=x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0:

$$y'(x_0)=f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha. \tag{3.1}$$

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \tag{3.2}$$

Уравнение нормали, т. е. прямой, проходящей через точку касания $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярной касательной, записывается в виде

$$y-y_0=-\frac{1}{f(x_0)}(x-x_0). \tag{3.3}$$

Производная функции $y=f(x)$, вычисленная при $x=x_0$, т. е. $f'(x_0)$, представляет собой скорость изменения функции относительно независимой переменной x в точке $x=x_0$. Если зависимость между пройденным путем s и временем t при прямолинейном движении выражается формулой $s = s(t)$, то скорость v в любой момент времени t есть производная

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt}, \qquad (3.4)$$

а ускорение (т. е. скорость изменения скорости движения)

$$a = \frac{dv}{dt}. \qquad (3.5)$$

***Пример* 3.1.** Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 + 4x$ в точке $A(1, 2)$.

Решение. Находим производную и ее значение при $x_0 = 1$: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4,\ \ f'(1) = 3 - 6 + 4 = 1.$

Воспользовавшись формулами (3.2) и (3.3), составим уравнение касательной: $y = 2 = 1(x-1),\ y = x + 1$ и уравнение нормали: $y - 2 = -1(x-1),\ y = -x + 3.$

***Пример* 3.2.** Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 + 3x - 5,$ параллельной прямой $7x - y + 3 = 0.$

Решение. Чтобы составить уравнение касательной, нужно найти координаты точки касания $M_0(x_0, y_0)$. Для этого найдем угловой коэффициент прямой $k_{пр} = 7$ и на основании условия параллельности $k_{пр} = k_{кас}$ получим $k_{кас} = \left(f'(x)\right)_{M_0} = 2x_0 + 3; 2x_0 + 3 = 7; x_0 = 2.$ Тогда $y_0 = 2^2 + 3 \cdot 2 - 5 = 5.$

Уравнение касательной будет иметь вид

$$y - 5 = 7(x - 2),\ y = 7x - 9.$$

***Пример* 3.3.** Тело движется прямолинейно по закону $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ (s выражается в метрах, t – в секундах). Найти скорость и ускорение движения через 1 с после начала движения.

Решение. Скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени: $v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24.$

Тогда $v(1) = 3 - 18 + 24 = 9$ (м/с).

Ускорение прямолинейного движения равно производной скорости по времени: $a(t)=\frac{dv}{dt}=6t-18,$ и, следовательно, $a(1)=-12$ (м/с^2).

***Пример* 3.4.** Вращающееся колесо вагона задерживается тормозом. Угол φ, на который колесо поворачивается в течение t с, определяется равенством $\varphi=1+2t-5t^2$. Найти угловую скорость и угло-
вое ускорение движения через 0,1 с после включения тормоза. Определить, в какой момент времени колесо остановится.

Решение. Угловая скорость движения колеса

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=2-10t,\ \omega(0,1)=2-1=1\left(1/\text{с}\right).$$

Угловое ускорение

$$a=\frac{d\omega}{dt}=-10\left(1/\text{с}^2\right),\ \text{т. е. ускорение постоянное.}$$

Колесо остановится, когда скорость $\omega=0;\ 2-10t=0;\ t=0,2$ (с).

***Пример* 3.5.** Радиус основания цилиндра увеличивается со скоростью 3 м/с, а высота его уменьшается со скоростью 2 м/с. Какова скорость изменения объема цилиндра?

Решение. Объем цилиндра $V=\pi r^2h,$ где r – радиус основания, h – высота цилиндра. Продифференцируем обе части этого равенства по времени t, учитывая, что V, r и h зависят от t:

$$\frac{dV}{dt}=\pi\left(2r\frac{dr}{dt}h+r^2\frac{dh}{dt}\right).$$

По условию $\frac{dr}{dt}=3$ м/с, $\frac{dh}{dt}=2$ м/с.

Тогда скорость изменения объема цилиндра

$$\frac{dV}{dt}=\pi\left(6rh-2r^2\right).$$

***Пример* 3.6.** На кривой $y=x^2-4x+1$ найти точку, в которой ордината возрастает в два раза быстрее, чем абсцисса.

Решение. Находим производную

$$y'=\frac{dy}{dx}=2x-4.$$

Так как производная характеризует скорость возрастания ординаты функции по сравнению с возрастанием абсциссы, то определим абсциссу точки из условия $2x-4=2,\quad x=3,$ а ордината точки $y=3^2-4\cdot 3+1=-2.$ Получили точку $M\left(3;-2\right).$

Пример **3.7.** Под каким углом пересекаются линии $y=e^x$ и $y=e^{3x}$?

Решение. Под углом между двумя пересекающимися кривыми понимают угол между касательными к этим кривым, проведенным в точке их пересечения.

Найдем точку пересечения кривых, для чего совместно решим систему $\begin{cases} y=e^x, \\ y=e^{3x}. \end{cases}$

$e^x=e^{3x}, x=3x, 2x=0, x=0.\ y=e^0=1.$ Получили точку $A\left(0;1\right).$

Найдем угловые коэффициенты касательных $y'=e^x,\ \ k_1=e^0=1;$ $y'=e^{3x}, k_2=3e^0=3.$

Угол между касательными найдем по формуле $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2};\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{3-1}{1+1\cdot 3}=0{,}5;\ \varphi=\operatorname{arctg}0{,}5.$

Пример **3.8.** Составить уравнение касательной к кривой $y=x^2-4x+5,$ перпендикулярной к прямой $x+2y-8=0.$

Решение. Найдем координаты точки касания $M_0\left(x_0, y_0\right).$ Угловой коэффициент прямой $k_{\text{пр}}=-\dfrac{1}{2}.$ Так как касательная перпендикулярна прямой, то $k_{\text{кас}}=-1/k_{\text{пр}}$ и $k_{\text{кас}}=2$. Получаем

$$k_{\text{кас}}=\left(f'(x)\right)_{M_0}=2x_0-4;\ \ 2x_0-4=2;\ \ x_0=3.$$

Тогда $y_0=3^3-4\cdot 3+5=2.$

Уравнение касательной будет иметь вид $y-2=2\left(x-3\right),$ $y=2x-4.$

Задачи для самостоятельной работы

3.1 Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y = 2x^2 - 6x + 3$ в точке $M_0(1, -1)$.

3.2 Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 4x^2 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

3.3 Составить уравнения касательных к кривой $x^2 + y^2 - 2x + {}$ ${}+2y - 3 = 0$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

3.4 Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$?

3.5 Найти угол между параболами $y = 8 - x^2$, $y = x^2$.

3.6 К кривой $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ провести касательные, параллельные к прямой $3x - y + 1 = 0$.

3.7 Составить уравнения касательных, проведенных к окружности $x^2 + y^2 = 32$ перпендикулярно прямой $x + y + 4 = 0$.

3.8 Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = -\frac{1}{2}$.

3.9 Точка двигается по прямой так, что ее расстояние s от начального пункта через t секунд равно $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. В какой момент точка была в начальном пункте?

3.10 В каких точках линии $y = x^3 + x - 2$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4x - 1$?

3.11 Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{\pi} \cdot \sin\frac{\pi t}{8}$. Определить скорость движения в конце второй секунды.

3.12 По параболе $y = x(8 - x)$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = t\sqrt{t}$. Какова скорость изменения ординаты в точке $M(1; 7)$?

3.13 Тело массой 25 кг движется прямолинейно по закону $s=\ln\left(1+t^2\right)$. Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 2 с после начала движения.

3.14 Радиус основания конуса увеличивается со скоростью 6 м/с, а высота его уменьшается со скоростью 3 м/с. Какова скорость изменения объема конуса?

3.15 Составить уравнение касательной, проведенной из точки $A(0;-0,5)$ к ветви гиперболы $y=\sqrt{x^2-1}$.

3.16 Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=x^2-3x+5$, проведенная в точке $M(2;3)$? Написать уравнение этой касательной.

3.17 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$, проведенные в точке $M(-9;-8)$.

3.18 Составить уравнение касательной к линии $y=x^3+3x^2-5$, перпендикулярной к прямой $2x-6y+1=0$.

3.19 Найти угол между кривыми $y=x^3$ и $y=\frac{1}{x^2}$.

3.20 Найти угол между линиями $y=1+\sin x$, $y=1$.

3.21 В какой точке касательная к линии $y=x^3$ параллельна прямой $12x-y+5=0$?

3.22 В какой точке касательная к линии $y=x^2-4x+5$ перпендикулярна к прямой $x+2y-8=0$?

3.23 Под каким углом пересекаются линии $x^2+y^2=2$ и $y=x^2$?

3.24 Составить уравнения касательных к линии $y=x-\frac{1}{x}$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

3.25 Тело движется вдоль прямой Ox по закону $x=t-\sin t$. Найти скорость и ускорение движения при $t=\frac{\pi}{2}$.

3.26 Вращающееся колесо задерживается тормозом. Угол φ, на который колесо поворачивается в течение t секунд, определяется равенством $\varphi = 4 + 12t - 1{,}5t^2$. Найти угловую скорость и угловое ускорение движения через 3 с после включения тормоза. Определить, в какой момент времени колесо остановится.

3.27 Радиус круга изменяется со скоростью 5 см/с. С какой скоростью изменится длина окружности?

3.28 Точка движется по оси абсцисс по закону $s = \frac{1}{4}(t^4 - 4t^3 + 2t^2 - 12t)$ (s – в метрах, t – секундах). В какой момент времени точка остановится?

4 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Под дифференциалом dy функции $y = f(x)$ понимается главная часть ее приращения Δy, пропорциональная приращению Δx независимой переменной x.

Дифференциал dx независимой переменной x равен ее приращению $dx = \Delta x$.

Дифференциал любой дифференцируемой функции $y = f(x)$ равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной:

$$dy = f'(x)dx. \tag{4.1}$$

Из формулы (4.1) вытекает представление производной в виде частного двух дифференциалов

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Если Δx достаточно мало по модулю, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости, чем Δx, имеет место приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ или

$$f\left(x + \Delta x\right) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x. \tag{4.2}$$

Соотношение (4.2) используют в приближенных вычислениях.

***Пример* 4.1.** Найти дифференциал функции $y = \operatorname{arctg}^2 3x$.

Решение.

$$dy = \left(\operatorname{arctg}^2 3x\right)' dx = 2\operatorname{arctg} 3x \cdot \frac{1}{1+9x^2} \cdot 3dx = \frac{6\operatorname{arctg} 3x dx}{1+9x^2}.$$

***Пример* 4.2.** Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^2 - 3x$ при $x = 4$ и $\Delta x = 0,01$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, которые получаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение.

$$\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f(x) = \left(4 + 0,01\right)^2 - 3\left(4 + 0,01\right) - \left(4^2 - 3 \cdot 4\right) = 0,0501.$$

$$dy = f'(x)\Delta x = \left(2x - 3\right)\Delta x = \left(2 \cdot 4 - 3\right) \cdot 0,01 = 0,05.$$

Абсолютная погрешность

$$| dy - \Delta y | = | 0,05 - 0,0501 | = 0,0001.$$

Относительная погрешность

$$\left| \frac{dy - \Delta y}{\Delta y} \right| = \frac{0,0001}{0,0501} \approx 0,002 = 0,2\ \%.$$

***Пример* 4.3.** При измерении стороны квадрата допущена ошибка в 2 %. По полученному значению стороны вычислена площадь квадрата. Какая при этом допущена погрешность?

Решение. Если x – точное значение стороны квадрата, а $x + \Delta x$ – полученное в результате измерения ее значение, то ошибка измерения $dx = \Delta x = \pm 0,02x$. Ошибка ΔS, сделанная при измерении площади S квадрата, приближенно равна

$$\Delta S \approx dS = d\left(x^2\right) = 2xdx = 2x\left(\pm 0,02x\right) = \pm 0,04x^2 = \pm 0,04S,$$

т. е. погрешность составляет 4 % площади.

***Пример* 4.4.** Вычислить приближенно $\sqrt{16,1}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$ и положим $x = 16$, $\Delta x = 0,1$. Тогда, воспользовавшись формулой (4.2), найдем: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\sqrt{16,1} = f\left(16 + 0,1\right) \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,1 = 4 + \frac{0,1}{8} = 4,0125.$$

Значение $\sqrt{16,1} = 4,0124805$ с точностью 10^{-7}.

5 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f\left(x\right)$ есть производная от ее первой производной:

$$y'' = \left(f'(x) \right)'.$$

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f\left(x\right)$ есть производная от ее второй производной:

$$y''' = \left(f''(x) \right)' \text{ и т. д.}$$

Производная n-го порядка (n-я производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее (n–1)-й производной:

$$y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\left(x\right) \right)'.$$

***Пример* 5.1.** Найти третью производную от функции $y = x^2 - \cos 2x + e^{\frac{x}{2}}$.

Решение. $y' = 2x + 2\sin 2x + \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $y'' = 2 + 4\cos 2x + \dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$,

$$y''' = -8\sin 2x + \frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}.$$

***Пример* 5.2.** Найти производную n-го порядка от функции $y = 5^x$.

Решение.

$$y' = 5^x \ln 5, \quad y'' = 5^x \ln^2 5, \quad y''' = 5^x \ln^3 5, \ldots.$$

Тогда $y^{(n)} = 5^x \ln^n 5$.

Задачи для самостоятельной работы

Для данных функций найти производные указанного порядка.

5.1 $y = x^5 - 7x^3 + 2$; $y''' - ?$

5.2 $S = \operatorname{arctg} 2x$; $S''\left(-1\right) - ?$

5.3 $y = e^{-\varphi}\sin\varphi$. Показать, что эта функция удовлетворяет уравнению $y'' + 2y' + 2y = 0$.

5.4 $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^x$. Показать, что функция удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

5.5 Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

5.6 Показать, что функция $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ удовлетворяет уравнению $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

5.7 $y = \dfrac{x}{6(x+1)}$; $y''' - ?$

5.8 $y = \operatorname{sh}^2 x$; $y''' - ?$ Указание $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

5.9 $y = \dfrac{1}{4} x^2 (2\ln x - 3)$; $y'' - ?$

5.10 $y = -\dfrac{1}{9} x \sin 3x - \dfrac{9}{27} \cos 3x$; $y'' - ?$

5.11 $y = \dfrac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$; $y'' - ?$

Найти производные n-го порядка функций:

5.12 $y = x^n \sqrt{x}$.

5.13 $y = \dfrac{1}{2x+1}$.

5.14 Тело движется прямолинейно по закону $S = t^4 - 2t^2 + 1$. Найти закон изменения скорости и ускорения для данного тела.

5.15 Тело движется прямолинейно по закону $S = 4t - \sin t$. Определить скорость и ускорение при $t = \dfrac{\pi}{2}$.

6 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Если функция $y = f(x)$ задана уравнением, не разрешимым относительно y, то для нахождения производной y' надо продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное уравнение относительно y'.

Пример **6.1.** Найти производную неявной функции $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$.

Решение.

$$3x^2-2\left(\left(x^2\right)'\cdot y^2+x^2\cdot\left(y^2\right)'\right)+5+y'=0,$$

$$3x^2-2\left(2x\cdot y^2+x^2\cdot 2y\cdot y'\right)+5+y'=0,$$

$$3x^2-4xy^2-4x^2y\cdot y'+5+y'=0,$$

$$y'-4x^2y\cdot y'=4xy^2-3x^2-5,$$

$$y'\left(1-4x^2y\right)=4xy^2-3x^2-5,$$

$$y'=\frac{4xy^2-3x^2-5}{1-4x^2y}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти производную неявных функций:

6.1 $x^4+y^4-x^2y^2=0.$

6.2 $x^3+\ln y-x^2e^y=0.$

6.3 $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0.$

6.4 $x^2+3xy+y^2+1=0.$ Вычислить y' в точке $(2;-1)$.

6.5 $e^y+xy=e.$ Вычислить y' в точке $(0;1)$.

6.6 $ye^y-xe^x=y(x-1).$ Вычислить y' в точке $(1;1)$.

6.7 $e^{xy}+x^2+y^2=2.$ Вычислить y' в точке $(1;0)$.

6.8 $y^3-\sin 3x=0.$

6.9 $y=\mathrm{tg}\left(x+y\right).$

6.10 $\sin\left(2x+3y\right)-2y=0.$ Вычислить y' в точке $(0;0)$.

6.11 $\ln y+\dfrac{y}{x}=0.$

6.12 $x^2+y^2=1.$ Найти y''.

6.13 $x^3+y^3-3y=0.$ Найти y''.

6.14 $y=2x+\mathrm{arctg}\,y.$ Найти y''.

6.15 $y^3 - 3y + 3x = 1$. Найти y''.

7 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$.

***Пример* 7.1.** Найти y'_x функции $\begin{cases} x = a\cos^2 2t, \\ y = a\sin^2 2t. \end{cases}$

Решение. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a \cdot 3\sin^2 2t \cdot \cos 2t \cdot 2}{-a \cdot 2\cos 2t \cdot \sin 2t \cdot 2} = -\dfrac{3}{2}\sin 2t.$

***Пример* 7.2.** Найти y''_{xx} функции $\begin{cases} x = t^4 + 2, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

Решение. $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2 - 1}{4t^3},$

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\dfrac{3t^2 - 1}{4t^3}\right)'_t}{\left(t^4 + 2\right)'_t} = \frac{\dfrac{6t \cdot 4t^3 - 12t^2\left(3t^2 - 1\right)}{16t^6}}{4t^3} =$$

$$= \frac{24t^4 - 36t^4 + 12t^2}{16t^9} = \frac{3\left(1 - t^2\right)}{16t^7}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти указанные производные от функций, заданных параметрически:

7.1 $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$ Найти y'_x.

7.2 $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t. \end{cases}$ Найти $y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

7.3 $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right), \\ y = \operatorname{arcctg} t. \end{cases}$ Найти $y'_x\Big|_{t=-\frac{1}{6}}$.

7.4 $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$ Найти $y'_x\big|_{t=0}$.

7.5 $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$ Найти y'_x, y''_{xx}.

7.6 $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти $y'_x\big|_{t=1}$, $y''_{xx}\big|_{t=1}$.

7.7 $\begin{cases} x = e^{-\varphi}, \\ y = e^{3\varphi}. \end{cases}$ Найти $y''_{xx}\big|_{\varphi=0}$.

7.8 $\begin{cases} x = 3\left(\sin t - t\cos t\right), \\ y = 3\left(\cos t + t\sin t\right). \end{cases}$ Найти y'_x.

7.9 $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \operatorname{sh} t. \end{cases}$ Найти y'_x.

7.10 $\begin{cases} x = \dfrac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y = \sin\dfrac{t^3}{3+t}. \end{cases}$ Найти y'_x.

7.11 $\begin{cases} x = \arcsin\left(\sin t\right), \\ y = \arccos\left(\cos t\right). \end{cases}$ Найти y'_x.

7.12 $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\arcsin(t-1). \end{cases}$ Найти y'_x.

7.13 $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}\left(2e^t\right), \\ y=\ln\operatorname{tg}e^t. \end{cases}$ Найти y'_x.

7.14 $\begin{cases} x=\ln\operatorname{ctg}t, \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$ Найти y'_x.

7.15 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\ln t}, \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$ Найти y'_x.

7.16 $\begin{cases} x=\ln\left(1+\sqrt{1-t^2}\right), \\ y=\ln\dfrac{1-t}{1+t}. \end{cases}$ Найти y'_x.

7.17 Составить уравнение касательной к кривой $\begin{cases} x=t^3+1, \\ y=t^2+t+1 \end{cases}$ в точке $M(2;3)$.

7.18 Найти уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos 2t \end{cases}$ в точке, для которой $t=\dfrac{\pi}{4}$.

7.19 Составить уравнения касательной и нормали к астроиде $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ в точке, для которой $t=\dfrac{\pi}{4}$.

7.20 Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ точке, для которой $t=\dfrac{\pi}{2}$.

7.21 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$ точке, для которой $t = \dfrac{\pi}{4}$.

8 ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

При нахождении предела функции часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Нахождение предела функции в таких случаях называют раскрытием неопределенности. Эффективным средством для раскрытия неопределенностей является **правило Лопиталя: предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных (если последний предел существует или равен бесконечности).**

С помощью правила Лопиталя непосредственно раскрываются два вида неопределенных выражений: $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Нужно помнить, что предел отношения двух функций может существовать в то время, когда отношения производных предела не имеют. В некоторых случаях правило Лопиталя полезно комбинировать с нахождением пределов элементарными средствами.

***Пример* 8.1.** Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x^2-4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{\left(2x^2-x-6\right)'}{\left(x^2-4\right)'} = \lim_{x\to 2}\frac{4x-1}{2x} = \frac{7}{4}.$$

***Пример* 8.2.** Найти $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to 0+0}\frac{2\sin x\cos x}{1}=0.$$

***Пример* 8.3.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{2\cos 2x}=1.$$

***Пример* 8.4.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$. Предел отношения производных не существует. Вместе с тем предел отношения функций существует:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Функция $\sin x$ является ограниченной, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

Иногда ошибочно считают, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$, а ведь $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

***Пример* 8.5.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{4e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{8e^{2x}}=0.$$

В данном примере правило Лопиталя было применено три раза последовательно.

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ с помощью алгебраических преобразований приводятся к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример **8.6.** Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln x$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln x=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0+0} x=0.$$

Пример **8.7.** Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg}2x$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg}2x=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\operatorname{ctg}2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{2}{\cos^2 2x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos^2 2x=\frac{1}{2}.$$

Пример **8.8.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cdot\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

Неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞ сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$ путем логарифмирования функции, и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и предел самой функции.

***Пример* 8.9.** Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{4}{1+2\ln x}}$.

Решение. Здесь неопределенность вида 0^0. Обозначим искомый предел через a и прологарифмируем выражение:

$$\ln a = \ln \lim_{x\to 0+0} x^{\frac{4}{1+2\ln x}} = \lim_{x\to 0+0} \ln x^{\frac{4}{1+2\ln x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{4}{1+2\ln x}\cdot \ln x =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{4\ln x}{1+2\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{4}{x}}{\frac{2}{x}} = 2.$$

Итак, $\ln a = 2$, $a = e^2$.

***Пример* 8.10.** Найти $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Здесь неопределенность вида ∞^0. Обозначим искомый предел через a и прологарифмируем выражение:

$$\ln a = \ln \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0;$$

$$a = e^0 = 1.$$

***Пример* 8.11.** Найти $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}}$.

Решение. Здесь неопределенность вида 1^∞. Обозначим искомый предел через a и прологарифмируем выражение:

$$\ln a = \ln \lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{x}\ln(1+2x) = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+2x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= 3\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{1} = 6; \quad a = e^6.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

8.1 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$.

8.2 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$.

8.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$.

8.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^{2}}$.

8.5 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2}-1+\ln x}{e^{x}-e}$.

8.6 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^{n}}{e^{x}}$.

8.7 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{x}-1}\right)$.

8.8 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{2}\cdot\ln x\right)$.

8.9 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{xe^{x/2}}{x+e^{x}}$.

8.10 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{x}$.

8.11 $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

8.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2x}$.

8.13 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{3}-x^{2}-x+1}{x^{3}+x^{2}-x-1}$.

8.14 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^{3}+2x^{2}+3x+4}{4x^{3}+3x^{2}+2x+1}$.

8.15 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

8.16 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^{4}+5x^{3}+7}{2x^{5}+3x^{4}+1}$.

8.17 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{3}-3x^{2}+2}{x^{3}-4x^{2}+3}$.

8.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$.

8.19 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

8.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^{2} 5x}$.

8.21 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(e^{x}-e^{a}\right)}$.

8.22 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

8.23 $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg}\pi x)$.

8.24 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg} x$.

8.25 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

8.26 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

8.27 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^{2}}}$.

8.28 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+2^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

8.29 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\cos 2x}{x+\sin 2x}$.

8.30 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

9 АСИМПТОТЫ

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.

Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если, по крайней мере, один из односторонних пределов в точке $x = a$ равен бесконечности, т. е.

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty.$

Прямая $y = k_1 x + b_1$ является наклонной асимптотой при $x \to +\infty,$ если существуют оба предела

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_1 x \right).$$

Аналогично, если существуют пределы

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k_2 x \right),$$

то прямая $y = k_2 x + b_2$ является наклонной асимптотой при $x \to -\infty.$

Если $k = 0$ и существует $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b,$ то получаем горизонтальную асимптоту $y = b$ как частный случай наклонной.

Если вертикальных асимптот может быть любое число, то наклонных асимптот не может быть более двух.

***Пример* 9.1.** Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2}{x-2}.$

Решение. Кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 2,$ так как

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^2}{x-2} = +\infty.$$

Ищем наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2}=1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-2}=2.$$

При $x\to-\infty$ получим те же значения k_1 и b_1. Следовательно, кривая имеет одну и ту же наклонную асимптоту $y=x+2$ как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

***Пример* 9.2.** Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{3x^2}{x^2-1}$.

Решение. Кривая имеет две вертикальные асимптоты $x=1$ и $x=-1$, так как

$$\lim_{x\to1-0}\frac{3x^2}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{3x^2}{x^2-1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{3x^2}{x^2-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to-1+0}\frac{3x^2}{x^2-1}=-\infty.$$

Ищем наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2-1}=0,\quad b_1=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{x^2-1}=3.$$

Итак, кривая имеет одну горизонтальную асимптоту $y=3$.

***Пример* 9.3.** Найти асимптоты кривой $y=2x-\sqrt{1+x^2}$.

Решение. Вертикальных асимптот кривая не имеет, так как данная функция непрерывна на всей числовой оси. Будем искать наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}{1}=1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ кривая имеет наклонную асимптоту $y = x$.

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{1} = 3;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{1+x^2}-3x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{1+x^2}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1-x^2}{x-\sqrt{1+x^2}} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

Итак, при $x \to -\infty$ кривая имеет наклонную асимптоту $y = 3x$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти уравнения асимптот кривых:

9.1 $y = \dfrac{x^2+3x+1}{x+3}$.

9.2 $y = \dfrac{x^3+1}{x^2-4}$.

9.3 $y = x\operatorname{arctg} x$.

9.4 $y = \dfrac{x^2}{(x+3)^2}$.

9.5 $y = 2x + \dfrac{2}{x-1}$.

9.6 $y = \dfrac{x^2+x}{x-1}$.

9.7 $y = \dfrac{x^2-4x+9}{x}$.

9.8 $y = \dfrac{x}{x^2-4x+3}$.

9.9 $y = \dfrac{x^4}{x^3+1}$.

9.10 $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

9.11 $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

9.12 $y = \dfrac{x^3}{x^2+9}$.

9.13 $y=\sqrt{x^2-1}.$

9.14 $y=x-2+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}.$

9.15 $y=e^{-x^2}+2.$

9.16 $y=\dfrac{1}{1-e^x}.$

9.17 $y=\sqrt{1+x^2}-2x.$

9.18 $y=xe^x.$

9.19 $y=\sin x+\dfrac{x}{\sin x}.$

9.20 $y=x^2-\dfrac{8}{x}.$

9.21 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-5}}.$

9.22 $y=\dfrac{e^x}{x}.$

9.23 $y=\dfrac{1}{xe^x}.$

9.24 $y=\dfrac{x}{\ln x}.$

10 ИНТЕРВАЛЫ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Функция называется возрастающей (убывающей) в некотором промежутке, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. Как возрастающие, так и убывающие функции, называются монотонными. Если функция не является монотонной, то область ее определения можно разбить на конечное число промежутков монотонности (которые иногда чередуются с промежутками постоянства функции).

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ определяется знаком ее производной: если в некотором интервале $f'(x)>0,$ то функция возрастает, а если $f'(x)<0,$ то функция убывает в этом интервале. Следовательно, отыскание промежутков монотонности функции $y=f(x)$ сводится к нахождению промежутков знакопостоянства ее первой производной. Производная может изменять знак в точках, где она либо равна нулю, либо не существует (но сама функция непрерывна). Такие точки называются критическими точками первой производной.

Отсюда получаем правило для нахождения промежутков монотонности функции $y = f(x)$:

1 Находим область определения функции $D(f)$.

2 Ищем производную функции $f'(x)$.

3 Находим критические точки первой производной.

4 Находим интервалы знакопостоянства производной, на которые разбивают область определения функции критические точки.

5 Определяем знак $f'(x)$ на каждом из этих интервалов: если $f'(x) > 0$, то функция возрастает, а если $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом интервале.

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если она является внутренней точкой области определения функции и существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x\,(x \neq x_0)$ этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0), \quad \left(f(x) > f(x_0)\right).$$

Точки максимума и точки минимума называются точками экстремума функции, а значение функции в точке максимума (минимума) – максимумом (минимумом) или экстремумом функции.

Необходимое условие экстремума: если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная $f'(x_0)$ обращается в нуль или не существует.

Не всякая критическая точка производной является точкой экстремума.

Первое достаточное условие экстремума: если x_0 – критическая точка функции $f(x)$ и при переходе через нее слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, а если знак меняется с минуса на плюс, то в точке x_0 – минимум; если первая производная при переходе через критическую точку не меняет знака, то в этой точке функция экстремума не имеет.

Отсюда получаем первое правило нахождения экстремумов функции $f(x)$ (по первой производной):

1 Находим область определения функции $D(f)$.

2 Ищем первую производную функции $f'(x)$.

3 Находим критические точки первой производной.

4 Определяем знак производной $f'(x)$ слева и справа от критической точки, в которой функция непрерывна. Если знак изменяется с плюса на минус, то в данной точке функция имеет максимум, если с минуса на плюс, то – минимум. Если же знак производной не изменяется, то в данной точке экстремума нет.

При совместном решении задачи по нахождению интервалов монотонности и точек экстремума функции удобно составить таблицу изменения знаков первой производной (пример 10.1).

Второе достаточное условие экстремума: если в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна, первая производная $f'(x_0)=0,$ а вторая производная $f''(x_0)>0,$ то в точке x_0 функция имеет минимум, а если $f''(x_0)<0,$ то – максимум.

Второе правило нахождения точек экстремума (по второй производной):

1 Находим область определения функции $D(f)$.

2 Ищем первую производную функции $f'(x)$.

3 Находим точки, в которых $f'(x)=0,$ а функция $f(x)$ непрерывна.

4 Ищем вторую производную $f''(x)$.

5 Во вторую производную $f''(x)$ подставляем каждое из значений, полученных в п. 3. Если $f''(x_0)>0,$ то в точке x_0 функция имеет минимум, если $f''(x_0)<0,$ то – максимум. Если $f''(x_0)=0,$ то вопрос о наличии экстремума остается открытым (можно воспользоваться первым правилом).

Пример **10.1.** Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$.

Решение. Находим область определения $D(f):(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.
Первая производная

$$f'(x)=\frac{(2x-6)(x-3)-\left(x^2-6x+13\right)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

Определим критические точки: $f'(x)=0$ при $x_1=1$, $x_2=5$; $f'(x)=\infty$ при $x_3=3$ (но в точке $x_3=3$ функция не определена, поэтому она не является критической).

Составим таблицу изменения знаков $f'(x)$:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;5)$	5	$(5;\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	∞	–	0	+
$f(x)$	□	max –4	□	т. р.	□	min 4	□

В таблице указаны интервалы возрастания (□) и убывания (□) функции, точка максимума $(1;-4)$ и точка минимума $(5;18)$.

Пример **10.2.** Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x-1}$.

Решение. Область определения $D(f):(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.
Первая производная

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}(x-1)-x^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^2}=\frac{-x-2}{3\sqrt[3]{x}\,(x-1)^2}.$$

Находим критические точки: $f'(x)=0$ при $x_1=-2$; $f'(x)=\infty$ при $x_2=0$, $x_3=1$ (но при $x_3=1$ функция имеет точку разрыва, поэтому она не является критической).

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	–	0	+	∞	–	∞	–
$f(x)$	□	min $-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	□	max 0	□	т. р.	□

***Пример* 10.3.** Найти точки экстремума функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ с помощью второй производной.

Решение. Находим $D(f): (-\infty; +\infty)$.

Ищем производную: $f'(x) = x^2 - 2x - 3.$

Находим точки, в которых $f'(x) = 0,$ $x^2 - 2x - 3 = 0,$ $x_1 = -1,$ $x_2 = 3.$

Вторая производная $f''(x) = 2x - 2.$

Исследуем полученные точки по знаку второй производной:

$f''(-1) = -4 < 0,$ т. е. $x_1 = -1$ – точка максимума;

$f''(3) = 4 > 0,$ т. е. $x_2 = 3$ – точка минимума.

Задачи для самостоятельной работы

Найти интервалы монотонности:

10.1 $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1.$

10.2 $y = x - x^3.$

10.3 $y = \frac{3}{x}.$

10.4 $y = 8x^2 - \ln x.$

10.5 $y = \frac{x+2}{x-3}.$

10.6 $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}.$

10.7 $y = x\left(\sqrt{x} - 2\right).$

10.8 $y = \ln\left(1 + x^2\right) + x.$

Найти экстремум функции:

10.9 $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1.$

10.10 $y = (x-1)^5.$

10.11 $y=x^3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

10.12 $y=\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

10.13 $y=\dfrac{5x}{1+x^2}$.

10.14 $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

10.15 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

10.16 $y=-\dfrac{16}{\sqrt{x^2+6}}$.

10.17 $y=5-4\sqrt[3]{x^2}$.

10.18 $y=\sqrt[3]{x^2-4x}$.

10.19 $y=3e^{-x^2}$.

10.20 $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

10.21 $y=\cos x-\sin x$.

10.22 $y=x\ln x$.

Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции:

10.23 $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

10.24 $y=x^2\ln x$.

10.25 $y=x+2\operatorname{arcctg}x$.

10.26 $y=\dfrac{1}{4}x^4+x^3+x^2+4$.

10.27 $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}$.

10.28 $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$.

11 ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ КРИВОЙ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Кривая называется выпуклой (вогнутой) в некотором промежутке, если она расположена ниже (выше) касательной, проведенной к кривой в любой точке этого промежутка. Выпуклость или вогнутость кривой, являющейся графиком функции $y=f(x)$, характеризуется знаком второй производной $f''(x)$, а именно: если в некотором промежутке $f''(x)>0$, то кривая вогнута, если $f''(x)<0$, то кривая выпукла в этом промежутке.

Следовательно, нахождение промежутков выпуклости и вогнутости графика функции $y = f(x)$ сводится к нахождению промежутков знакопостоянства ее второй производной $f''(x)$.

Точкой перегиба кривой называется такая ее точка, которая отделяет участок выпуклости от участка вогнутости.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ могут быть только точки, в которых вторая производная изменяет свой знак, т.е. точки, находящиеся внутри области определения функции $f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв. Такие точки называются критическими точками второй производной.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ будут лишь те критические точки второй производной, при переходе через которые $f''(x)$ меняет знак.

Отсюда получаем правило нахождения промежутков выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции:

1 Находим область определения функции $D(f)$.

2 Ищем вторую производную функции $f''(x)$.

3 Определяем точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв (критические точки второй производной).

4 Находим промежутки, на которые разбивают область определения $D(f)$ критические точки.

5 Определяем знак $f''(x)$ на каждом из полученных промежутков: если $f''(x) > 0$, то это промежуток вогнутости; если же $f''(x) < 0$, то это промежуток выпуклости.

6 Те из граничных точек промежутков, в которых функция $f(x)$ непрерывна, а вторая производная $f''(x)$ изменяет свой знак при переходе через них, являются точками перегиба.

При нахождении интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба удобно результаты исследования записывать в таблицу изменения знаков второй производной.

***Пример* 11.1.** Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2.$

Решение. Находим $D(f):(-\infty; +\infty).$

Ищем вторую производную:

$y' = 4x^3 - 6x^2 - 24x - 5, \quad y'' = 12x^2 - 12x - 24.$

Находим критические точки:

$12x^2 - 12x - 24 = 0; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$

Все дальнейшие исследования запишем в таблицу изменения знаков второй производной:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\cup$	т. п. -6	$\cap$	т. п. -14	$\cup$

Из таблицы следует, что $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ есть абсциссы точек перегиба (т. п.) кривой: $y(-1) = -6, \quad y(2) = -14.$ На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(2; \infty)$ график функции вогнут $(\cup)$, на интервале $(-1; 2)$ – выпукл $(\cap)$.

***Пример* 11.2.** Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}.$

Решение. Находим $D(f):\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right).$

Ищем вторую производную:

$$y' = \frac{x^4 - 9x^2}{\left(x^2 - 3\right)^2}; \quad y'' = \frac{6x\left(x^2 + 9\right)}{\left(x^2 - 3\right)^3}.$$

Находим критические точки: $y'' = 0, \quad x_1 = 0; \quad y'' = \infty$ при $x_2 = -\sqrt{3}$ и $x_3 = \sqrt{3}$ (в этих точках функция терпит разрыв).

Составляем таблицу:

x	$\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}; 0\right)$	0	$\left(0; \sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$
$f''(x)$	–	∞	+	0	–	∞	+
$f(x)$	$\cap$	т. р.	$\cup$	т. п. 0	$\cap$	т. р.	$\cup$

Задачи для самостоятельной работы

Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба:

11.1 $y = 3x^5 + 5x^4 - 20x^3 + 60x - 5.$

11.2 $y = 9\sqrt[3]{x}\left(x^2 - 7x\right) + 7x + 63.$

11.3 $y = \left(x^2 + 7x\right)\sqrt[3]{x} - 5x - 8.$

11.4 $y = \dfrac{x-1}{x+1}.$

11.5 $y = \dfrac{x}{x^2+1}.$

11.6 $y = x^2 - \dfrac{1}{x}.$

11.7 $y = \dfrac{x^3+8}{x}.$

11.8 $y = 5 + \sqrt[3]{x-4}.$

11.9 $y = \ln\left(x^2 + 4\right).$

11.10 $y = x\ln^2 x.$

11.11 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}.$

11.12 $y = 2^{\frac{1}{x}}.$

11.13 $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 31x - 37.$

11.14 $y = \dfrac{x-5}{x+7}.$

11.15 $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2}\left(x+8\right).$

11.16 $y = \dfrac{x}{x^2+9}.$

11.17 $y = xe^x.$

11.18 $y = 3x^5 - 5x^4 + 4.$

11.19 $y = 3 - \sqrt[5]{\left(x+2\right)^7}.$

11.20 $y = \dfrac{1}{\left(x+1\right)^3}.$

11.21 $y = \dfrac{1}{x^2-4}.$

11.22 $y = 1 - \ln\left(x^2 - 4\right).$

12 ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА

Рассмотренные отдельные элементы исследования функции образуют в совокупности аппарат, необходимый для построения графиков функций. Общая схема построения графика функции сводится к следующим этапам:

1 Найти область определения функции.

2 Проверить функцию на четность, нечетность, периодичность.

3 Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно).

4 Найти асимптоты графика функции.

5 Определить интервалы монотонности функции и точки экстремума.

6 Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика, точки перегиба.

7 Построить график функции, используя полученные результаты исследования. При необходимости график функции может быть уточнен вычислением значений функций в отдельных точках.

***Пример* 12.1.** Построить график функции $y = 4x^2 - x^4 - 3$.

Решение.

1 Находим область определения функции. Данная функция является многочленом, поэтому точек разрыва нет и $D(f):(-\infty; +\infty)$.

2 Проверим функцию на четность или нечетность:

$$f(-x) = 4(-x)^2 - (-x)^4 - 3 = 4x^2 - x^4 - 3 = f(x).$$

Следовательно, функция является четной. Это значит, что ее график симметричен относительно оси ординат.

3 Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

$x = 0, \ \ y = -3;$

$y = 0, \ \ 4x^2 - x^4 - 3 = 0; \ \ 4x^2 - 4 - x^4 + 1 = 0; \ \ 4\left(x^2 - 1\right) - \left(x^4 - 1\right) = 0,$

$\left(x^2 - 1\right)\left(4 - x^2 - 1\right) = 0; \ \ \left(x^2 - 1\right)\left(3 - x^2\right) = 0; \ \ x_1 = -1; \ \ x_2 = 1; \ \ x_3 = -\sqrt{3};$

$x_4 = \sqrt{3}.$

Получили следующие точки:

$$A(0;-3),\ B_1\left(-\sqrt{3};0\right),\ B_2(-1;0),\ B_3(1;0),\ B_4\left(\sqrt{3};0\right).$$

4 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty,$ значит, график многочлена асимптот не имеет.

5 Определим интервалы монотонности функции и точки экстремума:

$$y'=8x-3x^3=4x\left(2-x^2\right),$$

$$y'=0,\ 4x\left(2-x^2\right)=0,\ x_1=-\sqrt{2},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{2}.$$

Составим таблицу:

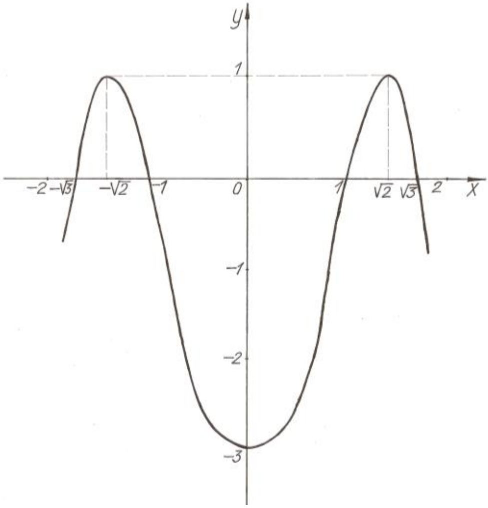
x	$\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$	$-\sqrt{2}$	$\left(-\sqrt{2};0\right)$	0	$\left(0;\sqrt{2}\right)$	$\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2};+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	–
$f(x)$	□	max 1	□	min –3	□	max 1	□

1 Найдем промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба:

$$y''=8-12x^2=4\left(2-3x^2\right).\ y''=0,\ x_1=-\sqrt{\frac{2}{3}},\ x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

x	$\left(-\infty;-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\infty\right)$
$f''(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	$\cap$	т. п. $-\frac{7}{9}$	$\cup$	т. п. $-\frac{7}{9}$	$\cap$

2 Используя полученные результаты, строим график функции:



***Пример* 12.2.** Построить график функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Решение.

1 $D(f): (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Две точки бесконечного разрыва функции $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

2 $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Следовательно, функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

3 При $x = 0$ имеем $y = 0$. Одна точка пересечения с осями координат $O(0;0)$.

4 Определяем наличие асимптот. Функция имеет две точки бесконечного разрыва, поэтому данная кривая имеет две вертикальные асимптоты: $x = -1$, $x = 1$.

Определим расположение бесконечных ветвей графика функции вблизи вертикальных асимптот:

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty.$$

Определим наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x\left(x^2-1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

При $x \to -\infty$ получаем те же значения k и b. Итак, уравнение наклонной асимптоты $y = x$.

5 Определим интервалы монотонности и точки экстремума функции:

$$y' = \frac{3x^2\left(x^2-1\right) - 2x\cdot x^3}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Найдем критические точки:

$$y' = 0, \quad \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

Также имеем две точки разрыва: $x_4 = -1, \; x_5 = 1$.

Составим таблицу:

x	$\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}; -1\right)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0;1)$	1	$\left(1; \sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	–	Не сущ.	–	0	–	Не сущ.	–	0	+
$f(x)$	□	max $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	□	т. р.	□		□	т. р.	□	min $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	□

В точке $x_1 = 0$ экстремума нет, так как $f'(x)$ не изменяет знака при переходе через данную точку.

6 Найдем промежутки выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = \frac{\left(4x^3 - 6x\right)\left(x^2 - 1\right)^2 - 2\left(x^2 - 1\right)2x\left(x^4 - 3x^2\right)}{\left(x^2 - 1\right)^4} =$$

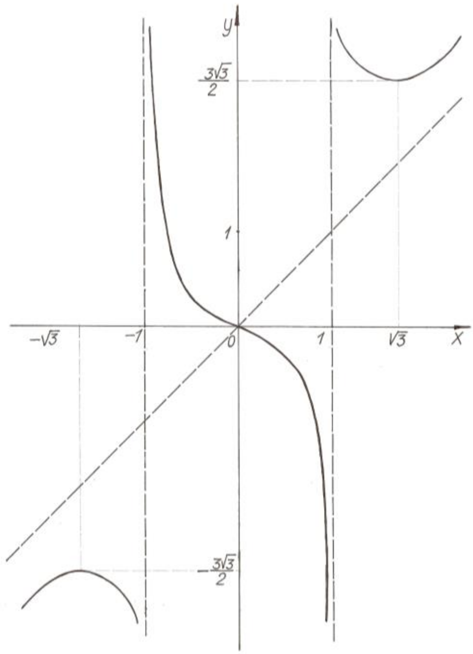
$$= \frac{\left(x^2 - 1\right)\left(4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{\left(x^2 - 1\right)^3} = \frac{2x\left(x^2 + 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3}.$$

$y'' = 0,\ \ x_1 = 0;$ две точки разрыва $x_2 = -1,\ \ x_3 = 1.$

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f''(x)$	–	Не сущ.	+	0	–	Не сущ.	+
$f(x)$	$\cap$	т. р.	$\cup$	т. п. 0	$\cap$	т. р.	$\cup$

7 Строим график функции.



Пример **12.3.** Исследовать и построить график функции $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$.

Решение.

1 $D(f):(-\infty;+\infty)$. Точек разрыва нет.

2 $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^3-2(-x)^2}=\sqrt[3]{-x^3-2x^2}\neq\pm f(x)$, т. е. функция не является ни четной, ни нечетной.

3 $x=0,\ \ y=0.$

$y=0,\ \ x^3-2x^2=0,\ \ x^2(x-2)=0,\ \ x_1=0,\ \ x_2=2.$

Две точки пересечения с осями координат $O(0;0)$, $A(2;0)$.

4 Определим наличие асимптот. Вертикальных асимптот нет.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}-x\right)=$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}-x\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-2x^2-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2} = \frac{-2}{1+1+1} = -\frac{2}{3}.$$

Наклонная асимптота $y = x - \frac{2}{3}$.

5 Определим интервалы монотонности и точки экстремума:

$$y' = \frac{1}{3}\left(x^3-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(3x^2-4x\right) = \frac{3x^2-4x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}} = \frac{3x-4}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x(x-2)\right)^2}}.$$

Находим критические точки:

$y' = 0,\ \ x_1 = \frac{4}{3};$

$y' = \infty,\ \ x(x-2)^2 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 2.$

Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$\left(0;\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3};2\right)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	Не сущ.	–	0	+	Не сущ.	+
$f(x)$	□	max 0	□	min $-\frac{32}{27}$	□	0	□

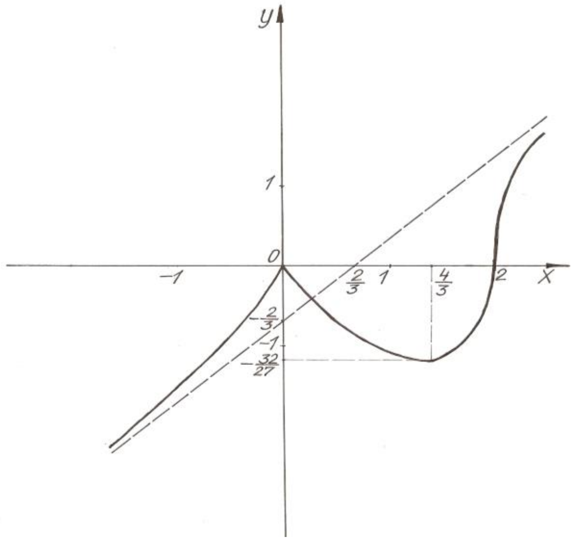
6 Найдем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба:

$$y'' = -\frac{8}{9\cdot\sqrt[3]{x^4(x-2)^5}}.\quad y'' = \infty,\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 2.$$

Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f''(x)$	+	Не сущ.	+	Не сущ.	–
$f(x)$	$\cup$		$\cup$	т. п. 0	$\cap$

Строим график функции:



Задачи для самостоятельной работы

Исследовать функции и построить их графики:

12.1	$y = x^3 + 3x^2.$	12.2	$y = x^3 - 12x.$
12.3	$y = x^3 - 2x^2 + 1.$	12.4	$y = x^3 - 3x^2 - x + 3.$
12.5	$y = x^4 - 2x^2.$	12.6	$y = x^4 - 4x^2 - 5.$
12.7	$y = \dfrac{1}{1+x^2}.$	12.8	$y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{4}{x}.$
12.9	$y = \dfrac{8}{16-x^2}.$	12.10	$y = \dfrac{x}{x^2-4}.$
12.11	$y = x^2 - \dfrac{8}{x}.$	12.12	$y = xe^{-x}.$
12.13	$y = \left(x^2+1\right)e^{-x}.$	12.14	$y = \dfrac{x}{\ln x}.$
12.15	$y = \sqrt{16-x^2}.$	12.16	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1.$
12.17	$y = 8x^2 - x^4 - 7.$	12.18	$y = x^4 - 8x^2 - 9.$

12.19 $y=\dfrac{x^2-5x}{x-1}.$

12.20 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}.$

12.21 $y=\dfrac{x^2+6}{x^2-1}.$

12.22 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-5}}.$

12.23 $y=\sqrt{4x^2+7}.$

12.24 $y=\dfrac{e^x}{x^2}.$

12.25 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}.$

12.26 $y=\dfrac{1}{e^x-1}.$

12.27 $y=x^2\ln x.$

12.28 $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

12.29 $y=\sin x+\cos x.$

12.30 $y=3^{1/x}.$

13 НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Если функция $f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Этих значений функция достигает или в критических точках, или на концах отрезка $[a;b]$.

Поэтому, чтобы определить наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a;b]$, надо:

1) определить критические точки, принадлежащие данному отрезку;

2) вычислить значения функции в полученных критических точках и на концах отрезка;

3) из полученных значений функции самое большее будет наибольшим значением, а самое меньшее – наименьшим значением функции на всем данном отрезке.

Функция, непрерывная на интервале $(a;b)$, может и не достигать своего наибольшего и наименьшего значения. Если непрерывная функция имеет на интервале единственную точку экстремума, например, минимум (максимум), то в этой точке функция принимает и свое наименьшее (наибольшее) значение на этом интервале.

***Пример* 13.1.** Определить наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ на отрезке $[-4; 3]$.

Решение. Найдем критические точки:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9; \quad f'(x) = 0 \text{ при } x_1 = -3; \ x_2 = 1.$$

Вычисляем значение функции в критических точках: $f(-3) = 20;$ $f(1) = -12.$

Вычисляем значение функции на концах отрезка: $f(-4) = 13;$ $f(3) = 20.$

Сравнивая полученные значения функции, заключаем: наибольшее значение функции на отрезке $[-4; 3]$ равно 20 и достигается в точках $x = 3$ и $x = -3,$ а ее наименьшее значение равно -12 и достигается в точке $x = 1.$

***Пример* 13.2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение. Найдем критические точки:

$$f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{\left(2x^2 + 1\right)^2}}; \text{ при } x = 0 \quad f'(x) = 0.$$

Вычислим значения функции:

$$f(0) = 1, \quad f(-2) = \sqrt[3]{9}, \quad f(1) = \sqrt[3]{3}.$$

Наибольшее значение функции $f(-2) = \sqrt[3]{9}$ – в точке $x = -2,$ наименьшее значение $f(0) = 1$ – в точке $x = 0.$

***Пример* 13.3.** Разложить число 20 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Обозначим первое слагаемое через x, тогда другое будет $20-x$. Произведение их $y=x(20-x)=20x-x^2$.

Найдем теперь наибольшее значение функции y для $x\in(0;20)$. Для этого определим критические точки:

$y'=20-2x$; $y'=0$ в единственной точке $x=10$, которая лежит в рассматриваемом интервале. Исследуем данную точку по знаку второй производной:

$y''=-2$, т. е. $y''(10)<0$, т. е. это точка максимума.

Единственная точка максимума в этом интервале совпадает с наибольшим значением функции в этом интервале. Итак, слагаемые равны 10, и их произведение, равное 100, будет наибольшим.

***Пример* 13.4.** Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить размеры окна при заданном периметре, имеющем наибольшую площадь.

Решение. Обозначим ширину окна через x, высоту прямоугольной части – y, тогда радиус полукруга $R=x/2$. Периметр окна $p=x+2y+\pi\frac{x}{2}$. Отсюда находим:

$$y=\frac{p}{2}-\frac{x}{2}-\frac{\pi x}{4}.$$

Площадь окна

$$S=xy+\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{px}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi x^2}{8}=\frac{px}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi x^2}{8}.$$

Найдем наибольшее значение полученной функции S:

$$S'=\frac{p}{2}-x-\frac{\pi x}{4},\ \ S'=0,\ \ \frac{p}{2}-x-\frac{\pi x}{4}=0,\ \ x=\frac{p}{2\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2p}{4+\pi}.$$

Тогда высота окна

$$y=\frac{p}{2}-\frac{p}{4+\pi}-\frac{\pi p}{2(4+\pi)}=\frac{p}{4+\pi}.$$

Покажем, что при $x = \dfrac{2p}{4+\pi}$ площадь будет наибольшей. Воспользуемся второй производной:

$S'' = -1 - \dfrac{\pi}{4} < 0,$ т. е. при $x = \dfrac{2p}{4+\pi}$ функция будет иметь максимум, что соответствует наибольшему значению функции.

Задачи для самостоятельной работы

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на указанном промежутке либо на всей области определения:

13.1 $f(x) = x^3 - 12x + 7;$ $[0; 3].$

13.2 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1;$ $\left[-2; \dfrac{5}{2}\right].$

13.3 $f(x) = x \cdot e^{-x}$ на промежутке $[0; +\infty).$ 13.4 $y = \sin x \cdot \sin 2x.$

13.5 $y = \operatorname{arctg} x^2.$ 13.6 $y = e^{-x^2}.$ 13.7 $y = \sqrt[3]{x^2} - 1.$

13.8 $f(x) = x^2 - 4x + 3;$ $[0; 3].$ 13.9 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3;$ $[-2; 2].$

13.10 $y = \operatorname{tg} x - x;$ $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right].$ 13.11 $u = x^3 - 3x^2 - 9x + 35;$ $[-4; 4].$

13.12 $p = x^2 \ln x;$ $[1; e].$ 13.13 $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10;$ $[0; 3].$

13.14 $u = x - 2\ln x;$ $[1; e].$ 13.15 $y = 2\sin x + \cos x;$ $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right].$

13.16 По двум путям движутся к пересечению два поезда со скоростью 60 км/ч. Считается, что пути пересекаются под прямым углом и что в данный момент они находятся от пересечения на расстоянии 25 и 40 км. Определить, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.

13.17 Водоотводный канал железнодорожного пути имеет в поперечном сечении прямоугольник площадью 2 м^2. При каких размерах сечения на его облицовку пойдет наименьшее количество материала?

13.18 Из круглого бревна диаметром $d = 30$ см требуется вырезать балку прямоугольного сечения с основаниями b и h. Прочность балки пропорциональна bh^2. При каких значениях b и h прочность балки будет наибольшей?

13.19 При каком соотношении между высотой h и диаметром d цилиндрической консервной банки на ее изготовление пойдет наименьшее количество жести.

13.20 Расходы на топливо для топки парохода пропорциональна кубу его скорости. Известно, что при скорости в 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб./ч, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб./ч. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

13.21 Требуется сделать конический шатер, объем которого 12 м^3. При каком радиусе основания потребуется наименьшее количество материала?

13.22 Для балки, лежащей на двух опорах в концевых точках с равномерно распределенной нагрузкой по всей длине l, момент изгиба в точке, на расстоянии x от опоры, выражается формулой

$$\mathrm{M}_{\text{изг}} = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2,$$

где q – нагрузка на единицу длины балки. Найти максимальный изгибающий момент и точку его приложения.

13.23 Для осушки болота должен быть вырыт открытый канал, поперечным сечением которого является равнобедренная трапеция. Найти угол откоса α (угол между большим основанием и боковой стороной), при котором потери на трение при движении воды будут наименьшими. Площадь сечения канала равна S, глубина h, потери на трение прямо пропорциональны смоченному периметру (линия соприкосновения потока со стенками канала).

13.24 На какой высоте следует поместить источник света над освещаемой поверхностью, чтобы освещение на расстоянии α от основания перпендикуляра, опущенного из источника света на освещенную поверхность, было наибольшим? Освещенность задана $E = \dfrac{k\sin\varphi}{\alpha^2 + h^2}$, где k – коэффициент пропорциональности, h – высота источника света над освещаемой поверхностью, φ – угол между лучом и освещаемой поверхностью.

13.25 При горизонтальном перемещении груза P усилие Q, необходимое для этого перемещения, вычисляется по формуле

$$Q = \frac{PK}{\cos\beta + K\sin\beta},$$

где β – угол между горизонтом и направлением силы Q, K – коэффициент трения. Под каким углом к горизонту должно быть направлено усилие Q, чтобы оно было наименьшим?

13.26 Высота подъема брошенного вертикально вверх тела с начальной скоростью v_0 выражается формулой

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Определить максимальную высоту подъема тела, если $v_0 = 49$ м/с, $q = 9{,}8$ м/с^2.

13.27 Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать стойку прямоугольного сечения так, чтобы площадь поперечного сечения была наибольшей. Площадь поперечного сечения берется наибольшей, так как сопротивление стойки сжатию пропорционально ее поперечному сечению.

13.28 Сила удара P, испытываемая лопаточками гидравлического колеса, определяется по формуле

$$P = \frac{\gamma}{g}\omega_0 v_0 \left(v_0 - u\right),$$

где γ – удельный вес жидкости; $g = 9{,}81$ м/с^2 – ускорение земного притяжения; ω_0 – поперечное сечение струи; v_0 – скорость струи, падающей на колесо; u – скорость движения лопаточек колеса.

Мощность W гидравлического колеса определяется по формуле $W = PU$. Найти наибольшую мощность колеса и скорость его движения.

13.29 В фигуру, ограниченную линиями $y = 3 - x^2$, $y = 0$, вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна его сторона лежала на оси, а две вершины – на параболе.

13.30 Определить наибольшую величину равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R.

13.31 Определить наименьшую площадь равнобедренного треугольника, описанного вокруг окружности радиуса R.

13.32 Открытый резервуар цилиндрической формы должен вмещать V м^3. При какой высоте и радиусе основания резервуара на его
изготовление уйдет наименьшее количество материала.

13.33 В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям эллипса.

13.34 Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 м. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

13.35 Какой из прямоугольных треугольников с периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

13.36 Нужно огородить прямоугольную площадку возле каменной стены так, чтобы с трех сторон она была огорожена проволочной сеткой, а четвертой стороной примыкала к стене. Для этого имеется a погонных метров сетки. При каком соотношении сторон площадка будет иметь наибольшую площадь?

13.37 В треугольник с основанием b и высотой h вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

13.38 От канала шириной 4 м отходит под прямым углом другой канал шириной 2 м. Какой наибольшей длины бревна можно сплавлять по этим каналам из одного в другой (не учитывая толщины бревен).

13.39 Имея N одинаковых электрических элементов, мы можем различными способами составить из них батарею, соединяя по n элементов последовательно, а затем полученные группы $\left(\text{числом}\, N/n\right)$ – параллельно. Ток, даваемый такой батареей,

$$J=\frac{NnE}{NR+n^2r},$$

где E – электродвижущая сила одного элемента; R – внешнее сопротивление; r – его внутреннее сопротивление.

Определить, при каком значении n батарея даст наибольший ток.

14 САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

14.1 Производные сложных функций

Вариант 1

1 $y=\sin^3 5x\cos^5 3x$. **2** $y=e^{\arccos^3 x}$. **3** $y=x^{\cos x}$.

4 $x^2y-y^2x+(x-y)^3=0$. **5** $x=\cos\frac{t}{2};\ y=t-\sin t$.

Вариант 2

1 $y=\dfrac{\sin x}{1+\mathrm{tg}x}$. **2** $y=e^{\mathrm{arctg}^2 3x}$. **3** $y=(\sin x)^x$.

4 $y\sin x-\cos y=0$. **5** $x=2\cos^3 t;\ y=4\sin^3 t$.

Вариант 3

1 $y=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt[3]{1-x}}$. **2** $y=e^{-2x}\ln^3\left(1-x^2\right)$. **3** $y=\sqrt[x]{x}$.

4 $x^3+xy^2+y^3=a^3$. **5** $x=\ln^3\frac{1}{t};\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$.

Вариант 4

1 $y=\dfrac{4+x^4}{x^3}\cdot\mathrm{arctg}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{x}$. **2** $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$. **3** $y=x^{\sqrt{x}}$.

4 $e^{x^3-2xy^3}=y$. **5** $x=\sqrt{1-t^2};\ y=\mathrm{tg}\sqrt{1+t}$.

Вариант 5

1 $y=2\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}$. **2** $y=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\right)$. **3** $y=\left(x^2\right)^{\sin 2x}$.

4 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a+\frac{1}{4}y^2$. **5** $x=\arcsin\dfrac{t}{1+t^2};\ y=\arccos\dfrac{1}{1+t^2}$.

Вариант 6

1 $y=x^3\cdot\ln^2\cos(1-3x)$. **2** $y=\dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$. **3** $y=(\ln 2x)^{1-x^2}$.

4 $e^{1-y^2}-xy^3=0$. **5** $x=2\cos t-3t^2;\ y=2\cos t-5t^3$.

Вариант 7

1 $y=\left(1+x^2\right)e^{\operatorname{arctg}^2 x}$. **2** $y=\ln\dfrac{\sin x}{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}$. **3** $y=\left(e^{2x}\right)^{\ln^3\frac{1}{x}}$.

4 $x^4-2xy^3+a^3y=0$. **5** $x=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right);\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}$.

Вариант 8

1 $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x-4}}$. **2** $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$. **3** $y=\left(x^3-1\right)^{e^{3x}}$.

4 $xy^2+xe^y+1-y^2=0$. **5** $x=\operatorname{ctg}t;\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}$.

Вариант 9

1 $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$. **2** $y=2^{x^2\cdot\operatorname{tg}^3\frac{x+1}{x^2}}$. **3** $y=\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^{\ln 3x}$.

4 $x+y+\operatorname{arctg}2y=0$. **5** $x=2\cos t-3t^2;\ y=2\sin t-5t^3$.

Вариант 10

1 $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$. **2** $y=\dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{x}{a}$. **3** $y=e^{\frac{1}{x}\cdot\sin^3 x}$.

4 $x^4+2xy^3-a^3y=0$. **5** $x=\dfrac{3t^2+1}{3t^2};\ y=\sin\dfrac{t^3}{t+3}$.

Вариант 11

1 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arccos x$. **2** $y=\ln^3\left(x^2+5x+\sqrt[3]{x}\right)$. **3** $y=\left(e^{2x}\right)^{\sin 3x}$.

4 $e^y + xy^2 = 0$. **5** $x = \mathrm{ctg}\left(2e^t\right);\ y = \ln\left(\mathrm{tg}e^t\right)$.

Вариант 12

1 $y = \frac{1}{3}(x+2)\sqrt{x+1} + \ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)$. **2** $y = \mathrm{arcctg}\frac{\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}$.

3 $y = 5^{\cos^3 2x\cdot\ln\frac{1}{x}}$. **4** $\cos(x+y) = y^2$. **5** $x = t - \sin 2t;\ y = \ln\cos 2t$.

Вариант 13

1 $y = \left(x^2+3x+1\right)e^{3x+2}$. **2** $y = \ln^3(x-3)\mathrm{arctg}\frac{x}{x-3}$. **3** $y = \left(\cos^2 x\right)^{\sin 3x}$.

4 $y\ln x - x\ln y = 1$. **5** $x = \cos 2t;\ y = \frac{2}{\cos^2 t}$.

Вариант 14

1 $y = \mathrm{tg}^3\ln\left(-3x^2\right)$. **2** $y = e^{-2x}(\cos 2x - 3\sin 2x)$. **3** $y = 5^{\arcsin\frac{1}{x}\cdot\left(x^3+1\right)^{-3}}$.

4 $\ln x + y^3 - 3xy^2 = 0$. **5** $x = \sqrt{t-3};\ y = \ln(t-3)$.

Вариант 15

1 $y = \left(1+x^6\right)^2 e^{\mathrm{arctg}^2 x}$. **2** $y = x^3\arccos\left(-\frac{x^2+2}{3}\right)$. **3** $y = \left(x^3+5x\right)e^{-3x}$.

4 $\ln y + x^3 - 2x^2 y = 0$. **5** $x = \sqrt{1+t^2};\ y = \mathrm{tg}\sqrt{1+t^2}$.

14.2 Правило Лопиталя

Найти пределы, используя правило Лопиталя.

Вариант 1

1 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x^2+3x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x}.$ **4** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right).$

Вариант 2

1 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-10}.$ **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-x+1}{5x^2+6x-2}.$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{2x+1}.$ **4** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right).$

Вариант 3

1 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}.$ **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2+3x-2}.$

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{x}\left(\ln(2+x)-\ln 2\right).$ **4** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x}.$

Вариант 4

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}.$ **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2+7x+10}.$

3 $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}.$ **4** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{x+2}.$

Вариант 5

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{1-\sqrt{2x+1}}.$ **2** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}.$

3 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln \mathrm{ctg} x.$ **4** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{2x}.$

Вариант 6

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1}.$ **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{x^3-x^2+x+1}.$

3 $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}.$ **4** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}.$

Вариант 7

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2+x-10}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+1}{5x}\cdot\ln(1+3x)$.

4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x^2\cos 2x}$.

Вариант 8

1 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$.

4 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}x$.

Вариант 9

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x^3+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$.

Вариант 10

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x+6}{x^3-5x^2+2x+8}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x}{x^3+3x^2-1}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^x$.

4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 3x}{10x^2}$.

Вариант 11

1 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+4x^2+3}{x^3+3x+1}$.

3 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{5\mathrm{tg}x}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{arctg}x}\right)$.

Вариант 12

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+3x+1}{6x^3+x^2+x-2}$.

2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2+4x-5}$.

3 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \mathrm{ctg}3x)$.

Вариант 13

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+5}{9x^2+2x}$.

2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{5x^2-13x-6}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{1-4x}\right)^{x+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

14.3 Исследование функции

Найти:

1) асимптоты кривой;
2) максимум и минимум;
3) наибольшее и наименьшее значения на отрезке.

Вариант 1

1 $y=\dfrac{x^2+1}{x}$. **2** $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$. **3** $y=x-2\ln x, [1; e]$.

Вариант 2

1 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$. **2** $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$. **3** $y=x^4-2x^2+5, [-2; 2]$.

Вариант 3

1 $y=\dfrac{x^2-x-1}{x}$. **2** $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$. **3** $y=x^3-3x^2-9x+35, [-4; 4]$.

Вариант 4

1 $y=\dfrac{1-4x}{1+2x}$. **2** $y=\dfrac{x}{1+x^2}$. **3** $y=e^{-x^2}, \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 5

1 $y=\dfrac{x-4}{2x+4}$. **2** $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$. **3** $y=2x^3+3x^2-12x+1, [-1;5]$.

Вариант 6

1 $y=\dfrac{x^2}{2-2x}$. **2** $y=x+\dfrac{1}{x}$. **3** $y=x+2\sqrt{x}, [0;4]$.

Вариант 7

1 $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$. **2** $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$. **3** $y=\dfrac{4-x^2}{4+x^2}, [-1;3]$.

Вариант 8

1 $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$. **2** $y=\dfrac{\ln x}{x}$. **3** $y=\sqrt[3]{2x^2}+1, -[-2;1]$.

Вариант 9

1 $y=\dfrac{x^2+x}{x-1}$. **2** $y=\left(x^2-8\right)e^x$. **3** $y=x^5-5x^4+5x^3+1, [-1;2]$.

Вариант 10

1 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. **2** $y=\dfrac{x^4+48}{x}$. **3** $y=-3x^2+4x-8, [0;1]$.

Вариант 11

1 $y=\dfrac{x^2-4x+9}{x}$. **2** $y=\sqrt{16-x^2}$. **3** $y=x^3+3x^2-9x-7, [-4;3]$.

Вариант 12

1 $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$. **2** $y=\dfrac{x^2-5x}{x-1}$. **3** $y=x^3-3x^2+6x-2, [-1;1]$.

Вариант 13

1 $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$. **2** $y=3^{\frac{1}{x}}$. **3** $y=\sqrt{100-x^2}, [-6;8]$.

Вариант 14

1 $y=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$. **2** $y=\frac{e^x}{x^2}$. **3** $y=\frac{x-1}{x+1},\left[0;4\right]$.

Вариант 15

1 $y=\frac{x^2}{x+1}$. **2** $y=\frac{x}{\sqrt{x-3}}$. **3** $y=\sqrt{25-x^2},\left[-4;4\right]$.

15 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1 Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.
2 Найти уравнения асимптот кривых.
3 Исследовать функции и построить их графики.

Вариант 1

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{ctg}x\ln\left(x+e^x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

2 а) $y=\frac{\ln^2 x}{x}-3x$; б) $y=\frac{17-x^2}{4x-5}$. **3** $y=\frac{x-1}{x^2-2x}$.

Вариант 2

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

2 а) $y=2x-\frac{\cos x}{x}$; б) $y=\frac{2x^2-6}{x-2}$. **3** $y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

Вариант 3

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 4x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2 а) $y=\ln x$; б) $y=x^2e^{-\frac{1}{x}}$. **3** $y=\frac{2x+1}{x^2}$.

Вариант 4

1 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arcsin x\cdot\mathrm{ctg}x\right)$.

2 а) $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; б) $y=\dfrac{4x^3-3x}{4x^2-1}$. **3** $y=\dfrac{2x^2}{4x^2-1}$.

Вариант 5

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

2 а) $y=4x-\dfrac{\sin x}{x}$; б) $y=\dfrac{21-x^2}{7x+9}$. **3** $y=x^2e^{-x}$.

Вариант 6

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

2 а) $y=\dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$; б) $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$. **3** $y=\dfrac{4x^2}{x^3-1}$.

Вариант 7

1 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-2x}$.

2 а) $y=\dfrac{x^2-11}{4x-3}$; б) $y=\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}$. **3** $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

Вариант 8

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-x}{\sin x-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

2 а) $y=\dfrac{-x^2-4x+13}{4x+3}$; б) $y=\sqrt{x^2-16}$. **3** $y=e^{2x-x^2}$.

Вариант 9

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\pi-2\mathrm{arctg}x\right)$.

2 а) $y=\dfrac{x^2-5x+3}{x+2}$; б) $y=\ln\left(1-x^2\right)$. **3** $y=e^{\frac{1}{3-x}}$.

Вариант 10

1 а) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln(1-\cos x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)\mathrm{ctg}5x$.

2 а) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-6}}$; б) $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$. **3** $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$.

Вариант 11

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-2^x}{x+\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

2 а) $y=xe^{-x^2}-2$; б) $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$. **3** $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

Вариант 12

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{4}{1-2\ln x}}$.

2 а) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y=\dfrac{x^2-1}{4x-3}$. **3** $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Вариант 13

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\arcsin 2x}{\ln(1+3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos 2x}$.

2 а) $y=\dfrac{1}{1-e^x}$; б) $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$. **3** $y=\dfrac{4x}{x^3-1}$.

Вариант 14

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+x^3-x^5}{3x-x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\mathrm{ctg}\pi x}$.

2 а) $y=\dfrac{x^3+x^2-3x-1}{2x^2-2}$; б) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+3}$. **3** $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

Вариант 15

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}$.

2 а) $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}$; б) $y=\ln\dfrac{x-5}{x+5}$. **3** $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

16 ОТВЕТЫ

1.1 $y'=15x^4-6x^2$. **1.2** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^3}$. **1.3** $y'=\dfrac{-15}{x^4}-\dfrac{1}{x^2}+0{,}1$.

1.4 $y'=\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{4x^2}$. **1.5** $y'=\dfrac{-4x^4+58x^2-10}{\left(5-x^2\right)^2}$. **1.6** $y'=\dfrac{x\cos x-\sin x+10x^3}{4x^2}$.

1.7 $y'=-16x^3+108x^2-162x-2$. **1.8** $y'=\dfrac{9}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{2}{x^2}-3$.

1.9 $y'=56\sqrt[3]{x}-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}$.

1.10 $y'=\left(\cos x-3\sin x\right)\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(\sin x+3\cos x\right)$.

1.11 $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}\arcsin x+\left(\operatorname{tg} x-1\right)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.12 $y'=\dfrac{3}{5\cdot\sqrt[5]{x^2}}\operatorname{arctg} x+\left(\sqrt[5]{x^3}-1\right)\dfrac{1}{1+x^2}$. **1.13** $s'=\dfrac{2t\sin t-t^2\cos t-2}{\sin^2 t}$.

1.14 $y'=-\dfrac{7}{\left(3\sin x+\cos x\right)^2}$.

1.15 $y'=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)-\left(\sqrt{x}-2x\right)\dfrac{1}{4}x^{-3/4}}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2}$.

1.16 $y'=\dfrac{x+1-\arcsin x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\left(x+1\right)^2}+\dfrac{4}{x^3}$. **1.17** $y'=e^x\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

1.18 $y'=7^x\left(\ln 7\cdot\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)$. **1.19** $y'=-\dfrac{3}{\sin^2 x}-\dfrac{12}{x^4}$.

1.20 $y' = \frac{1}{5^x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} - \ln 5 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \ln x\right).$

1.21 $y' = \frac{10^x}{\operatorname{ctg}^2 x}\left(\left(\ln 10 \cdot \ln x + \frac{1}{x}\right)\operatorname{ctg} x + \ln x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\right).$

1.22 $y' = \frac{e^x}{(1+\ln x)^2}\left((\cos x - \sin x)(1+\ln x) - \cos x \cdot \frac{1}{x}\right).$

1.23 $y' = \frac{1 - \log_5 x \cdot \ln^2 5 \cdot x}{5^x \cdot x \cdot \ln 5}.$

1.24 $y' = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot x - 2^x}{x^2}.$

1.25 $y' = \frac{7^x \cdot \ln 7 \cdot x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \left(7^x + 1\right)\left(2x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{1+x^2}\right)}{x^4 \cdot \operatorname{arctg}^2 x}.$

1.26 $s' = \frac{1}{\sqrt[5]{t^3}}\left(1 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{5}\ln t - \frac{2}{5}\log_2 t\right).$ **1.27** $y' = -\frac{2\operatorname{arctg} x}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{8\sqrt[4]{x}}{1+x^2}.$

1.28 $y' = \frac{1}{20\sqrt[4]{x^3}} - 3x^2 - \frac{2}{5x^3}.$ **1.29** $y' = -4x^{-5} + 9x^{-4} + 1{,}4x^{-3}.$

1.30 $y' = \frac{6x^4 - x^2 + 10x - 9}{2x^4}.$ **1.31** $y' = -\frac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}.$

1.32 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \arccos x - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}.$ **1.33** $y' = \frac{9}{2}\sqrt{x} \ln x.$

1.34 $y' = \frac{x - \operatorname{arctg} x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)x^2}.$ **1.35** $y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$

1.36 $y' = -\frac{24}{x^5} + \frac{3}{x^2} + 9x^2 - \frac{7}{2}\sqrt{x^5}.$

1.37 $y' = 3 + \frac{2}{x^2} + \frac{10}{3}\sqrt[3]{x^2} + \frac{5}{3\sqrt[3]{x^8}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$ **1.38** $y' = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$

1.39 $y'=\dfrac{-x+\arcsin x-\arccos x\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}{\sqrt{1-x^2}\,(x-\arcsin x)^2}.$

1.40 $y'=4^x\cdot\ln 4\cdot\arccos x-\dfrac{4^x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{e^x\,(x-1)}{x^2}.$

1.41 $\tau'=\dfrac{-\sin\varphi-\cos\varphi+2\varphi-\varphi^2}{e^{\varphi}}.$ **1.42** $y'=\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^3}.$

1.43 $y'=\dfrac{6}{\sqrt[4]{x}}-\dfrac{3}{2x\ln 3}.$ **1.44** $y'=\dfrac{5x^4+2^x\ln 2-x^5-2^x}{e^x}.$

1.45 $y'=\left(-\sin x-2^x\ln 2\right)\left(4^x+3\sin x\right)+\left(\cos x-2^x\right)\left(4^x\ln 4+3\cos x\right).$

1.46 $y'=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}6^x+\left(\sqrt{x}+2\right)6^x\ln 6\right)\operatorname{arctg}x\left(1+x^2\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)6^x}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}^2 x}.$

1.47 $y'=\dfrac{x^2\,(3-x\ln 4)}{4^x}.$ **1.48** $y'=5^x\ln 5\left(x^5-10x\right)+5^x\left(5x^4-10\right).$

1.49 $y'=2\pi x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ **1.50** $y'=\cos x\cdot\arccos x-\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

2.1 y $y'=\dfrac{1}{\sqrt{-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}-2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}}\cdot\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}.$

2.2 $y'=\dfrac{3e^{3x}}{2\arccos\sqrt{1-e^{3x}}\cdot\sqrt{1-e^{3x}}\cdot\sqrt{e^{3x}}}.$

2.3 $y'=-\dfrac{1}{3\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x}}}.$ **2.4** $y'=\dfrac{2x^3}{\left(1-x^4\right)\ln 3}.$

2.5 $y'=\dfrac{5\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(5x+\sqrt{x^2+1}\right)}.$ **2.6** $y'=\dfrac{4x}{1+x^4}.$

2.7 $y' = \dfrac{1}{2t(1+\ln 3t)\sqrt{\ln 3t}}$. **2.8** $y' = \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{3\cos^2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}\right)$.

2.9 $y' = 2e^x\left(\ln\operatorname{ctg}4x - \dfrac{8}{\sin 8x}\right)(\operatorname{ctg}4x)^{2e^x}$.

2.10 $y' = -\dfrac{2}{(x+1)^2}\operatorname{ctg}\dfrac{2x+4}{x+1}$. **2.11** $y' = \dfrac{1}{\sin\dfrac{2x+1}{2}}$.

2.12 $y' = \dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$. **2.13** $y' = -\dfrac{4e^{4x}\sqrt{\operatorname{arctg} e^{4x}}}{1+e^{8x}}$.

2.14 $y' = -\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{(1-2x)^{\frac{4}{5}}\cdot(1+2x)^{\frac{4}{5}}\cdot\left((1+2x)^{\frac{2}{5}}+(1-2x)^{\frac{2}{5}}\right)}$.

2.15 $y' = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$. **2.16** $y' = \dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$. **2.17** $y' = \dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{x}{2}+3\cos\dfrac{x}{2}\right)^2}$.

2.18 $y' = -\dfrac{4e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}}$. **2.19** $y' = \dfrac{5}{\sin\dfrac{e^{2\sin 5x}}{2}}\cdot e^{2\sin 5x}\cdot\cos 5x$.

2.20 $y' = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}\cdot\dfrac{1}{2+\ln(2x+3)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\ln(2x+3)}}\cdot\dfrac{1}{2x+3}$.

2.21 $y' = \dfrac{6\operatorname{ctg} 3t}{\ln 2}$.

2.22 $y' = 5^{\ln 3\cdot\cos^3(1-x)}\cdot\ln 5\cdot\left(\dfrac{\cos^3(1-x)}{x}+3\ln 3x\cdot\cos^2(1-x)\cdot\sin(1-x)\right)$.

2.23 $y' = \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{x}\right)x^{\arcsin x}$. **2.24** $y' = -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.25 $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\cdot\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$. **2.26** $y' = \dfrac{n\cdot x^{n-1}}{2\sqrt{x^{2n}+1}}$.

2.27 $y' = x(\ln x - 1)\dfrac{x^x}{e^x}\ln x.$ **2.28** $y' = -\dfrac{2\sqrt{2}\left(x^2+4\right)}{x^4+16}.$

2.29 $y' = 5^{x^3-3x^2+2x}\cdot\ln 5\cdot\left(3x^2-6x+2\right).$

2.30 $y' = -\dfrac{e^{-\arcsin 2x}\left(\sin 3x + 2\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{\sqrt[3]{\cos^2 3x}\cdot\sqrt{1-4x^2}}.$

2.31 $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x+5}\cdot\arccos^4 x - \dfrac{4\sqrt{(x+5)^3}\cdot\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}.$

2.32 $y' = \dfrac{\operatorname{arctg}^2 x^3}{(x+1)\ln 5} + \dfrac{6x^2\cdot\log_5(x+1)\cdot\operatorname{arctg} x^3}{1+x^6}.$

2.33 $y' = \dfrac{\mathrm{e}^{\operatorname{tg}3x}\left(6\left(3x^2-x+4\right)-\cos^2 3x(6x-1)\right)}{2\cos^2 3x\left(3x^2-x+4\right)^{\frac{3}{2}}}.$

2.34 $y' = \dfrac{2}{(4x+5)\ln 3\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{x}} + \dfrac{\log_3(4x+5)}{4\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}.$

2.35 $y' = 27\operatorname{ch}^2 9x\cdot\operatorname{sh} 9x\cdot\operatorname{arctg}(5x-1) + \dfrac{5\operatorname{ch}^3 9x}{1+(5x-1)^2}.$

2.36 $y' = 3\left(\dfrac{x-9}{x+9}\right)^{-\frac{5}{6}}\cdot\dfrac{1}{(x+9)^2}\cdot\operatorname{tg}\left(3x^2-4x+1\right)+$

$+\left(\dfrac{x-9}{x+9}\right)^{\frac{1}{6}}\dfrac{6x-4}{\cos^2\left(3x^2-4x+1\right)}.$

2.37 $y' = \left(\dfrac{\ln\operatorname{th}5x}{\sqrt{1-(x+1)^2}} + \arcsin(x+1)\cdot\dfrac{10}{\operatorname{sh}10x}\right)(\operatorname{th}5x)^{\arcsin(x+1)}.$

2.38 $y' = \left(4\cos 4x\cdot\ln\operatorname{arcctg}(3x-3) - \dfrac{3\sin 4x}{\operatorname{arcctg}(3x-3)\cdot\left(1+(3x-3)^2\right)}\right)\times$

$\times\left(\operatorname{arcctg}(3x-3)\right)^{\sin 4x}$.

2.39 $y'=\dfrac{12\arcsin^2 4x\cdot\operatorname{sh}(3x+1)-3\arcsin^3 4x\cdot\operatorname{ch}(3x+1)\cdot\sqrt{1-16x^2}}{\operatorname{sh}^2(3x+1)\cdot\sqrt{1-16x^2}}$.

2.40 $y'=-15\cos^4 3x\cdot\sin 3x\cdot\operatorname{tg}(4x+1)^3+\dfrac{12(4x+1)^2\cdot\cos^5 3x}{\cos^2(4x+1)^3}$.

2.41 $y'=-3\ln 3\cdot 3^{-x^3}\cdot x^2\cdot\operatorname{arctg}2x^5+\dfrac{10x^4\cdot 3^{-x^3}}{1+4x^{10}}$.

2.42 $y'=\dfrac{6}{x\cdot\ln\ln^2 x\cdot\ln x}$.

2.43 $y'=\left(\dfrac{7}{x+2}+\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{5}{2(x+1)}\right)\dfrac{(x+2)^7\cdot(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$.

2.44 $y'=\left(\dfrac{3}{5(x+2)}-\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{5}{x-3}\right)\dfrac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4\cdot(x-3)^5}$.

2.45 $y'=\dfrac{\frac{1}{2}\sin^2 8x+\cos^2 4x\cdot\cos 8x}{(\sin 8x)^2}$.

2.46 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

2.47 $y'=\dfrac{e^{3x}\cdot\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}e^{3x}}}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 e^{3x}}\cdot\left(1+e^{6x}\right)}$.

2.48 $y'=-\dfrac{(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)(\operatorname{ch}2x+\operatorname{sh}2x)}{\left((\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)^2+\operatorname{sh}2x\right)\sqrt{\operatorname{sh}2x}}$.

3.1 $2x+y-1=0,\ \ x-2y-3=0$. **3.2** $5x+y+3=0,\ \ x-5y+11=0$.
3.3 $2x+y-6=0,\ \ 2x-y+2=0$. **3.4** $\alpha=71°34'$.
3.5 $\varphi_1=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{8}{15}\right),\ \ \varphi_2=\operatorname{arctg}\dfrac{8}{15}$. **3.6** $3x-y-1=0,\ \ 3x-y-2=0$.

3.7 $x-y-8=0,\ \ x-y+8=0.$ **3.8** $4x+y+4=0,\ \ -2x+8y+15=0.$
3.9 $t_1=0,\ \ t_2=8.$ **3.10** $(1,0),\ \ (-1,-4).$ **3.11** $v\approx 16{,}18$ м / с.
3.12 $v=9$ м / с. **3.13** 8 Дж. **3.14** $\dfrac{dv}{dt}=\pi\left(4rh-r^2\right).$
3.15 $x\sqrt{5}-2y-1=0.$ **3.16** $\alpha=\dfrac{\pi}{4},\ \ y=x+1.$ **3.17** $x-y+1=0,$
$x+y+17=0.$ **3.18** $3x+y+6=0.$ **3.19** $\varphi=\dfrac{\pi}{4}.$ **3.20** $\varphi_1=\dfrac{\pi}{4},\ \ \varphi_2=\dfrac{3\pi}{4}.$
3.21 $M(-2,-8),\ \ M(2,8).$ **3.22** $M(3,2).$ **3.23** $\varphi_1=\operatorname{arctg}3,$
$\varphi_2=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}.$ **3.24** $y=2x-2,\ \ y=2x+2.$ **3.25** $t=\dfrac{\pi}{2},\ \ v=1,\ \ a=1.$
3.26 $w=3\ \text{с}^{-1},\ \ a=-3\ \text{с}^{-2},\ \ t=4$ с. **3.27** $v=10\pi$ см / с. **3.28** Через 3 с.

5.1 $y'''=60x^2-42.$ **5.2** $\dfrac{16}{25}.$ **5.7** $y'''=\dfrac{1}{(x+1)^4}.$ **5.8** $y'''=4\operatorname{sh}2x.$
5.9 $y''=\ln x.$ **5.10** $y''=\dfrac{7}{3}\cos 3x+x\cdot\sin 3x.$ **5.11** $y''=2\sqrt{1-x^2}.$
5.12 $y^{(n)}=\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^n}\sqrt{x}.$ **5.13** $y^{(n)}=\dfrac{n!(-2)^n}{(2x+1)^{n+1}}.$
5.14 $4t^3-4t;\ \ 12t^2-4.$ **5.15** $v=4;\ a=1.$

6.1 $y'=\dfrac{2xy^2-4x^3}{4y^3-2x^2y}.$ **6.2** $y'=\dfrac{\left(2xe^y-3x^2\right)y}{1-x^2ye^y}.$
6.3 $y'=\dfrac{\sin y}{2\sin 2y-x\cos y-\sin y}.$ **6.4** $y'=-\dfrac{2x+3y}{3x+2y},\ \ y'\big|_{(2;-1)}=-\dfrac{1}{4}$
6.5 $y'\big|_{(0;1)}=-e^{-1}.$ **6.6** $y'\big|_{(1;1)}=\dfrac{2e+1}{2e}.$ **6.7** $y'=\dfrac{-2x-ye^{xy}}{xe^{xy}+2y}\Big|_{x=1;\ y=0}=-2.$
6.8 $y'=\dfrac{\cos 3x}{y^2}.$ **6.9** $y'=-\dfrac{1}{\sin^2(x+y)}.$ **6.10** $y'\big|_{(0;0)}=-2.$

6.11 $y' = \dfrac{y^2}{x^2 + xy}$. **6.12** $y'' = -\dfrac{\left(1 + y'^2\right)}{y}$. **6.13** $y'' = \dfrac{2\left(x + yy'^2\right)}{\left(1 - y^2\right)}$.

6.14 $y'' = -\dfrac{4y'}{y^3}$. **6.15** $y'' = \dfrac{2yy'}{\left(1 - y^2\right)^2}$.

7.1 $y'_x = t^2 + \dfrac{1}{3}$. **7.2** $y'_x = \left(\sin 2t + \cos 2t\right)\cos^2 t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

7.3 $y'_x = -\dfrac{1}{2t}\Big|_{t=-\frac{1}{6}} = 3$. **7.4** $y'_x = \dfrac{t\left(2 - t^3\right)}{1 - 2t^3}\Big|_{t=0} = 0$.

7.5 $y'_x = \dfrac{\sin t}{1 + \cos t}$, $y''_{xx} = \dfrac{1}{\left(1 + \cos t\right)^2}$. **7.6** $y'_x = 2$, $y''_{xx} = 4$. **7.7** $y''_{xx} = 12$.

7.8 $y'_x = \operatorname{ctg} t$. **7.9** $y'_x = \operatorname{cth} t$. **7.10** $y'_x = -\dfrac{\cos\dfrac{t^3}{3+t} \cdot t^6\left(9 + 2t\right)}{\left(3 + t\right)^2\left(1 + t^2\right)}$.

7.11 $y'_x = 1$. **7.12** $y'_x = \dfrac{1}{1 - t}$. **7.13** $y'_x = -\sin 2e^t$. **7.14** $y'_x = -2\operatorname{tg}^2 t$.

7.15 $y'_x = \dfrac{\ln^2 t}{\sqrt{1 - t^2}}$. **7.16** $y'_x = \dfrac{2\left(1 + \sqrt{1 - t^2}\right)}{\sqrt{1 - t^2} \cdot t}$. **7.17** $y = x + 1$.

7.18 $y = -2\sqrt{2}x + 2$; $y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x - \dfrac{1}{4}$. **7.19** $x + y - 1 = 0$; $x - y = 0$.

7.20 $x - y + 2 - \dfrac{\pi}{2} = 0$; $x + y - \dfrac{\pi}{2} = 0$. **7.21** $x + y - 2 = 0$; $x - y = 0$.

8.1 $\dfrac{16}{13}$. **8.2** $\dfrac{1}{3}$. **8.3** $\dfrac{1}{2}$. **8.4** 0. **8.5** $\dfrac{3}{e}$. **8.6** 0. **8.7** $\dfrac{1}{2}$. **8.8** 0. **8.9** 0.

8.10 1. **8.11** 1. **8.12** $-\infty$. **8.13** 0. **8.14** $\dfrac{1}{4}$. **8.15** $\dfrac{1}{2}$. **8.16** 0. **8.17** $\dfrac{3}{5}$.

8.18 2. **8.19** $\frac{2}{3}$. **8.20** $0{,}18$. **8.21** 1. **8.22** ∞. **8.23** $\frac{1}{\pi}$. **8.24** 0. **8.25** $-\frac{1}{2}$.
8.26 $\frac{1}{2}$. **8.27** e^{-6}. **8.28** $\ln 2$. **8.29** 1. **8.30** $-\frac{2}{3}$.

9.1 $x=-3;\ y=x$. **9.2** $x=\pm 2;\ y=x$. **9.3** $y=\frac{\pi}{2}x-1$ при $x\to+\infty$; $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ при $x\to-\infty$. **9.4** $x=-3;\ y=1$. **9.5** $x=1;\ y=2x$.
9.6 $x=1;\ \ y=x+2$. **9.7** $x=0;\ y=x-4$. **9.8** $x=1;\ x=3;\ y=0$.
9.9 $x=-1;\ y=x$. **9.10** $x=1;\ x=-1;\ \ y=x$ при $x\to+\infty$; $y=-x$ при $x\to-\infty$. **9.11** $x=-2;\ x=2;\ y=1$. **9.12** $y=x$. **9.13** $y=x$ при $x\to+\infty$; $y=-x$ при $x\to-\infty$. **9.14** $y=2x-2$ при $x\to+\infty$; $y=-2$ при $x\to-\infty$. **9.15** $y=2$. **9.16** $x=0;\ y=0$ при $x\to+\infty$; $y=1$ при $x\to-\infty$. **9.17** $y=-x$ при $x\to+\infty$; $y=-3x$ при $x\to-\infty$.
9.18 $y=0$ при $x\to-\infty$. **9.19** $x=\pi(2n+1),\ n\in\mathbb{Z}$. **9.20** $x=0$.
9.21 $x=5$. **9.22** $x=0;\ y=0$ при $x\to-\infty$. **9.23** $x=0;\ y=0$ при $x\to+\infty$. **9.24** $x=1$.

10.1 $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ – возр., $(1;3)$ – убыв.
10.2 $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ – убыв., $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{3}\right)$ – возр.
10.3 $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – убыв. **10.4** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$ – убыв., $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$ – возр.
10.5 $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$ – убыв. **10.6** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ – возр., $(-1;1)\cup(1;3)$ – убыв. **10.7** $\left(0;\frac{16}{9}\right)$ – убыв.; $\left(\frac{16}{9};+\infty\right)$ – возр.
10.8 $(-\infty;+\infty)$ – возр. **10.9** $\min\left(2;-\frac{17}{3}\right)$; $\max\left(-1;\frac{10}{3}\right)$.
10.10 Функция не имеет экстремумов.
10.11 $\max(0{,}8;\ 0{,}17)$; $\min(1;0)$. **10.12** $\max(-2;-1{,}89)$.

10.13 $\min(-1;-2,5);\max(1;2,5)$. **10.14** $\max(-1;-2);\min(1;2)$.
10.15 Функция не имеет экстремумов. **10.16** $\min(0;-6,5)$.
10.17 $\max(0;5)$. **10.18** $\min\left(2;-\sqrt[3]{4}\right)$. **10.19** $\max(0;3)$.
10.20 $\max\left(e;\frac{1}{e}\right)$. 1**0.21** $\max\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\sqrt{2}\right)$; $\min\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k;-\sqrt{2}\right)$,
$k\in$ □. 1**0.22** $\min\left(\frac{1}{e};-\frac{1}{e}\right)$. 1**0.23** $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ – убыв.,
$(-1;0)\cup(1;+\infty)$ – возр.; $\min(-1;0)$, $\min(1;0)$, $\max(0;1)$.
10.24 $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – убыв., $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$ – возр.; $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}};-\frac{1}{2e}\right)$.
10.25 $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ – возр., $(-1;1)$ – убыв.; $\max\left(-1;-1+\frac{3\pi}{2}\right)$,
$\min\left(1;1+\frac{\pi}{2}\right)$. **10.26** $(-\infty;-2)\cup(-1;0)$ – убыв., $(-2;-1)\cup(0;+\infty)$ –
возр.; $\min(-2;4)$, $\min(0;4)$, $\max(-1;4,25)$.
10.27 $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(1;+\infty)$ – возр., $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ – убыв.; $\max\left(-\frac{3}{2};5\right)$,
$\min(1;0)$. **10.28** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2};2\right)\cup(2;+\infty)$ – убыв.,
$\left(-\sqrt{2};1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$ – возр.; $\min\left(-\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}\right)$, $\max\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}\right)$.

11.1 $(-\infty;-2)\cup(0;1)$ – выпукла, $(-2;0)\cup(1;+\infty)$ – вогнута,
т. п. $(-2;19)$, $(0;-5)$, $(1;43)$. **11.2** $(-\infty;1)$ – выпукла, $(1;+\infty)$ –
вогнута, т. п. $(1;16)$. **11.3** $(-\infty;-1)$ – выпукла, $(-1;+\infty)$ – вогнута,
т. п. $(-1;3)$. **11.4** $(-\infty;-1)$ – вогнута, $(-1;+\infty)$ – выпукла, т. п. нет.
11.5 $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(0;\sqrt{3}\right)$ – выпукла, $\left(-\sqrt{3};0\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ – вогнута,

т. п. $\left(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),(0;0),\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **11.6** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ – вогнута, $(0;1)$ – выпукла, т. п. $(1;0)$. **11.7** $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ – вогнута, $(-2;0)$ – выпукла, т. п. $(-2;0)$. **11.8** $(-\infty;4)$ – вогнута, $(4;+\infty)$ – выпукла, т. п. $(4;5)$. **11.9** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ – выпукла, $(-2;2)$ – вогнута, т. п. $(-2;3\ln 2)$, $(2;3\ln 2)$. **11.10** $\left(0;\frac{1}{e}\right)$ – выпукла, $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$ – вогнута, т. п. $\left(\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$. **11.11** $(-\infty;0)$ – выпукла, $(0;+\infty)$ – вогнута, т. п. $(0;0)$. **11.12** $(-\infty;-0,5\ln 2)$ – выпукла, $(-0,5\ln 2;0)\cup(0;+\infty)$ – вогнута, т. п. $\left(-0,5\ln 2;2^{-\frac{2}{\ln 2}}\right)$.

11.13 $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$ – вогнута, $(2;3)$ – выпукла, т. п. $(2;-19),(3;5)$. **11.14** $(-\infty;-7)$ – вогнута, $(-7;+\infty)$ – выпукла, т. п. нет. **11.15** $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ – вогнута, $(-2;0)$ – выпукла, т. п. $\left(-2;-12\sqrt[3]{4}\right),(0;0)$. **11.16** $\left(-\infty;-3\sqrt{3}\right)\cup\left(0;3\sqrt{3}\right)$ – выпукла, $\left(-3\sqrt{3};0\right)\cup\left(3\sqrt{3};+\infty\right)$ – вогнута, т. п. $\left(-3\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{12}\right),(0;0),\left(3\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$.

11.17 $(-\infty;-2)$ – выпукла, $(-2;+\infty)$ – вогнута, т. п. $(-2;-0,3)$.

11.18 $(-\infty;1)$ – выпукла, $(1;+\infty)$ – вогнута, т. п. $(1;2)$.

11.19 $(-\infty;-2)$ – вогнута, $(-2;+\infty)$ – выпукла, т. п. $(-2;3)$.

11.20 $(-\infty;-1)$ – выпукла, $(-1;+\infty)$ – вогнута, т. п. нет.

11.21 $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ – вогнута, $(-2;2)$ – выпукла, т. п. нет.

11.22 Кривая везде вогнута.

13.1 $f(2)=-9$ – наим. значение, $f(0)=7$ – наиб. значение.

13.2 $f(-2)=8$ – наиб. значение, $f(2)=-19$ – наим. значение.

13.3 $f(0)=0-$ наим. значение, $f(1)=\frac{1}{e}-$ наиб. значение.

13.4 $y\left(\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=-\frac{4}{3\sqrt{3}}-$ наим. значение,

$y\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}-$ наиб. значение. **13.5** $y_{\text{наим}}=y_{\min}=0;$ наибольшего значения функция не имеет.

13.6 $y_{\text{наиб}}=y_{\max}=y(0)=1;$ наименьшего значения функция не имеет. **13.7** $y_{\text{наим}}=y_{\min}=y(0)=-1;$ наибольшего значения функция не имеет. **13.8** $f(2)=-1-$ наим. значение,

$f(0)=3-$ наиб. значение. **13.9** $f(0)=3-$ наиб. значение,

$f(2)=f(-2)=-13-$ наим. значение.

13.10 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-1-$ наим. значение, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{4}-$ наиб. значение.

13.11 $u(-1)=40-$ наиб. значение, $u(-4)=-41-$ наим. значение.

13.12 $p(e)=e^2-$ наиб. значение, $p(1)=0-$ наим. значение.

13.13 $y(2)=10-$ наиб. значение, $y(0)=-10-$ наим. значение.

13.14 $u(1)=1-$ наиб. значение, $u(2)=2(1-\ln 2)-$ наим. значение.

13.15 $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}-$ наиб. значение, $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-$ наим. значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 456 с.

2 **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 416 с.

3 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. : учеб. пособие для втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 1999. – Ч. 1. – 304 с.

4 Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. : учеб. пособие / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1. – 349 с.

5 Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. : учеб. пособие / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1. – 304 с.

6 **Кузнецов Л. А.** Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – СПб. : Лань, 2005. – 240 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ЩЕРБО Аркадий Митрофанович
ШАБАЛИНА Ирина Петровна
ПРОКОПЕНКО Алла Ивановна

Производная и ее приложения
Учебно-методическое пособие

Редактор И. И. Э в е н т о в
Технический редактор В. Н. К у ч е р о в а

Подписано в печать 10.10.2010 г. Формат $60\times84\ ^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 3,09. Тираж 1500 экз.
Зак. № . Изд. № 64.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.

246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.