МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра “Техническая физика и теоретическая механика”

Д. А. ЧЕРНОУС, О. С. КОЛОМНИКОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Раздел «Основы аналитической механики»

(Обзор материала и задания для контрольных работ)

**Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей**

Гомель 2008

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра “Техническая физика и теоретическая механика”

Д. А. ЧЕРНОУС, О. С. КОЛОМНИКОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Раздел «Основы аналитической механики»

(Обзор материала и задания для контрольных работ)

Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей

Одобрено методической комиссией факультета безотрывного обучения

Гомель 2008

УДК 531.1 (075.8)
ББК 22.21
Ч-49

Рецензент – канд. техн. наук, доцент кафедры “Техническая физика и теоретическая механика” А. О. Шимановский (УО «БелГУТ»).

Черноус, Д. А.

Ч-49 Теоретическая механика. Раздел «Основы аналитической механики» (Обзор материала и задания для контрольных работ) : учеб.-метод. пособие для студентов технических специальностей / Д. А. Черноус, О. С. Коломникова ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 64 с.
ISBN 978-985-468-434-5

Изложены краткие сведения из раздела «Основы аналитической механики» курса теоретической механики в соответствии с программой технических вузов. Разобраны примеры решения задач по изучаемым темам. Приведены условия заданий контрольных работ по теоретической механике.

Предназначено для студентов факультета безотрывного обучения.

УДК 531.1 (075.8)
ББК 22.21

ISBN 978-985-468-434-5

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4

1 Принцип возможных перемещений 6
1.1 Некоторые положения теории 6
1.1.1 Принцип возможных перемещений 6
1.1.2 Порядок решения задач по определению реакций связей с использованием принципа возможных перемещений 7
1.2 Примеры выполнения задач контрольной работы 8
1.3 Условие задания Д-8 26

2 Применение общего уравнения динамики к описанию движения материальной системы 31
2.1 Некоторые положения теории 31
2.1.1 Сила инерции 31
2.1.2 Принцип Даламбера и общее уравнение динамики 32
2.1.3 Порядок решения задач с использованием общего уравнения динамики системы 33
2.2 Пример выполнения задания контрольной работы 33
2.3 Условие задания Д-9 38

3 Решение уравнений Лагранжа второго рода 44
3.1 Некоторые положения теории 44
3.1.1 Обобщенные координаты 44
3.1.2 Обобщенные силы 45
3.1.3 Уравнение Лагранжа второго рода 48
3.1.4 Порядок решения задач с использованием уравнений Лагранжа второго рода 49
3.2 Пример выполнения задания контрольной работы 49
3.3 Условие задания Д-10 55

Список рекомендуемой литературы 61

Приложение А Программа курса «Теоретическая механика» 62

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие является продолжением работ [1, 2] и содержит краткий обзор материала раздела «Основы аналитической механики» курса теоретической механики. Здесь же приводятся примеры решения задач и задания для контрольных работ студентов заочной формы обучения.

Перед выполнением каждого задания контрольной работы студент должен ознакомиться с теорией, опираясь не только на материал, изложенный в пособии, но и на учебники [1–4]. Затем он должен разобрать приведенный пример решения задачи, а уже после этого приступать к индивидуальному заданию.

Каждое задание содержит 30 вариантов задач. **Студент во всех заданиях выбирает номер варианта по двум последним цифрам учебного шифра** (см. страницу 5). Буква «Д» в номере задачи обозначает, что эта задача относится к разделу «Динамика».

По указанию преподавателя объем контрольной работы может быть сокращен для студентов отдельных специальностей.

Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной ученической тетради. На обложке указывают: название кафедры, название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, специальность и адрес.

Решение каждой задачи обязательно следует начинать *с новой страницы*. Оформление задачи начинают с указания номера и варианта задачи, ее названия, далее делается чертеж и записывается, что дано и требуется определить (текст условия задачи полностью не переписывают). Чертеж должен быть выполнен в соответствии с требованиями инженерной графики с применением чертежных инструментов, а его размеры должны быть таковы, чтобы позволить ясно показать все векторы скоростей, ускорений и другие детали. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы измерения получаемых величин нужно *обязательно*. Все записи должны быть сделаны доступным для чтения шрифтом. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. д.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице *оставлять поля* для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются для переоформления. К работе, предъявляемой к повторной проверке (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

Ко дню экзамена (зачета) работа должна быть защищена у проверяющего ее преподавателя. При этом все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

Варианты заданий для выполнения контрольной работы

Учебный шифр	Варианты заданий			Учебный шифр	Варианты заданий			Учебный шифр	Варианты заданий			Учебный шифр	Варианты заданий		
	Д-8	Д-9	Д-10		Д-8	Д-9	Д-10		Д-8	Д-9	Д-10		Д-8	Д-9	Д-10
01	7	3	16	26	24	4	22	51	1	7	19	76	11	5	19
02	26	14	8	27	30	22	11	52	9	15	26	77	24	19	9
03	11	27	29	28	22	17	3	53	4	25	28	78	22	29	11
04	18	2	17	29	8	8	20	54	16	2	13	79	2	8	15
05	22	25	1	30	5	19	26	55	11	28	30	80	15	18	29
06	4	16	20	31	14	20	13	56	6	30	17	81	21	26	17
07	1	6	14	32	9	9	24	57	17	26	4	82	18	3	12
08	14	28	2	33	20	23	7	58	30	11	22	83	26	27	9
09	21	11	8	34	12	5	16	59	14	29	8	84	9	25	30
10	8	9	15	35	7	28	25	60	26	17	11	85	4	10	13
11	16	22	10	36	15	14	9	61	27	13	5	86	16	23	28
12	25	12	23	37	25	30	4	62	30	28	1	87	13	1	23
13	29	24	7	38	2	10	18	63	13	24	9	88	23	16	6
14	15	4	19	39	23	24	1	64	24	6	30	89	6	7	20
15	23	20	4	40	10	12	14	65	7	22	14	90	29	13	2
16	12	13	24	41	17	29	7	66	28	26	3	91	3	26	21
17	19	30	3	42	19	16	23	67	15	9	12	92	17	21	10
18	10	7	18	43	29	1	19	68	12	20	25	93	28	22	5
19	3	27	12	44	6	21	12	69	19	8	6	94	14	2	26
20	9	10	22	45	13	6	21	70	2	21	21	95	5	29	17
21	27	5	14	46	16	27	2	71	3	12	24	96	10	17	25
22	5	23	16	47	21	25	10	72	25	19	5	97	1	24	15
23	13	18	10	48	18	11	27	73	8	3	18	98	27	15	6
24	20	1	28	49	4	3	15	74	20	15	27	99	20	30	11
25	6	14	27	50	11	18	13	75	28	4	16	00	12	23	29

1 ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1.1 Некоторые положения теории

1.1.1 Принцип возможных перемещений

Возможными, или виртуальными, называют воображаемые бесконечно малые перемещения системы, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями и не изменяющие действие связей. Число независимых возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы. Возможное перемещение точки обозначается символом $\delta\bar{s}$, бесконечно малое действительное перемещение точки – символом $d\bar{s}$. Возможное перемещение $\delta\bar{s}$ – это перемещение, которое точка *может* совершить *в данный момент времени*, а действительное перемещение – это перемещение, которое *совершает* точка *за элементарный промежуток времени dt*.

Возможное перемещение материальной точки, находящейся на поверхности, направлено по касательной к поверхности. Возможные перемещения всех точек поступательно движущегося тела одинаковы.

Возможным перемещением вращательно движущегося тела является поворот на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг оси вращения (рисунок 1.1). При этом возможное перемещение точки вращающегося тела направлено перпендикулярно отрезку h, соединяющему данную точку с осью вращения,

$$\delta s = h\,\delta\varphi .$$

Если тело движется плоско, то его возможное перемещение представляет собой поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг оси, проходящей через мгновенный центр перемещений (МЦП). Положение МЦП тела совпадает с положением мгновенного центра скоростей.

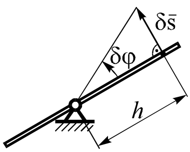


Рисунок 1.1

При определении работы сил на элементарном перемещении силы принимаются постоянными. Поэтому работа δA силы $\bar{F}$ на возможном перемещении точки $\delta\bar{s}$ приложения данной силы определяется как скалярное произведение:

$$\delta A = \bar{F}\cdot\delta\bar{s} = F_i\,\delta s_i\cos\alpha_i ,$$

где α_i – угол между векторами $\bar{F}$ и $\delta\bar{s}$.

Если сила $\bar{F}$ приложена к телу, совершающему поворот на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг точки O, то работу такой силы можно определить по формуле

$$\delta A = M_O(\bar{F})\,\delta\varphi ,$$

где $M_O(\overline{F})$ – момент силы $\overline{F}$ относительно точки *O*. Если момент $M_O(\overline{F})$ противоположен направлению возможного вращения, то работа силы $\overline{F}$ отрицательна.

Если сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, то такие связи называют *идеальными*. К идеальным относятся следующие связи: 1) гладкая поверхность; 2) шероховатая поверхность при качении тела без проскальзывания; 3) упругая нить; 4) невесомый стержень; 5) цилиндрический и сферический шарниры; 6) жесткая заделка. При наличии скольжения связь типа шероховатая поверхность не является идеальной, так как работа силы трения при возможном перемещении не равна нулю.

Принцип возможных перемещений формулируется следующим образом: *для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю:*

$$\sum \delta A(\overline{F}_i) = 0\,, \tag{1.1}$$

где $\delta A(\overline{F}_i)$ – элементарная работа *i*-й активной силы на возможном перемещении точки ее приложения.

1.1.2 Порядок решения задач по определению реакций связей с использованием принципа возможных перемещений

Определение реакций связей с использованием принципа возможных перемещений рекомендуется осуществлять по следующей методике.

1 Изображают рассматриваемую систему и указывают все действующие на нее силы (как активные, так и реакции связей).

2 Для каждой искомой реакции выполняют следующие действия:

а) отбрасывают ту связь, реакции которой требуется определить. Действие связи заменяют ее реакцией, которую добавляют к активным силам. Если связь имеет несколько составляющих реакции, то каждую составляющую определяют отдельно. При этом данную связь заменяют другой, допускающей движение в направлении действия определяемой составляющей. Если требуется определить момент заделки, то допускают поворот тела, к которому приложена связь. Изображают систему без отброшенной связи и указывают все активные силы;

б) системе сообщают возможное перемещение. Указывают возможные перемещения точек приложения активных сил и углы поворота тел системы;

в) определяют элементарные работы всех активных сил на возможных перемещениях;

г) устанавливают зависимость между возможными перемещениями и выражают их через возможное перемещение одной точки или один возможный угол поворота. При определении зависимости между возможными перемещениями точек следует первоначально установить зависимость между их возможными скоростями. Связь между возможными перемещениями такая же, как и между соответствующими скоростями;

д) в соответствии с принципом возможных перемещений, приравнивают сумму активных сил на возможных перемещениях нулю. Сокращают возможное перемещение, через которое выражены перемещения всех точек, и определяют искомую реакцию.

3) Проверяют правильность решения задачи. Для этого составляют уравнения равновесия исследуемой системы и подставляют в них найденные значения реакций связей. Если найденные значения удовлетворяют условиям равновесия, то задача решена верно.

Искомые реакции округляют до сотых долей кН (для сил) или кН·м (для моментов). Уравнения равновесия считаются удовлетворенными, если их правые части обращаются в ноль при округлении до десятых долей кН (или кН·м).

1.2 Примеры выполнения задач контрольной работы

Задача 1

Определить реакции связей составной конструкции, изображенной на рисунке 1.2. Дано: l = 1 м; $\alpha = 60°$; F = 6 кН; M = 11 кН·м; q = 2 кН/м.

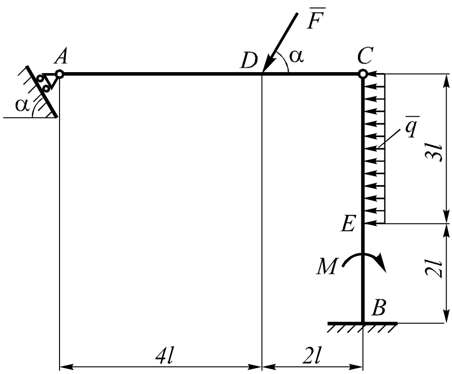


Рисунок 1.2

Р е ш е н и е

1 *Изображаем исследуемую систему и указываем действующие на нее силы* (рисунок 1.3). Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $\overline{Q}$, приложенной в центре отрезка *CE*. Следовательно, $CH = \frac{1}{2}CE = \frac{3}{2}l$. Модуль силы $\overline{Q}$ определяется следующим образом: $Q = q \cdot CE = q \cdot 3l, \quad Q = 2 \cdot 3 = 6$ кН .

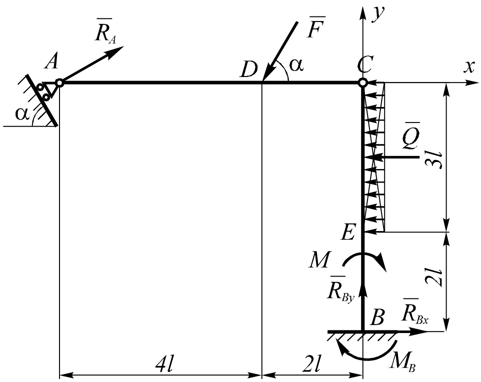


Рисунок 1.3

В точке *A* действует реакция связи типа гладкая поверхность $\overline{R}_A$, направленная перпендикулярно опорной поверхности. В точке *B* на тело действует связь типа жесткая заделка. Реакция данной связи состоит из силы $\overline{R}_B$ и момента заделки M_B. Силу $\overline{R}_B$ разложим на две составляющие $\overline{R}_{Bx}, \overline{R}_{By}$. Таким образом, необходимо определить 4 величины: R_A, R_{Bx}, R_{By}, M_B.

2 *Приступаем к определению искомых реакций.*

2.1 Определим реакцию R_A.

а) отбросим связь, соответствующую силе R_A. Тогда сила R_A перейдет в разряд активных, а точка *A* получит возможность перемещаться. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 1.4);

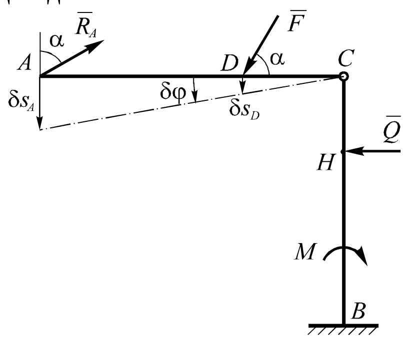


Рисунок 1.4

б) сообщаем системе возможные перемещения. Так как в точке *B* действует жесткая заделка, то тело *BC* останется неподвижным. Следовательно, возможным перемещением тела *AC* может быть только поворот вокруг точки *C* на бесконечно малый угол $\delta\varphi$. Укажем возможные перемещения точек приложения сил (точек *A* и *D*). Так как точка *C* – центр вращения тела *AC*, то вектор $\delta\bar{s}_A$ направлен перпендикулярно отрезку *AC*, а вектор возможного перемещения $\delta\bar{s}_D$ направлен перпендикулярно отрезку *DC*;

в) определим элементарные работы сил на указанных перемещениях:

$$\delta A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \delta\bar{s}_D = F\delta s_D \sin\alpha;$$

$$\delta A(\bar{R}_A) = \bar{R}_A \cdot \delta\bar{s}_A = -R_A\delta s_A \cos\alpha;$$

г) установим связь между возможными перемещениями δs_A и δs_D. Перемещение δs_A связано с углом поворота тела *AC* следующим образом: $\delta s_A = AC\delta\varphi = 6l\delta\varphi$. Следовательно, $\delta\varphi = \delta s_A / 6l$. Для перемещения δs_D можно записать: $\delta s_D = DC\delta\varphi = 3l\delta\varphi$. Подставим ранее полученное выражение для угла $\delta\varphi$:

$$\delta s_D = \frac{3l}{6l}\delta s_A = \frac{1}{2}\delta s_A;$$

д) запишем формулировку принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\bar{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(\bar{F}) + \delta A(\bar{R}_A) = 0.$$

Подставим выражение для элементарных работ:

$$F\delta s_D \sin\alpha - R_A\delta s_A \cos\alpha = 0.$$

Воспользуемся выведенной формулой для перемещения δs_D:

$$F\frac{1}{2}\delta s_A \sin\alpha - R_A\delta s_A \cos\alpha = 0.$$

Разделим полученное равенство на δs_A и выразим искомую силу R_A:

$$R_A = \frac{1}{2}F\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Подставим известные численные значения:

$$R_A = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,60° \cdot 6 = 5{,}2 \text{ кН}.$$

2.2 *Определим горизонтальную составляющую реакции жесткой заделки* R_{Bx}*:*

а) отбросим связь, препятствующую горизонтальному смещению точки *B*, заменив жесткую заделку скользящей (направляющими). Тогда сила R_{Bx} перейдет в разряд активных. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 1.5);

б) сообщаем системе возможные перемещения. Точка *B* может перемещаться только горизонтально $\delta\bar{s}_B$. Так как реакция в точке *B* запрещает поворот, то тело *BC* будет двигаться поступательно. Тогда $\delta\bar{s}_F \parallel \delta\bar{s}_B$ и $\delta s_F = \delta s_B$. Кроме того, $\delta\bar{s}_C \parallel \delta\bar{s}_B$ и $\delta s_C = \delta s_B$. Таким образом, тело *BC* смещается на $\delta\bar{s}_B$. Перемещение точки *A* $\delta\bar{s}_A$ направлено параллельно опорной поверхности (см. рисунок 1.5). Для того чтобы указать возможное перемещение тела *AC* найдем его мгновенный центр перемещений. МЦП тела совпадает с мгновенным центром скоростей. Векторы возможных скоростей точек совпадают по направлению с векторами возможных перемещений. Следовательно, мгновенный центр скоростей будет лежать на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек *A* и *C* к векторам их возможных перемещений (точка *P*). МЦП тела является также мгновенным центром вращения. Следовательно, возможное перемещение тела *AC* представляет собой поворот вокруг точки *P* на угол δφ. Смещение точки приложения силы $\bar{F}$ направлено перпендикулярно отрезку *DP* (см. рисунок 1.5);

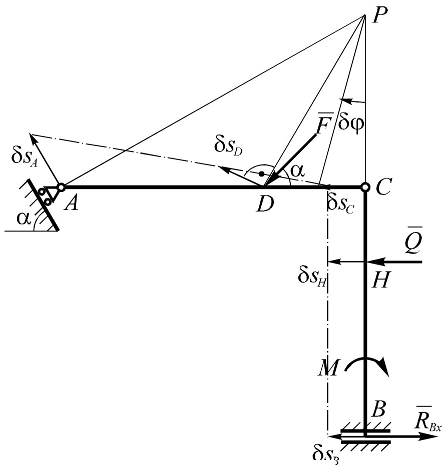


Рисунок 1.5

в) определим элементарные работы сил на указанных возможных перемещениях:

$$\delta A(\bar{R}_{Bx}) = -R_{Bx}\,\delta s_B\,;$$

$$\delta A(\bar{Q}) = Q\,\delta s_C = q \cdot 3l \cdot \delta s_B\,.$$

Так как тело *BC* движется поступательно, то момент *M* работы не совершает. Сила $\bar{F}$ приложена к вращающемуся телу *AC*. Следовательно, работу этой силы на возможном угле поворота можно определить по работе момента:

$$\delta A(\bar{F}) = M_P(\bar{F})\delta\varphi\,.$$

Здесь $M_P(\bar{F})$ – момент силы $\bar{F}$ относительно точки *P*, вокруг которой происходит возможное вращение тела *AC*. Для определения этого момента силу $\bar{F}$ удобно разложить на горизонтальную $\bar{F}'$ и вертикальную $\bar{F}''$ составляющие (см. рисунок 1.4). В соответствии с правилом определения проекции силы на ось, модули этих составляющих будут иметь следующие значения:

$$F' = F\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F' = 6\cos 60° = 3 \text{ кН};$$

$$F'' = F\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F'' = 6\sin 60° = 5{,}2 \text{ кН}.$$

Момент силы $\overline{F}$ относительно точки P равен сумме моментов сил $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$. Тогда

$$\delta A(\overline{F}) = M_P(\overline{F}')\delta\varphi + M_P(\overline{F}'')\delta\varphi .$$

Момент силы $\overline{F}'$ относительно точки P совпадает по направлению с углом поворота δφ, а момент силы $\overline{F}''$ – противоположен повороту. Следовательно, первое слагаемое в правой части последнего равенства будет положительным, а второе — отрицательным:

$$\delta A(\overline{F}) = F'PC\,\delta\varphi - F''CD\,\delta\varphi .$$

Определим длину отрезка PC. В прямоугольном треугольнике ACP угол C равен $90°$, а угол $\angle PAC = 90° - \alpha$. Следовательно,

$$PC = AC\,\mathrm{tg}(90° - \alpha) = 6l\,\mathrm{ctg}\,\alpha .$$

Подставим выражения для модулей составляющих $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$ в формулу для работы силы $\overline{F}$:

$$\delta A(\overline{F}) = F\cos\alpha \cdot 6l\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\delta\varphi - F\sin\alpha \cdot 3l\delta\varphi = 3Fl\,\delta\varphi(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \sin\alpha);$$

г) установим связь между возможным перемещением δs_B и углом δφ. Для определения этой связи используем метод общей точки. Общей для звеньев AC и BC является точка C. Так как тело BC движется поступательно, то $\delta s_C = \delta s_B$. С другой стороны, точка C принадлежит телу AC, для которого точка P является мгновенным центром скоростей. Следовательно, $\delta s_C = \delta\varphi\,CP = \delta\varphi\,6l\,\mathrm{ctg}\alpha$. Тогда

$$\delta s_B = \delta\varphi \cdot 6l\,\mathrm{ctg}\,\alpha;$$

д) запишем формулировку принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(\overline{R}_{Bx}) + \delta A(\overline{Q}) + \delta A(\overline{F}) = 0 .$$

Подставим выражения для элементарных работ:

$$-R_{Bx}\delta s_B + q \cdot 3l\,\delta s_B + 3Fl\,\delta\varphi(32\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \sin\alpha) = 0 .$$

Воспользуемся ранее выведенной формулой для δs_B:

$$-R_{Bx} \cdot 6l\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\delta\varphi + q \cdot 3l \cdot 6l\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\delta\varphi + 3Fl\,\delta\varphi(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \sin\alpha) = 0 .$$

Разделим полученное равенство на $3l\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\delta\varphi$:

$$-2R_{Bx}+q\cdot 6l+F\left(2\cos\alpha-\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)=0\,.$$

Выразим искомую силу R_{Bx}:

$$R_{Bx}=q\cdot 3l+F\left(\cos\alpha-\frac{\sin\alpha^{2}}{2\cos\alpha}\right).$$

Подставим известные численные значения

$$R_{Bx}=2\cdot 3\cdot 1+6\cdot\left(0{,}5-\frac{0{,}75}{2\cdot 0{,}5}\right)=6-1{,}5=4{,}5\ \text{кН}\,.$$

2.3 *Определим вертикальную составляющую реакции жесткой заделки R_{By}:*

а) отбросим связь, препятствующую вертикальному смещению точки B, заменив жесткую заделку скользящей. Тогда сила $\overline{R}_{By}$ перейдет в разряд активных. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 1.6);

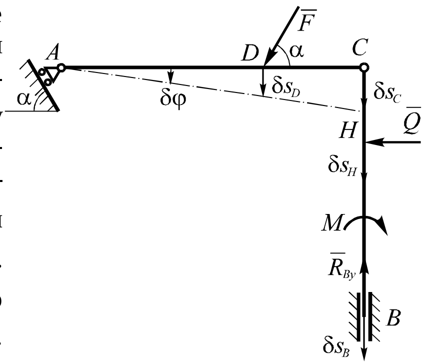


Рисунок 1.6

б) сообщаем системе возможные перемещения. Точка B может двигаться только вертикально $\delta\overline{s}_B$. Так как реакция в точке B препятствует повороту тела BC, то BC движется поступательно. Тогда $\delta\overline{s}_F \parallel \delta\overline{s}_B$ и $\delta s_F=\delta s_B$. Кроме того, $\delta\overline{s}_C \parallel \delta\overline{s}_B$ и $\delta s_C=\delta s_B$. Таким образом, тело BC смещается на $\delta\overline{s}_B$. Перемещение точки A $\delta\overline{s}_A$ направлено параллельно опорной поверхности (см. рисунок 1.6). Для того чтобы указать возможное перемещение тела AC найдем его мгновенный центр перемещений. Мгновенный центр перемещений будет лежать на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек A и C к векторам их возможных перемещений. Видим, что МЦП тела AC совпадает с точкой A. Следовательно, возможное перемещение тела AC представляет собой поворот вокруг точки A на угол δφ. Возможное перемещение точки D $\delta\overline{s}_D$ направлено перпендикулярно отрезку AD;

в) определим элементарные работы сил на указанных перемещениях:

$$\delta A(\overline{R}_{By})=-R_{By}\,\delta s_B;\quad \delta A(\overline{Q})=Q\,\delta s_F\cos 90^\circ=0;\quad \delta A(\overline{F})=F\,\delta s_D\sin\alpha.$$

Так как тело *BC* движется поступательно, то момент *M* работы не совершает;

г) установим связь между возможными перемещениями δs_D и δs_B. Точка *C* – общая для тел *AC* и *BC*. Так как тело *BC* движется поступательно, то $\delta s_C = \delta s_B$. Тело *AC* вращается вокруг точки *A*. Следовательно,

$$\delta s_C = \delta\varphi\, AC \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi = \frac{\delta s_B}{AC}.$$

Для перемещения точки *D* можно записать: $\delta s_D = \delta\varphi\, AD$. Подставим выражение для угла поворота:

$$\delta s_D = \frac{AD}{AC}\delta s_B = \frac{3l}{6l}\delta s_B = \frac{1}{2}\delta s_B;$$

д) запишем формулировку принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(\overline{R}_{By}) + \delta A(\overline{F}) = 0.$$

Подставим выражения для элементарных работ сил:

$$-R_{By}\,\delta s_B + F\,\delta s_D \sin\alpha = 0.$$

Воспользуемся выражением для δs_D:

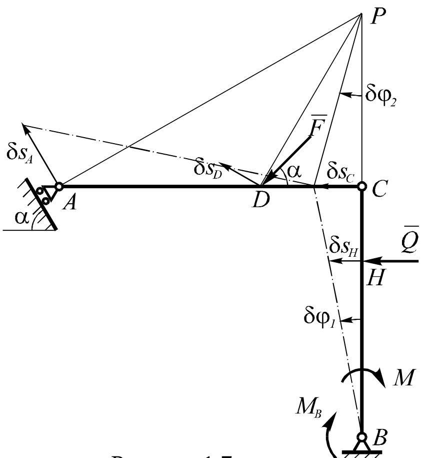


Рисунок 1.7

$$-R_{By}\delta s_B + F\frac{1}{2}\delta s_B \sin\alpha = 0.$$

Разделим последнее равенство на δs_B и выразим искомую силу R_{By}:

$$R_{By} = \frac{1}{2}F\sin\alpha.$$

Подставим известные численные значения:

$$R_{By} = \frac{1}{2}\cdot 6\sin 60^\circ = 2{,}6 \text{ кН}.$$

2.4 *Определим момент заделки* M_B:

а) отбросим связь, препятствующую вращению тела *BC* вокруг точки *B*, заменив жесткую заделку цилиндрическим шарниром. При этом момент M_B перейдет в разряд активных силовых факторов. Делаем рисунок (рисунок 1.7), указываем активные силы и пары сил;

б) сообщаем системе возможные перемещения. Тело *BC* поворачивается вокруг точки *B* на возможный угол $\delta\varphi_1$. Для определения положения МЦП тела AC укажем возможные перемещения точек A и C. Перемещение точки A направлено параллельно опорной поверхности. Так как тело BC вращается вокруг точки B, то вектор возможного перемещения точки C направлен перпендикулярно отрезку BC. МЦП тела AC лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к векторам возможных перемещений точек A и C (см. рисунок 1.7). Таким образом, возможное перемещение тела AC – поворот вокруг точки P на угол $\delta\varphi_2$. Возможное перемещение точки приложения силы $\overline{F}$ ($\delta\overline{s}_D$) направлено перпендикулярно отрезку DP. Возможное перемещение точки приложения силы $\overline{Q}$ ($\delta\overline{s}_F$) направлено перпендикулярно отрезку BF;

в) определим элементарные работы сил на указанных перемещениях. Пары сил с моментами M и M_B приложены к телу BC, которое поворачивается на угол $\delta\varphi_1$. Работа этих пар определяется следующим образом:

$$\delta A(M) = -M\,\delta\varphi_1, \quad \delta A(M_B) = -M_B\,\delta\varphi_1 .$$

Здесь учтено, что моменты M и M_B направлены противоположно повороту. Работу силы $\overline{Q}$ определим как работу момента этой силы относительно точки B:

$$\delta A(\overline{Q}) = M_B(\overline{Q})\,\delta\varphi_1 = QFB\,\delta\varphi_1 .$$

Известно, что $Q = 3lq, \quad FB = \dfrac{7}{2}l$. Следовательно,

$$\delta A(\overline{Q}) = \frac{21}{2}l^2 q\,\delta\varphi_1 = 10{,}5 l^2 q\,\delta\varphi_1 .$$

Положение мгновенного центра скоростей тела AC на рисунке 1.7 совпадает с положением МЦП, определенным при нахождении реакции R_{Bx} (см. рисунок 1.5). Следовательно, для определения работы силы $\overline{F}$ можно воспользоваться формулой, выведенной при нахождении R_{Bx}:

$$\delta A(\overline{F}) = 3Fl\,\delta\varphi_2(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha - \sin\alpha);$$

г) установим связь между углами поворота $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Воспользуемся методом общей точки. Общей для тел AC и BC является точка C. Тело BC вращается вокруг точки B. Следовательно, $\delta s_C = \delta\varphi_1 BC = \delta\varphi_1 \cdot 5l$. С другой стороны, для скорости точки C можно записать: $\delta s_C = \delta\varphi_2 \cdot 6l\,\mathrm{ctg}\alpha$. Приравняем правые части выражений для скорости v_C:

$$\delta\varphi_1 \cdot 5l = \delta\varphi_2 \cdot 6l\,\mathrm{ctg}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_1 = \frac{6}{5}\delta\varphi_2\,\mathrm{ctg}\,\alpha ;$$

д) запишем формулировку принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\overline{F_i}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(M) + \delta A(M_B) + \delta A(\overline{Q}) + \delta A(\overline{F}) = 0 .$$

Подставим выражения для элементарных работ:

$$-M\,\delta\varphi_1 - M_B\,\delta\varphi_1 + 10{,}5l^2 q\,\delta\varphi_1 + 3lF\,\delta\varphi_2\,(2\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha - \sin\alpha) = 0 .$$

Воспользуемся выведенной формулой для угла $\delta\varphi_1$:

$$(-M - M_B + 10{,}5l^2 q)\frac{6}{5}\delta\varphi_2 \operatorname{ctg}\alpha + 3lF\,\delta\varphi_2\,(2\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha - \sin\alpha) = 0 .$$

Разделим последнее равенство на $\delta\varphi_2$ и выразим момент M_B:

$$M_B = -M + 10{,}5l^2 q + \frac{5}{2}lF\left(2\cos\alpha - \frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha}\right).$$

Подставим известные численные значения:

$$M_B = -11 + 10{,}5\cdot 2 + 10\cdot\left(2\cdot 0{,}5 - \frac{0{,}75}{0.5}\right) = -11 + 21 - 7{,}5 = 2{,}5 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

3 *Проверим правильность решения задачи.*

Изобразим исследуемую систему и укажем все действующие на нее силы (рисунок 1.8). На систему тел действует произвольная плоская система сил. Следовательно, необходимо составить три уравнения равновесия:

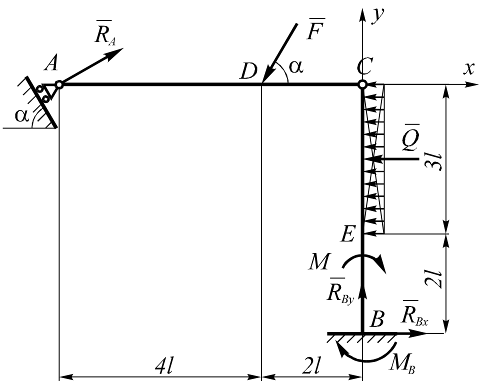


Рисунок 1.8

1) сумма проекций сил на ось x должна быть равна нулю:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A \sin\alpha - F' - Q + R_{Bx} = 0 ; \quad (1.1)$$

2) сумма проекций сил на ось y должна быть равна нулю:

$$\sum F_{iy} = 0, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A \cos\alpha - F'' + R_{By} = 0 . \quad (1.2)$$

Здесь F', F'' – модули горизонтальной и вертикальной компонент силы $\overline{F}$ соответственно;

3) сумма моментов всех сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Уравнение моментов будем составлять относительно точки A

$$\sum M_A(\overline{F_i}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -F''\cdot 3l - Q\frac{3}{2}l + R_{By}\cdot 6l + R_{Bx}\cdot 5l - M - M_B = 0 . \quad (1.3)$$

Подставим в уравнения равновесия (1.1) – (1.3) известные численные значения и найденные ранее величины реакций связей:

$$5{,}2\sin 60^\circ - 6\cos 60^\circ - 2\cdot 3 + 4{,}5 = 4{,}4 - 3 - 6 + 4{,}5 = 0;$$

$$5{,}2\cos 60^\circ - 6\sin 60^\circ + 2{,}6 = 2{,}6 - 5{,}2 + 2{,}6 = 0;$$

$$-6\sin 60^\circ\cdot 3 - 2\cdot 3\cdot 1{,}5 + 2{,}6\cdot 6 + 4{,}5\cdot 5 - 11 - 2{,}5 = -15{,}59 - 9 +$$
$$+15{,}6 + 22{,}5 - 11 - 2{,}5 = 0{,}01\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Так как при округлении до десятых долей правые части равенств обращаются в ноль, то найденные значения реакций связей удовлетворяют условиям равновесия системы тел.

Ответ: R_A = 5,2 кН; R_{Bx} = 4,5 кН; R_{By} = 2,6 кН; M_B = 2,5 кН·м.

Задача 2

Решить предыдущую задачу при способе закрепления конструкции, представленном на рисунке 1.9.

1 *Изобразим конструкцию и укажем действующие на нее силы* (рисунок 1.10). В точке *A* действует реакция невесомого стержня $\overline{R}_A$, направленная перпендикулярно наклонной опорной поверхности. В точке *K* действует реакция невесомого стержня $\overline{R}_K$, направленная вертикально. Реакцию шарнира в точке *B* $\overline{R}_B$ разложим на горизонтальную $\overline{R}_{Bx}$ и вертикальную $\overline{R}_{By}$ составляющие. Таким образом, необходимо определить 4 величины: R_A, R_K, R_{Bx}, R_{By}.

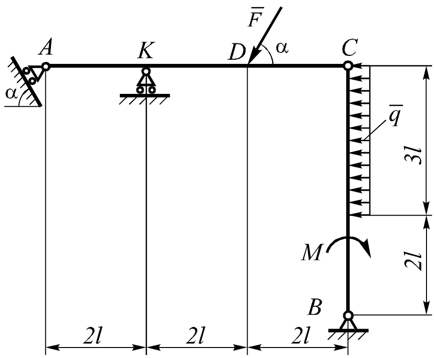


Рисунок 1.9

2 *Приступаем к определению искомых реакций.*

2.1 *Определим реакцию невесомого стержня* $\overline{R}_A$:

а) отбросим связь, соответствующую силе $\overline{R}_A$. Тогда сила $\overline{R}_A$ перейдет в разряд активных, а точка *A* станет свободной. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 1.11);

б) сообщаем системе возможные перемещения. Так как точка *B* шарнирно закреплена, то возможное перемещение звена *BC* – поворот вокруг точки *B* на угол δφ. Тогда перемещение точки приложения силы $\overline{Q}$ ($\delta\overline{s}_H$) направлено перпендикулярно отрезку *BH*, а перемещение точки *C* ($\delta\bar{s}_C$) – перпендикулярно *BC*. Возможное перемещение точки *K* ($\delta\bar{s}_K$) направлено горизонтально. То есть $\delta\bar{s}_K \parallel \delta\bar{s}_C$. Перпендикуляры, проведенные из точек *K* и *C* к векторам их возможных перемещений, не пересекаются. Следовательно, звено *AC* движется поступательно, и $\delta\bar{s}_A = \delta\bar{s}_K = \delta\bar{s}_D = \delta\bar{s}_C$;

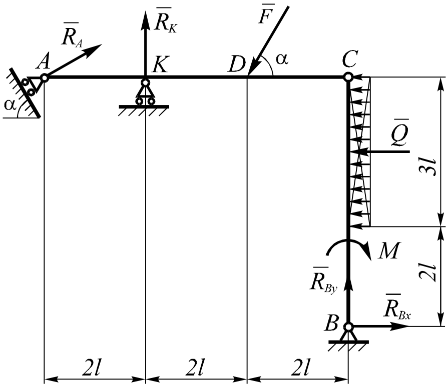


Рисунок 1.10

в) определим элементарные работы сил на указанных возможных перемещениях:

$$\delta A(\bar{R}_A) = \bar{R}_A \cdot \delta\bar{s}_A = -R_A\,\delta s_C \sin\alpha;$$

$$\delta A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \delta\bar{s}_D = F\,\delta s_C \cos\alpha;$$

$$\delta A(M) = -M\,\delta\varphi.$$

В последнем равенстве учтено, что момент *M* направлен противоположно возможному повороту звена *BC*. Работу силы $\bar{Q}$ определим как работу момента этой силы относительно точки *B*:

$$\delta A(\bar{Q}) = M_B(\bar{Q})\delta\varphi = Q \cdot BH\,\delta\varphi = Q\frac{7}{2}l\,\delta\varphi;$$

г) установим связь между возможным перемещением δs_C и возможным углом поворота $\delta\varphi$. Так как точка *C* принадлежит звену *BC*, которое поворачивается вокруг точки *B* на угол $\delta\varphi$, то $\delta s_C = \delta\varphi BC = 5l\,\delta\varphi$;

д) запишем формулировку принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\bar{F}_i) = 0, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \delta A(\bar{R}_A) + \delta A(\bar{F}) + \delta A(M) + \delta A(\bar{Q}) = 0.$$

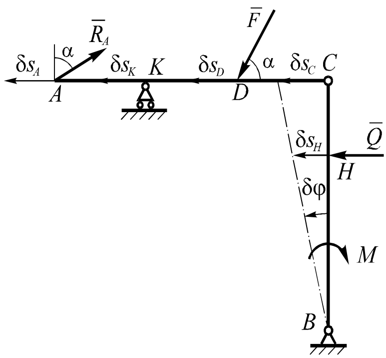


Рисунок 1.11

Подставим выражения для элементарных работ:

$$-R_A\,\delta s_C \sin\alpha + F\,\delta s_C \cos\alpha -$$

$$-M\,\delta\varphi + Q\frac{7}{2}l\,\delta\varphi = 0.$$

Воспользуемся ранее выведенной формулой для δs_C:

$$-R_A \cdot 5l\,\delta\varphi\,\sin\alpha + F\cdot 5l\,\delta\varphi\cos\alpha - M\,\delta\varphi + Q\frac{7}{2}l\,\delta\varphi = 0\ .$$

Разделим последнее равенство на $5l\delta\varphi$ и выразим искомую силу R_A:

$$R_A = F\text{ctg}\alpha - \frac{M}{5l\sin\alpha} + \frac{7}{10\sin\alpha}Q\ .$$

Подставим известные численные значения:

$$R_A = 6\text{ctg}\,60° - \frac{11}{5\text{ctg}\,60°} + \frac{7}{10\sin 60°}\cdot 3\cdot 2 = 3{,}46 - 2{,}54 + 4{,}86 = 5{,}77\ \text{кН}.$$

2.2 *Определим реакцию невесомого стержня R_K:*

а) отбросим связь, соответствующую силе $\overline{R}_K$. Тогда сила $\overline{R}_K$ перейдет в разряд активных, а точка K станет свободной. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 1.12);

б) сообщаем системе возможные перемещения. Так как точка B шарнирно закреплена, то возможное перемещение звена BC – поворот вокруг точки B на угол $\delta\varphi_2$. Тогда $\delta\overline{s}_H \perp BH$, а $\delta\overline{s}_C \perp BC$. Возможное перемещение точки A ($\delta\overline{s}_A$) направлено перпендикулярно невесомому стержню (параллельно наклонной опорной поверхности). Для того чтобы указать возможное перемещение звена AC найдем его мгновенный центр перемещений. Мгновенный центр перемещений звена AC лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек A и C к векторам возможных перемещений этих точек. МЦП звена AC – точка P (см. рисунок 1.12). Следовательно, возможное перемещение звена AC – поворот вокруг точки P на угол $\delta\varphi_1$. Тогда $\delta\overline{s}_D \perp DP,\ \delta\overline{s}_K \perp KP$;

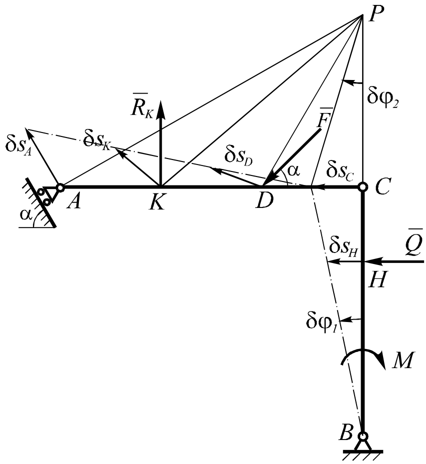


Рисунок 1.12

в) определим элементарные работы сил на возможных перемещениях. Работы сил $\overline{R}_K$, $\overline{F}$ определим как работы моментов этих сил относительно центра вращения звена AC (точки P), поворачивающегося на угол $\delta\varphi_1$:

$$\delta A(\overline{R}_K) = M_P(\overline{R}_K)\,\delta\varphi_1 = R_K KC\,\delta\varphi_1 = R_K\cdot 4l\,\delta\varphi_1;$$

$$\delta A(\overline{F}) = M_P(\overline{F})\,\delta\varphi_1 = M_P(\overline{F}')\,\delta\varphi_1 - M_P(\overline{F}'')\,\delta\varphi_1.$$

В последнем равенстве учтено, что момент вертикальной составляющей $\overline{F}''$ силы $\overline{F}$ относительно точки P противоположен направлению поворота:

$$\delta A(\overline{F}) = F' PC\,\delta\varphi_1 - F'' CD\,\delta\varphi_1 .$$

Модули составляющих силы $\overline{F}''$ определяются следующим образом:

$$F' = F\cos\alpha; \quad F'' = F\sin\alpha .$$

Длину отрезка PC определим из прямоугольного треугольника APC:

$$PC = AC\,\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = 6l\,\mathrm{ctg}\,\alpha .$$

Подставим полученные выражения в формулу для элементарной работы силы $\overline{F}''$:

$$\delta A(\overline{F}) = F \cdot 3l\,\delta\varphi_1(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \sin\alpha) .$$

Работы пары сил с моментом M и силы $\overline{Q}$ определим с использованием тех же соотношений, что и при нахождении силы $\overline{R}_A$:

$$\delta A(M) = -M\,\delta\varphi_1; \quad \delta A(\overline{Q}) = Q\frac{7}{2}l\,\delta\varphi_2 ;$$

г) установим связь между возможными углами поворота $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Точка C – общая для звеньев AC и BC. Так как точка C принадлежит звену AC, которое поворачивается вокруг P на угол $\delta\varphi_1$, то $\delta s_C = \delta\varphi_1 PC = 6l\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\delta\varphi_1$. Так как точка C принадлежит звену BC, которое поворачивается вокруг B на угол $\delta\varphi_2$, то $\delta s_C = \delta\varphi_2 BC = 5l\delta\varphi_2$. Следовательно,

$$6l\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\delta\varphi_1 = 5l\,\delta\varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_2 = \frac{6}{5}\mathrm{ctg}\,\alpha\,\delta\varphi_1;$$

д) запишем формулировку принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(\overline{R}_K) + \delta A(\overline{F}) + \delta A(M) + \delta A(\overline{Q}) = 0 .$$

Подставим выражения для элементарных работ:

$$R_K \cdot 4l\,\delta\varphi_1 + F \cdot 3l\,\delta\varphi_1(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha - \sin\alpha) - M\,\delta\varphi_2 + Q\frac{7}{2}l\,\delta\varphi_2 = 0 .$$

Воспользуемся ранее выведенной формулой для угла $\delta\varphi_2$:

$$R_K \cdot 4l\,\delta\varphi_1 + F \cdot 3l\,\delta\varphi_1(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \sin\alpha) -$$
$$- M\frac{6}{5}\mathrm{ctg}\,\alpha\,\delta\varphi_1 + Q\frac{7}{2}l\frac{6}{5}\mathrm{ctg}\,\alpha\,\delta\varphi_1 = 0.$$

Разделим последнее равенство на $l\delta\varphi_1$ и выразим силу R_K:

$$R_K = -\frac{3}{4}F(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \sin\alpha) + \frac{3}{10l}M\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{21}{20}Q\,\mathrm{ctg}\,\alpha .$$

Подставим известные численные значения:

$$R_K = -\frac{3}{4}\cdot 6(2\cos 60°\text{ctg}\,60° - \sin 60°) + \frac{3}{10}\cdot 11\,\text{ctg}\,60° - \frac{21}{20}\cdot 3\cdot 2\text{ctg}\,60° =$$

$$= 3\cdot 0{,}289 + 1{,}91 - 3{,}64 = -0{,}43 \text{ кН}.$$

2.3 *Определим горизонтальную составляющую реакции цилиндрического шарнира в точке B* $\overline{R}_{Bx}$:

а) отбросим связь, препятствующую горизонтальному смещению точки *B*. Для этого цилиндрический шарнир заменим опорой на горизонтальную поверхность. Сила $\overline{R}_{Bx}$ при этом перейдет в разряд активных. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 1.13);

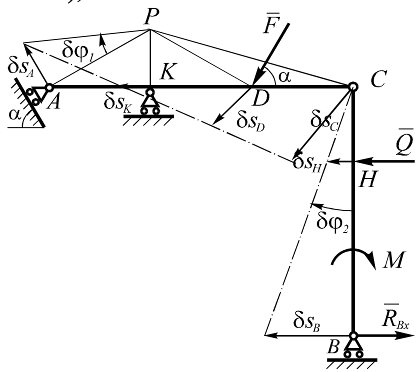


Рисунок 1.13

б) сообщаем системе возможные перемещения. Возможное перемещение точки *A* направлено перпендикулярно невесомому стержню, действующему на конструкцию в точке *A* (параллельно наклонной опорной поверхности). Возможное перемещение точки *K* направлено перпендикулярно невесомому стержню, действующему на конструкцию в точке *K* (горизонтально). Мгновенный центр перемещений звена *AC* находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек *A* и *K* к векторам их возможных перемещений. Следовательно, возможное перемещение звена *AC* — поворот вокруг точки *P* на угол $\delta\varphi_1$. При этом $\delta\overline{s}_D \perp DP, \delta\overline{s}_C \perp CP$. Возможное перемещение точки *B* направлено горизонтально. Перпендикуляры, проведенные из *B* и *C* к векторам возможных перемещений этих точек, пересекаются в точке *C*. Следовательно, точка *C* является мгновенным центром звена *BC*, а возможное перемещение этого звена — поворот вокруг *C* на угол $\delta\varphi_2$. При этом $\delta\overline{s}_H \perp CH$;

в) определим элементарные работы сил на возможных перемещениях:

$$\delta A(\overline{F}) = M_P(\overline{F})\delta\varphi_1 = M_P(\overline{F}')\delta\varphi_1 + M_P(\overline{F}'')\delta\varphi_1 = F'PK\,\delta\varphi_1 + F''DK\,\delta\varphi_1.$$

Длину отрезка *PK* найдем, рассмотрев прямоугольный треугольник *APK*:

$$PK = AK\,\text{tg}(90° - \alpha) = 2l\,\text{ctg}\,\alpha.$$

Тогда работу силы $\overline{F}$ определим следующим образом:

$$\delta A(F) = Fl\,\delta\varphi_1(2\cos\alpha\,\text{ctg}\,\alpha + \sin\alpha).$$

Направление действия момента пары сил M совпадает с направлением поворота звена BC, то для работы этой пары можно записать: $\delta A(M) = M\,\delta\varphi_2$. Работы сил $\overline{Q}$, $\overline{R}_{Bx}$ определим как работы моментов этих сил относительно точки C:

$$\delta A(\overline{Q}) = M_C(\overline{Q})\delta\varphi_2 = QCH\,\delta\varphi_2 = Q\frac{3}{2}l\,\delta\varphi_2,$$

$$\delta A(\overline{R}_{Bx}) = -M(\overline{R}_{Bx})\delta\varphi_2 = -R_{Bx}BC\,\delta\varphi_2 = -R_{Bx}5l\,\delta\varphi_2;$$

г) установим связь между возможными углами поворота $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Точка C – общая для звеньев AC и BC. Так как точка C принадлежит звену AC, которое поворачивается вокруг P на угол $\delta\varphi_1$, то $\delta s_C = \delta\varphi_1 PC$. Из прямоугольного треугольника PKC:

$$PC = \sqrt{CK^2 + PK^2} = \sqrt{16l^2 + 4l^2\mathrm{ctg}\,\alpha^2} = 2l\sqrt{4 + \mathrm{ctg}\,\alpha^2}\,.$$

Следовательно, $\delta s_C = 2l\,\delta\varphi_1\sqrt{4 + \mathrm{ctg}\,\alpha^2}$. Но точка C является мгновенным центром скоростей звена BC. Следовательно, возможная скорость и возможное перемещение этой точки равны нулю. Значит $\delta s_C = 0$ и $\delta\varphi_1 = 0$;

д) запишем формулировку принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(\overline{F}) + \delta A(M) + \delta A(\overline{Q}) + \delta A(\overline{R}_{Bx}) = 0\,.$$

Так как $\delta\varphi_1 = 0$, то $\delta A(\overline{F}) = 0$. Следовательно,

$$\delta A(M) + \delta A(\overline{Q}) + \delta A(\overline{R}_{Bx}) = 0\,.$$

Подставим выражения для элементарных работ:

$$M\,\delta\varphi_2 + Q\frac{3}{2}l\,\delta\varphi_2 - R_{Bx}5l\,\delta\varphi_2 = 0\,.$$

Разделим последнее равенство на $5l\delta\varphi_2$ и выразим силу R_{Bx}:

$$R_{Bx} = \frac{M}{5l} + \frac{3}{10}Q\,.$$

Подставим известные численные значения:

$$R_{Bx} = \frac{11}{5} + \frac{3}{10}\cdot 3\cdot 2 = 2{,}2 + 1{,}8 = 4 \text{ кН}\,.$$

2.4 *Определим вертикальную составляющую реакции цилиндрического шарнира в точке B* $\overline{R}_{By}$:

а) отбросим связь, препятствующую вертикальному смещению точки B. Для этого заменим цилиндрический шарнир опорой на вертикальную поверхность. Тогда сила $\overline{R}_{By}$ перейдет в разряд активных. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 1.14);

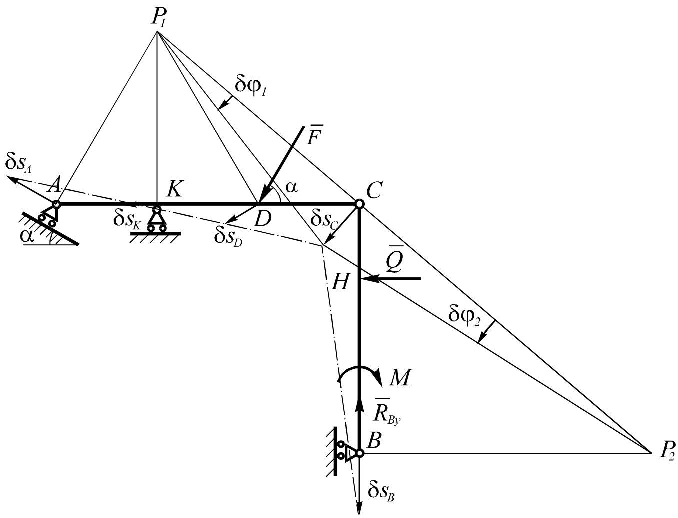


Рисунок 1.14

б) сообщаем системе возможные перемещения. Возможное перемещение точки *A* направлено перпендикулярно невесомому стержню, действующему на конструкцию в точке *A* (параллельно наклонной опорной поверхности). Возможное перемещение точки *K* направлено перпендикулярно невесомому стержню, действующему на конструкцию в точке *K* (горизонтально). Мгновенный центр перемещений звена *AC* находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек *A* и *K* к векторам их возможных перемещений. Следовательно, возможное перемещение звена *AC* — поворот вокруг точки P_1 на угол $\delta\varphi_1$. При этом $\delta\overline{s}_D \perp DP, \delta\overline{s}_C \perp CP$. Возможное перемещение точки *B* направлено вертикально. Мгновенный центр перемещений звена *BC* находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из *B* и *C* к векторам возможных перемещений этих точек (точка P_2 на рисунке 1.14). Следовательно, возможное перемещение звена *BC* — поворот вокруг точки P_2 на угол $\delta\varphi_2$. При этом $\delta\overline{s}_H \perp HP_2$;

в) определим элементарные работы сил на возможных перемещениях. Так как положение мгновенного центра скоростей звена *AC* на рисунке 1.14 (точки P_1) совпадает с положением МЦП этого звена на рисунке 1.13 (точкой *P*), то для определения работы $\delta A(\overline{F})$ можно использовать ранее полученную формулу

$$\delta A(F) = Fl\,\delta\varphi_1(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \sin\alpha)\ .$$

Работы сил, действующих на звено BC, определим по работам моментов этих сил относительно мгновенного центра вращения (МЦВ) этого звена – точки P_2:

$$\delta A(\overline{Q}) = M_{P_2}(\overline{Q})\delta\varphi_2 = QBH\,\delta\varphi_2 = Q\frac{7}{2}l\,\delta\varphi_2;$$

$$\delta A(M) = -M\,\delta\varphi_2, \quad \delta A(\overline{R}_{By}) = -M_{P_2}(\overline{R}_{By})\delta\varphi_2 = -R_{By}BP_2\,\delta\varphi_2.$$

Определим длину отрезка BP_2. Для этого рассмотрим два прямоугольных треугольника: P_1KC и CBP. Эти треугольники подобны ($\angle KP_1C = \angle BCP_2$, $\angle P_1CK = \angle CP_2B$). Следовательно,

$$\frac{BP_2}{CK} = \frac{BC}{KP_1} \quad\Rightarrow\quad BP_2 = CK\frac{BC}{KP_1}.$$

Длины отрезков CK, BC, KP_1 известны:

$$CK = 4l, \quad BC = 5l, \quad KP_1 = 2l\operatorname{ctg}\alpha.$$

Следовательно,

$$BP_2 = 4l\frac{5}{2\operatorname{ctg}\alpha} = 10l\operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда для работы силы $\overline{R}_{By}$ получим:

$$\delta A(\overline{R}_{By}) = -R_{By}10l\operatorname{tg}\alpha\,\delta\varphi_2;$$

г) установим связь между возможными углами поворота $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Так как точка C принадлежит звену AC, которое поворачивается вокруг P_1 на угол $\delta\varphi_1$, то $\delta s_C = \delta\varphi_1 P_1C$. Так как точка C принадлежит звену BC, которое поворачивается вокруг P_2 на угол $\delta\varphi_2$, то $\delta s_C = \delta\varphi_1 P_2C$. Следовательно,

$$\delta\varphi_1 P_1C = \delta\varphi_2 P_2C \quad\Rightarrow\quad \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2\frac{P_2C}{P_1C}.$$

Из условия подобия треугольников P_1KC и CBP следует, что

$$\frac{P_2C}{P_1C} = \frac{BC}{KP_1} = \frac{5l}{2l\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{5}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда $\delta\varphi_1 = \frac{5}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\delta\varphi_2;$

д) запишем формулировку принципа возможных перемещений:

$$\sum\delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad\Rightarrow\quad \delta A(\overline{F}) + \delta A(\overline{Q}) + \delta A(M) + \delta A(\overline{R}_{By}) = 0.$$

Подставим выражения для элементарных работ:

$$Fl\,\delta\varphi_1(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha+\sin\alpha)+Q\frac{7}{2}l\,\delta\varphi_2-M\,\delta\varphi_2-R_{By}\cdot 10l\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\delta\varphi_2=0\,.$$

Воспользуемся ранее выведенной формулой для $\delta\varphi_1$:

$$Fl\frac{5}{2}\mathrm{tg}\alpha\,\delta\varphi_2(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha+\sin\alpha)+Q\frac{7}{2}l\,\delta\varphi_2-M\,\delta\varphi_2-R_{By}\cdot 10l\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\delta\varphi_2=0\,.$$

Разделим последнее равенство на $10l\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\delta\varphi_2$ и выразим искомую силу:

$$R_{By}=\frac{1}{4}F(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha+\sin\alpha)+\frac{7}{20}Q\,\mathrm{ctg}\,\alpha-\frac{M}{10l}\mathrm{ctg}\,\alpha\,.$$

Подставим известные численные значения:

$$R_{By}=\frac{1}{2}\cdot 6(2\cos 60^\circ\,\mathrm{ctg}\,60^\circ+\sin 60^\circ)+\frac{7}{20}\cdot 3\cdot 2\mathrm{ctg}\,60^\circ-\frac{11}{10}\mathrm{ctg}\,60^\circ=$$

$$=2{,}16+1{,}21-0{,}63=2{,}74 \text{ кН}.$$

3 *Проверим правильность решения задачи*.

Изобразим исследуемую систему и укажем все действующие на нее силы (рисунок 1.15). На систему тел действует произвольная плоская система сил. Следовательно, необходимо составить три уравнения равновесия:

1) сумма проекций сил на ось x должна быть равна нулю:

$$\sum F_{ix}=0,\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A\sin\alpha-F'-Q+R_{Bx}=0\,;\quad(1.4)$$

2) сумма проекций сил на ось y должна быть равна нулю:

$$\sum F_{iy}=0,\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A\cos\alpha+R_K-F''+R_{By}=0\,.\quad(1.5)$$

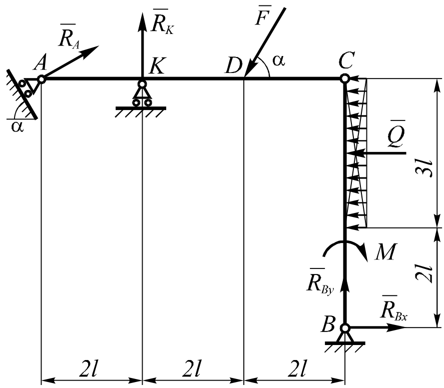


Рисунок 1.15

Здесь F', F'' – модули горизонтальной и вертикальной компонент силы $\overline{F}$ соответственно;

3) сумма моментов всех сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Уравнение моментов будем составлять относительно точки A:

$$\sum M_A(\overline{F_i})=0,\Rightarrow R_K\cdot 2l-F''\cdot 3l-Q\frac{3}{2}l+R_{By}\cdot 6l+R_{Bx}\cdot 5l-M=0.\qquad(1.6)$$

Подставим в уравнения равновесия (1.4) – (1.6) известные численные значения и найденные ранее величины реакций связей:

$$5{,}77\sin 60° - 6\cos 60° - 2\cdot 3 + 4 = (5 - 3 - 6 + 4) = 0;$$

$$5{,}77\cos 60° - 0{,}43 - 6\sin 60° + 2{,}74 = 2{,}89 - 0{,}43 - 5{,}20 + 2{,}74 = 0;$$

$$-0{,}43\cdot 2 - 6\sin 60°\cdot 3 - 2\cdot 3\cdot 1{,}5 + 2{,}74\cdot 6 + 4\cdot 5 - 11 =$$
$$= -0{,}86 - 15{,}59 - 9 + 16{,}44 + 20 - 11 = -0{,}01 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Так как при округлении до десятых долей правые части равенств обращаются в ноль, то найденные значения реакций связей удовлетворяют условиям равновесия системы тел.

Ответ: R_A = 5,77 кН; R_K = –0,43 кН; R_{Bx} = 4 кН; R_{By} = 2,74 кН.

1.3 Условие задания Д-8

Использование принципа возможных перемещений для определения реакций связей составной конструкции.

На основании исходных данных (таблица 1.1) и используя принцип возможных перемещений, определить реакции связей составной конструкции, изображенной на рисунке 1.16.

Таблица 1.1 – **Исходные данные к заданию Д-8**

Вариант	l, м	α, град	F, кН	M, кН·м	q, кН/м	Вариант	l, м	α, град	F, кН	M, кН·м	q, кН/м
1	0,5	60	4	6	2	**16**	2	45	6	15	2
2	1	30	7	10	3	**17**	1	60	15	9	2
3	0,6	30	10	12	4	**18**	0,6	60	20	18	10
4	1	45	15	20	5	**19**	1	60	9	9	5
5	2	30	12	10	2	**20**	2	30	6	12	2
6	2	60	9	20	8	**21**	1,5	30	5	16	3
7	0,5	60	16	8	5	**22**	2	60	20	11	5
8	0,8	30	10	6	3	**23**	1	30	6	8	2
9	1	30	12	6	2	**24**	2	45	5	5	1
10	2	60	8	10	3	**25**	0,5	30	10	6	8
11	1	45	20	11	4	**26**	1	30	6	11	5
12	3	30	9	5	2	**27**	0,7	60	12	7	3
13	1	45	12	9	5	**28**	0,5	30	9	10	8
14	1	—	7	11	3	**29**	2	60	25	9	1
15	0,5	30	9	12	6	**30**	1	30	18	10	5

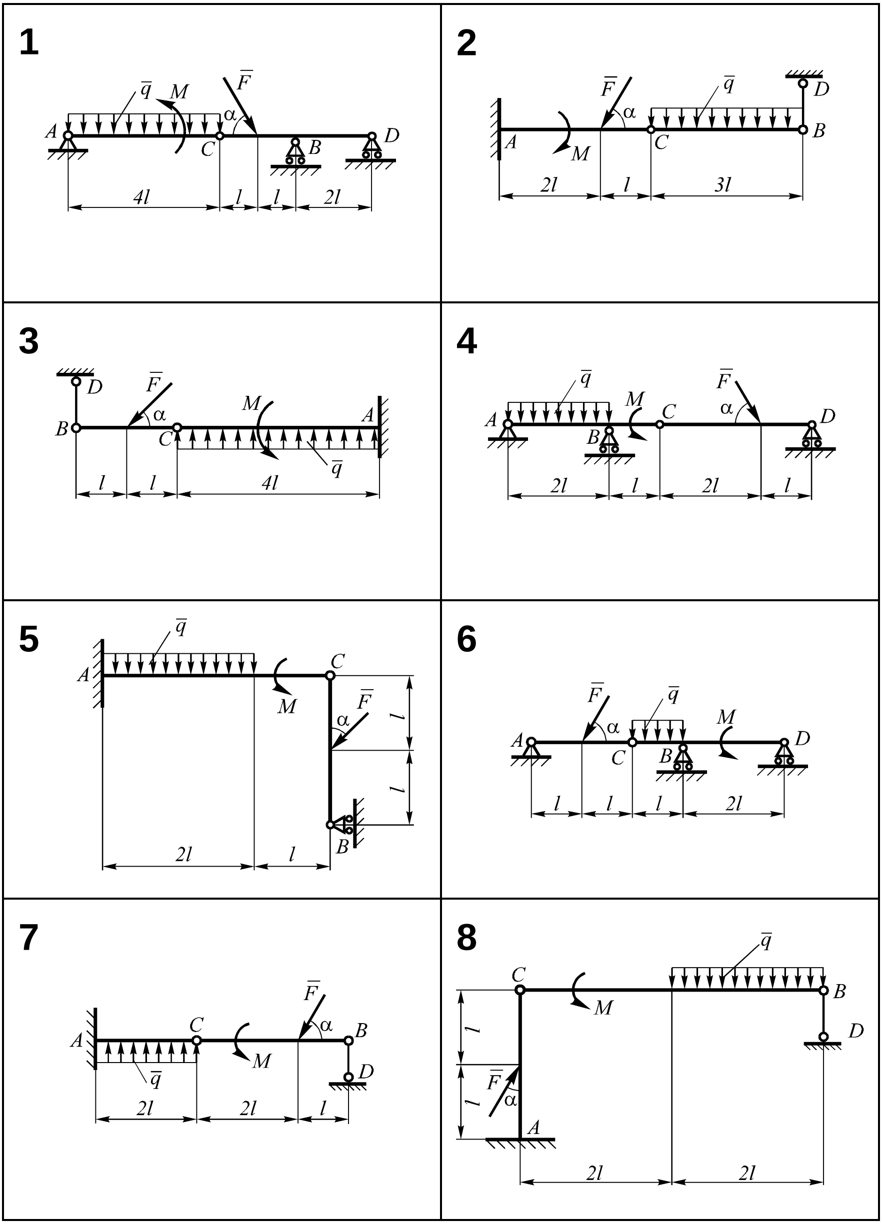


Рисунок 1.16 (начало)

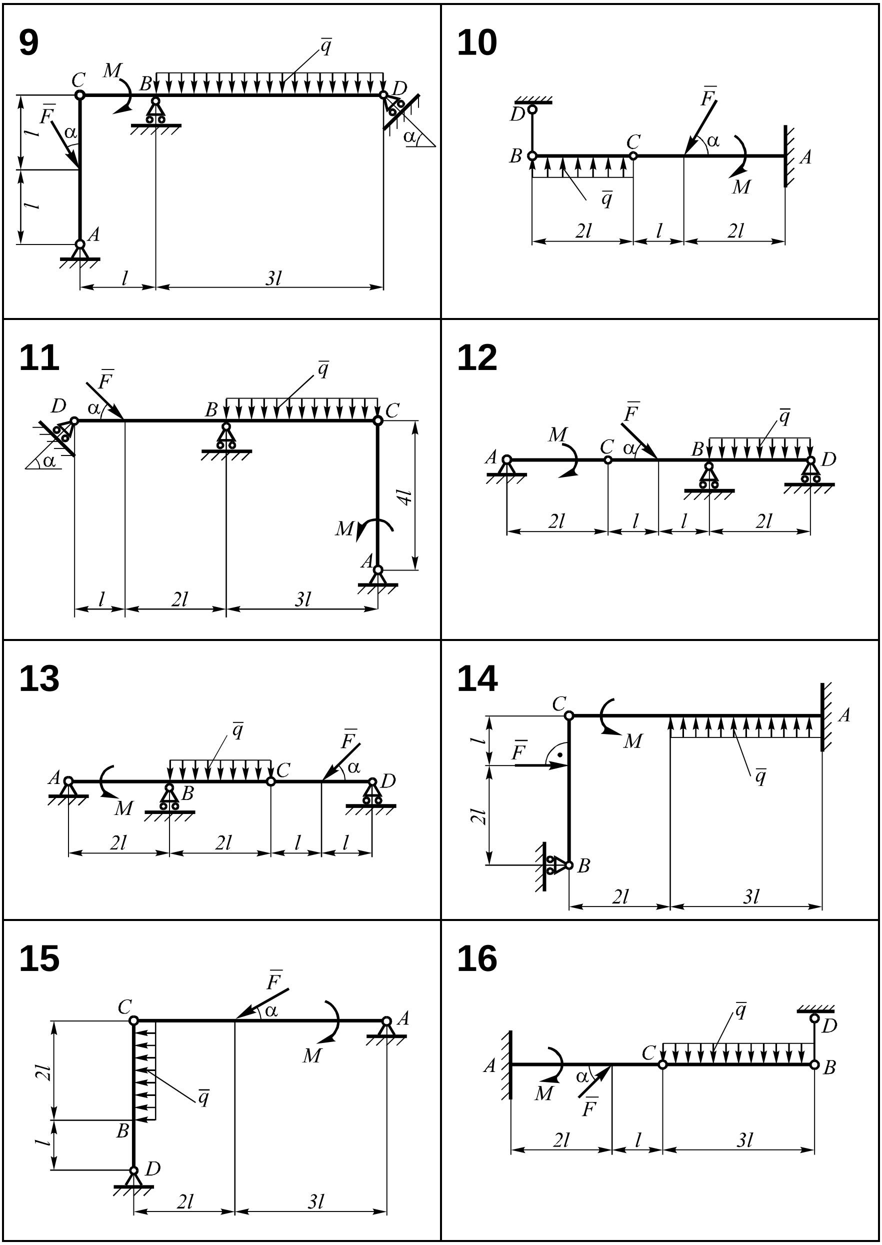
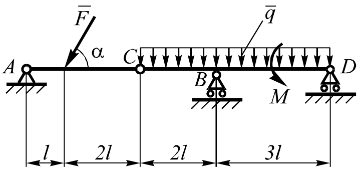
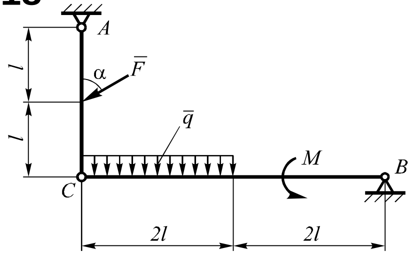


Рисунок 1.16 (продолжение)

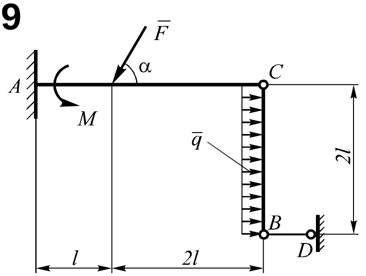
17



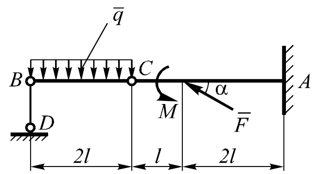
18



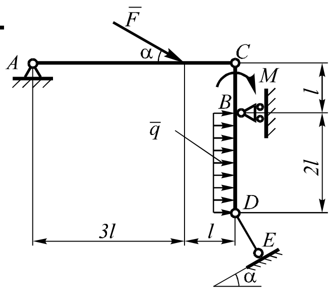
19



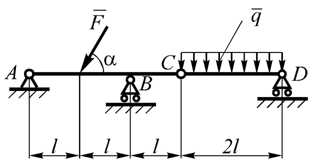
20



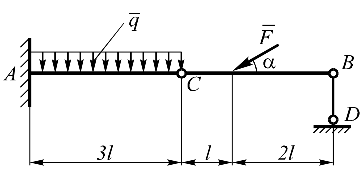
21



22



23



24

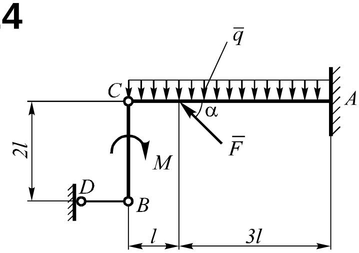


Рисунок 1.16 (продолжение)

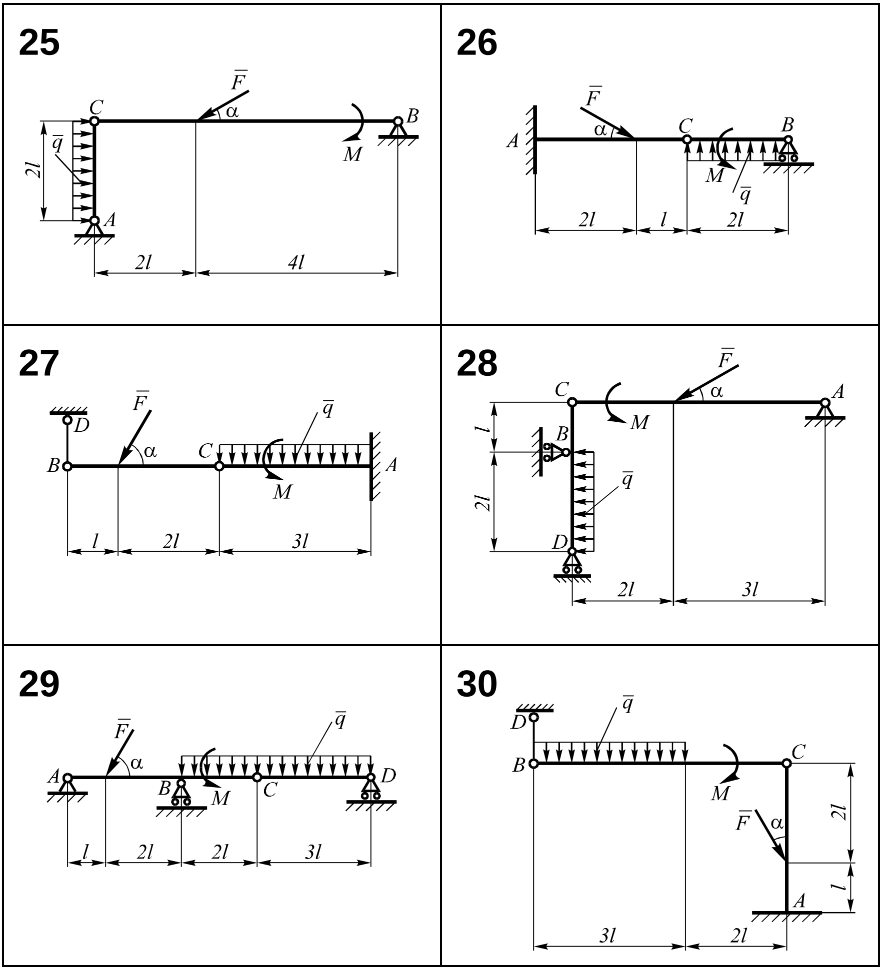


Рисунок 1.16 (окончание)

2 ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

2.1 Некоторые положения теории

2.1.1 Сила инерции

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, направленную противоположно вектору ускорения $\bar{a}$ и равную по модулю произведению массы точки m на ее ускорение:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}.$$

Главный вектор $\bar{\Phi}$ и главный момент M_O^{Φ} сил инерции относительно некоторой точки O определяются путем суммирования соответствующих сил и моментов для каждой точки системы:

$$\bar{\Phi} = \sum \bar{\Phi}_i, \quad M_O^{\Phi} = \sum \bar{M}_O(\bar{\Phi}_i),$$

где $\bar{\Phi}_i = -m_i\bar{a}_i$ – сила инерции i-й материальной точки системы.

Для абсолютно твердого тела вектор $\bar{\Phi}$ и момент M_O^{Φ} зависят от вида движения этого тела:

а) *поступательное движение*.

Необходимо указать только главный вектор сил инерции $\bar{\Phi}$, приложенный к центру масс тела. Вектор $\bar{\Phi}$ направлен в сторону, противоположную вектору ускорения центра масс $\bar{a}_C$:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}_C, \qquad (2.1)$$

где m – масса тела;

б) *вращение тела относительно неподвижной оси, проходящей через центр масс тела*.

Главный вектор сил инерции равен нулю. Необходимо приложить момент сил инерции, направленный противоположно угловому ускорению ε:

$$M^{\Phi} = I_C\varepsilon, \qquad (2.2)$$

где I_C – центральный момент инерции тела;

в) *плоскопараллельное движение твердого тела*.

В этом случае необходимо приложить силу инерции $\bar{\Phi}$ к центру масс тела и указать момент сил инерции M^{Φ} (рисунок 2.1). При этом вектор $\bar{\Phi}$ определяется по формуле (2.1), а момент M^{Φ} — по формуле (2.2).

Те же главный вектор $\bar{\Phi}$ и главный момент M^{Φ} следует учитывать для вращательно движущегося тела, если ось вращения не проходит через центр масс.

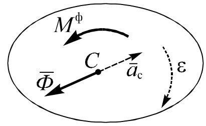


Рисунок 2.1

2.1.2 Принцип Даламбера и общее уравнение динамики

Принцип Даламбера является одним из основных принципов аналитической механики. Для материальной точки данных принцип формулируется так: *геометрическая сумма сил, действующих на точку, и силы инерции равна нулю*. То есть, введение силы инерции позволяет для материальной точки записать уравнения, аналогичные уравнениям равновесия. Для материальной системы принцип Даламбера формулируется так: *геометрическая сумма сил, действующих на систему, и сил инерции для всех точек системы равна нулю*. То есть, для материальной системы выполняются следующие условия:

$$\sum \overline{F}_i + \sum \overline{R}_i + \sum \overline{\Phi}_i = 0\,, \quad \sum \overline{M}_O(\overline{F}_i) + \sum \overline{M}_O(\overline{R}_i) + \sum \overline{M}_O(\overline{\Phi}_i) = 0\,,$$

где $\overline{F}_i$ – i-я внешняя активная сила, действующая на систему;

$\overline{R}_i$ – i-я внешняя реакция связи;

$\overline{\Phi}_i$ – сила инерции для i-й точки системы;

$M_O(\overline{F}_i)$ – момент силы $\overline{F}_i$ относительно произвольной точки O.

Таким образом, принцип Даламбера позволяет свести задачу динамики к задаче статики. Если действующие на материальную систему силы и силы инерции образуют плоскую систему сил, то в соответствии с принципом Даламбера составляется 3 уравнения равновесия. Если силы образуют пространственную систему сил, то составляется 6 уравнений.

Для системы, находящейся в равновесии, выполняется принцип возможных перемещений (1.1). Аналогичное условие будет выполняться и для движущейся системы, если к ней приложить силы инерции, то есть для материальной системы выполняется соотношение

$$\sum \delta A(\overline{F}_i) + \sum \delta A(\overline{\Phi}_i) = 0\,, \tag{2.3}$$

где $\delta A(\overline{F})$ – элементарная работа силы $\overline{F}$ на возможном перемещении системы;

$\delta A(\overline{\Phi}_i)$ – работа силы инерции для i-й материальной точки на возможном перемещении данной точки.

Уравнение (2.3) называют *общим уравнением динамики*. Это уравнение отражает принцип Даламбера–Лагранжа: *при движении материальной системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.*

2.1.3 Порядок решения задач с использованием общего уравнения динамики системы

Решение задач с применением общего уравнения динамики системы рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1) выбрать по варианту механическую систему, изобразить все тела с учетом масштаба. Определить число степеней свободы системы и выбрать обобщенную координату, назначая положительное направление отсчета;

2) приложить к системе активные силы и силы трения. К каждому телу системы добавляем силы инерции или моменты сил инерции в зависимости от вида движения тела;

3) сообщить механической системе возможные перемещения (δs_i или $\delta\varphi_i$);

4) подсчитать сумму работ активных сил и сил инерции, действующих на тела системы на этих перемещениях, и в соответствии с общим уравнением динамики (2.3) приравнять ее к нулю;

5) установить зависимость между возможными перемещениями, линейными и угловыми ускорениями;

6) из полученного уравнения определить искомую величину.

2.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Груз 1 (рисунок 2.2) скользит по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$, и посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, состоящий из дисков 2 и 3, приводит в движение каток 4, заставляя его катиться без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Массы тел 1-4 соответственно $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $m_3 = 2m$, $m_4 = m$. Радиусы колес r_2 = 10 см, r_3 = 30 см, r_4 = 25 см. На тело 2 действует активная пара сил с моментом $M = m_4 g r_4$. Коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f = 0{,}2$. Каток 4 представляет собой однородный сплошной диск. Проскальзывание нити по блоку отсутствует. Определить ускорение тела 1, а также натяжение нити, прикрепленной к телу 1.

Р е ш е н и е

Применим к решению задачи общее уравнение динамики.

1 *Изображаем механизм с учетом заданных размеров*. Система имеет одну степень свободы, следовательно, одну обобщенную координату.

2 *Изображаем на рисунке 2.2 активные силы* $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ и $\overline{G}_4$. На систему наложены внешние связи: цилиндрический шарнир, трением в котором пренебрегаем; горизонтальная плоскость, по которой без проскальзывания катится каток 4, и шероховатая наклонная плоскость, по которой скользит груз 1.

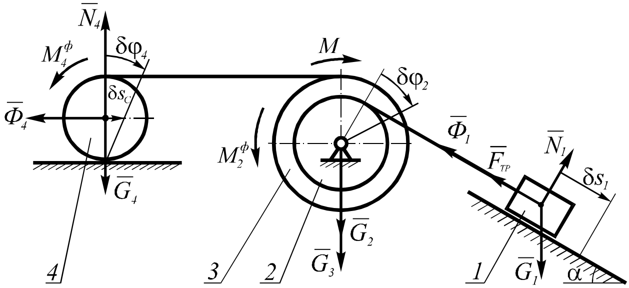


Рисунок 2.2

Реакция шарнира приложена к неподвижной точке, реакция горизонтальной плоскости – к мгновенному центру скоростей. Работа этих сил на возможных перемещениях точек их приложения равна нулю. Эти связи являются идеальными. Сила трения, действующая на груз со стороны наклонной плоскости, будет совершать работу при скольжении груза. Эта связь неидеальна, поэтому к активным силам добавим силу трения. Ввиду того, что среди сил, действующих на тела системы, есть сила трения скольжения, то во всех вариантах целесообразно по исходным данным найти исходное направление движения системы, чтобы правильно показать направление сил трения. Если направление движения системы выбрано ошибочно, то искомое ускорение получится со знаком «минус». В этом случае необходимо изменить направление сил трения и сил инерции и внести поправки в решение. В данном примере груз 1 опускается, поэтому силу трения скольжения $F_{\text{тр}}$ направляем в противоположную к этому движению сторону.

Модуль силы $\overline{F}_{\text{тр}}$ определяем по закону Кулона $F_{\text{тр}} = f N_1$, где $N_1 = G_1 \cos\alpha$ – нормальная реакция наклонной плоскости, f – коэффициент трения скольжения. Поэтому $F_{\text{тр}} = f G_1 \cos\alpha$.

Прикладываем к системе силы инерции. Так как груз 1 движется поступательно, то к его центру масс приложим силу инерции $\overline{\Phi}_1 = -m_1\overline{a}_1$ противоположно ускорению груза. Здесь a_1 – ускорение центра масс груза 1. Блок, состоящий из двух жестко соединенных дисков 2 и 3, совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через его центр масс. Поэтому к нему прикладываем момент сил инерции

$$M_2^{\Phi} = I_z \varepsilon_2 ,$$

где I_z – момент инерции блока относительно оси вращения z;

ε_2 – угловое ускорение блока.

Так как блок 2, 3 состоит из двух дисков, наложенных на одну ось, то его момент инерции I_z определяется суммированием

$$I_z = \frac{m_2 r_2^2}{2} + \frac{m_3 r_3^2}{2},$$

где r_2, r_3 – радиусы большего и меньшего диаметров блока соответственно.

Момент сил инерции M_2^{Φ} прикладываем противоположно угловому ускорению блока ε_2.

Каток 4 совершает плоское движение, перемещаясь по горизонтали с ускорением центра масс a_C и поворачиваясь относительно точки соприкосновения с горизонтальной плоскостью (мгновенный центр скоростей (МЦС)) с угловым ускорением ε_4. Прикладываем в центре масс силу инерции $\Phi_4 = m_4 a_C$, где a_C – ускорение центра масс катка 4, а также момент сил инерции $M_4^{\Phi} = I_4 \varepsilon_4$. Так как каток считается однородным сплошным цилиндром радиуса r_4, то момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс катка, $I_4 = \frac{m_4 r_4^2}{2}$.

3 *Сообщаем системе возможные перемещения*. Пусть груз 1 переместится на расстояние δs_1 вдоль наклонной плоскости, тогда блок, состоящий из жестко скрепленных дисков 2 и 3, повернется на угол $\delta\varphi_2$, а каток 4 повернется относительно мгновенного центра скоростей на угол $\delta\varphi_4$, а его центр масс переместится вдоль горизонтальной плоскости на расстояние δs_C.

4 *Составляем общее уравнение динамики*. Запишем выражение для суммы работ всех активных сил и сил инерции на возможном перемещении каждого тела системы и приравняем его к нулю:

$$G_1 \sin\alpha\ \delta s_1 - F_{\text{тр}} \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 + M\ \delta\varphi_2 - M_2^{\Phi}\ \delta\varphi_2 - \Phi_4 \delta s_C - M_4^{\Phi}\ \delta\varphi_4 = 0. \quad (2.4)$$

Зависимости между возможными перемещениями у системы такие же, как и между соответствующими скоростями.

5 *Устанавливаем связь между возможными перемещениями*. Выразим скорости центров масс и угловые скорости тел через скорость тела 1. Для этого воспользуемся методом общей точки. Рассмотри точку *A*, общую для тел 1 и 2 (см. рисунок 2.2). В силу нерастяжимости нитей $v_A = v_1$. С другой стороны, точка *A* принадлежит вращательно движущемуся телу 2. Следовательно, $v_A = \omega_2 r_2$, $\omega_2 = \frac{v_A}{r_2}$. Тогда

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \omega_3.$$

Чтобы выразить ω_4 и v_C через v_1, рассмотрим точки B_3 и B_4. Точка B_3 принадлежит вращательно движущемуся телу 3. Значит $v_{B_3} = \omega_3 r_3 = v_1 \frac{r_3}{r_2}$. Точка B_4 принадлежит плоско движущемуся телу 4. Мгновенный центр скоростей катящегося колеса находится в точке касания с неподвижной поверхностью P. Тогда $v_{B_4} = \omega_4 B_4 P = \omega_4 \cdot 2r_4$, $\omega_4 = \frac{v_{B_4}}{2r_4}$. Следовательно,

$$\omega_4 = v_1 \frac{r_3}{2r_2 r_4}.$$

Скорость точки C определяется следующим образом: $v_C = \omega_4 CP = \omega_4 r_4$. Значит,

$$v_C = v_1 \frac{r_3}{2r_2}.$$

Такие же соотношения будут и между линейными и угловыми возможными перемещениями системы. Выразим возможные перемещения $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_4$ и δs_4 через δs_1:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_1}{r_2}; \qquad \delta\varphi_4 = \frac{\delta s_1 r_3}{2r_2 r_4}; \qquad \delta s_C = \frac{\delta s_1 r_3}{2r_2}. \tag{2.5}$$

Подставим данные выражения в уравнение (2.4):

$$G_1 \sin\alpha\ \delta s_1 - F_{\text{тр}} \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 + M \frac{\delta s_1}{r_2} - M_2^{\Phi} \frac{\delta s_1}{r_2} - \Phi_4 \frac{\delta s_1 r_3}{2r_2} - M_4^{\Phi} \frac{\delta s_1 r_3}{2r_2 r_4} = 0$$

и выражения для величин G_1, $F_{\text{тр}}$, Φ_1, M_1, Φ_4, M_4, используя формулы (2.1) и (2.2). Тогда

$$m_1 g \sin\alpha - m_1 g f \cos\alpha - m_1 a_1 + \frac{M}{r_2} - \frac{I_z \varepsilon_2}{r_2} - m_4 a_C \frac{r_3}{2r_2} - \frac{I_4 \varepsilon_4 r_3}{2r_2 r_4} = 0. \tag{2.6}$$

Выразим ускорения a_C, ε_2 и ε_4 через ускорение центра масс тела 1 a_1. Для этого используем равенства (2.5):

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}; \qquad \varepsilon_4 = \frac{a_1 r_3}{2r_2 r_4}; \qquad a_C = \frac{a_1 r_3}{2r_2}.$$

Подставим полученные соотношения в уравнение (2.6):

$$m_1 g \sin\alpha - m_1 g f \cos\alpha - m_1 a_1 + \frac{M}{r_2} - \left(\frac{m_2 r_2^2}{2} + \frac{m_3 r_3^3}{2}\right)\frac{a_1}{r_2^2} -$$

$$-m_4\frac{a_1 r_3^2}{4r_2^2}-\frac{m_4 r_4^2}{2}\cdot\frac{a_1 r_3^2}{4r_2^2 r_4^2}=0\,.$$

6 *Решаем полученное уравнение.* Из последнего уравнения выразим искомое ускорение a_1. Для этого перенесем все слагаемые, содержащие a_1, в правую часть равенства:

$$m_1 g\sin\alpha-m_1 gf\cos\alpha+\frac{M}{r_2}=a_1\left[m_1+\frac{m_2}{2}+\frac{m_3 r_3^3}{2r_2^2}+\frac{m_4 r_3^2}{4r_2^2}+\frac{m_4 r_3^2}{8r_2^2}\right].$$

Ускорение центра масс тела 1 получим, подставив выражение для момента M:

$$a_1=\frac{m_1 g(\sin\alpha-f\cos\alpha)+\dfrac{m_4 g r_4}{r_2}}{m_1+\dfrac{m_2}{2}+\dfrac{m_3 r_3^3}{2r_2^2}+\dfrac{m_4 r_3^2}{4r_2^2}+\dfrac{m_4 r_3^2}{8r_2^2}}\,.$$

Подставим численные значения величин, входящих в последнее уравнение:

$$a_1=\frac{3\cdot 9{,}8\cdot\left(0{,}5-0{,}2\cdot 0{,}86\right)+\dfrac{9{,}8\cdot 0{,}25}{0{,}1}}{3+0{,}5+\dfrac{0{,}3^2}{0{,}1^2}+\dfrac{0{,}3^2}{4\cdot 0{,}1^2}+\dfrac{0{,}3^2}{8\cdot 0{,}1^2}}=\frac{34{,}14}{15{,}88}=2{,}15\ \text{м/с}^2\,.$$

Для определения натяжения нити, прикрепленной к телу 1, используем принцип Даламбера–Лагранжа. Заменим действие нити на груз реакцией T_1. Расставим все силы, действующие на тело 1 (рисунок 2.3). Это сила тяжести $\bar{G}_1$, нормальная реакция поверхности $\bar{N}$, сила трения $\bar{F}_{\text{тр}}$, сила натяжения нити $\bar{T}_1$ и сила инерции $\bar{\Phi}_1$.

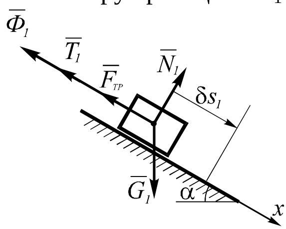


Рисунок 2.3

Используем принцип Даламбера–Лагранжа:

$$\delta A(\bar{G}_1)+\delta A(\bar{F}_{\text{тр}})+\delta A(\bar{T}_1)+\delta A(\bar{\Phi}_1)=0\,. \qquad (2.7)$$

Возможное перемещение точки приложения сил $\bar{G}_1$, $\bar{F}_{\text{тр}}$, $\bar{T}_1$, $\bar{\Phi}_1$ составляет δs_1 и направлено параллельно наклонной плоскости. Тогда выражение (2.7) примет вид

$$(G_1\sin\alpha-F_{\text{тр}}-\Phi_1-T_1)\,\delta s_1=0\,.$$

Сокращая на возможное перемещение и используя ранее полученные соотношения для силы трения и силы инерции, окончательно получим:

$$T_1 = G_1 \sin\alpha - fG_1 \cos\alpha - \Phi_1 = 3mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - 3ma_1 =$$
$$= 3m\big(9{,}8 \cdot (0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}86) - 2{,}15\big) = 3{,}19m.$$

2.3 Условие задания Д-9

Применение общего уравнения динамики для описания движения материальной системы

Для механизмов заданы массы всех тел, радиусы колес, коэффициент трения скольжения тела по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, а также момент *M*, приводящий в движение заданную систему. На основании приведенных в таблице 2.1 исходных данных необходимо:

1) изобразить механизм в масштабе в соответствии с правилами инженерной графики;

2) к системе тел приложить все активные силы;

3) приложить силы инерции и моменты сил инерции;

4) задать системе тел возможное перемещение и составить общее уравнение динамики;

5) выразить все возможные перемещения в системе через одно из них по аналогичным зависимостям;

6) записать соотношения между угловыми и линейными ускорениями;

7) найти натяжение нити, прикрепленной к телу 1.

Механизмы изображены на рисунке 2.4.

Таблица 2.1 – **Исходные данные к заданию Д-9**

Вариант	Массы тел, кг					Радиусы колес, см				f	M, Н·м	α, град
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	r_2	r_3	r_4	r_5			
1	$3m$	$2m$	$4m$	$2m$	—	10	15	20	—	0,2	mgr_2	30
2	$2m$	$5m$	$3m$	$2m$	—	40	20	30	—	0,3	mgr_4	60
3	m	$3m$	$2m$	m	—	20	10	15	—	0,1	$2mgr_4$	60
4	$4m$	$2m$	m	$3m$	—	10	25	20	—	0,2	mgr_4	60
5	$3m$	$2m$	$3m$	m	m	20	—	10	10	—	mgr_2	30
6	$2m$	$2m$	m	$3m$	—	30	15	40	—	0,3	mgr_4	45
7	M	$2m$	m	$3m$	m	40	20	—	10	0,2	$2mgr_5$	60
8	$3m$	$2m$	m	$3m$	—	50	30	20	—	0,1	mgr_2	30
9	M	m	$2m$	$3m$	—	20	15	30	—	0,2	$2mgr_2$	30
10	$2m$	m	m	$2m$	—	10	10	30	—	0,1	$3mgr_2$	60
11	$3m$	m	$3m$	$2m$	—	10	30	20	—	0,3	$2mgr_3$	60

Окончание таблицы 2.1

Вариант	Массы тел, кг					Радиусы колес, см				f	M, Н·м	α, град
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	r_2	r_3	r_4	r_5			
12	$3m$	$2m$	$3m$	m	—	15	25	10	—	0,2	mgr_3	45
13	$2m$	m	$2m$	$3m$	—	10	30	30	—	—	$2mgr_3$	60
14	$3m$	m	$3m$	$2m$	$3m$	10	40	25	40	0,3	$3mgr_3$	30
15	$2m$	$2m$	m	$3m$	m	30	20	—	10	—	$4mgr_2$	45
16	$3m$	$2m$	$4m$	$2m$	—	20	40	15	—	0,1	mgr_3	30
17	M	$3m$	$2m$	$2m$	—	30	25	20	—	0,2	$4mgr_4$	60
18	$4m$	$3m$	$2m$	m	—	20	15	15	—	0,1	$3mgr_2$	30
19	$3m$	$2m$	m	$2m$	—	40	30	20	—	—	mgr_2	30
20	$2m$	$2m$	m	$2m$	—	30	20	30	—	0,3	$2mgr_4$	45
21	M	m	$3m$	$2m$	$2m$	10	25	20	15	0,1	$3mgr_3$	30
22	$3m$	$2m$	m	m	—	40	25	20	—	—	$3mgr_2$	—
23	$4m$	$3m$	$2m$	$4m$	m	40	25	—	10	—	$4mgr_2$	45
24	M	$2m$	$3m$	$3m$	—	15	20	40	—	0,2	$2mgr_4$	60
25	$2m$	m	$3m$	$2m$	—	15	40	20	—	0,1	$2mgr_3$	30
26	$3m$	m	$3m$	$3m$	$2m$	20	30	30	15	0,2	mgr_4	45
27	$2m$	$3m$	$2m$	m	$2m$	40	30	20	20	—	$3mgr_2$	30
28	$4m$	m	$2m$	$2m$	m	10	30	15	—	0,1	$4mgr_3$	60
29	$2m$	$2m$	$3m$	$2m$	—	10	20	40	—	—	mgr_4	30
30	$3m$	$2m$	m	$2m$	$3m$	30	20	30	40	—	$3mgr_3$	30

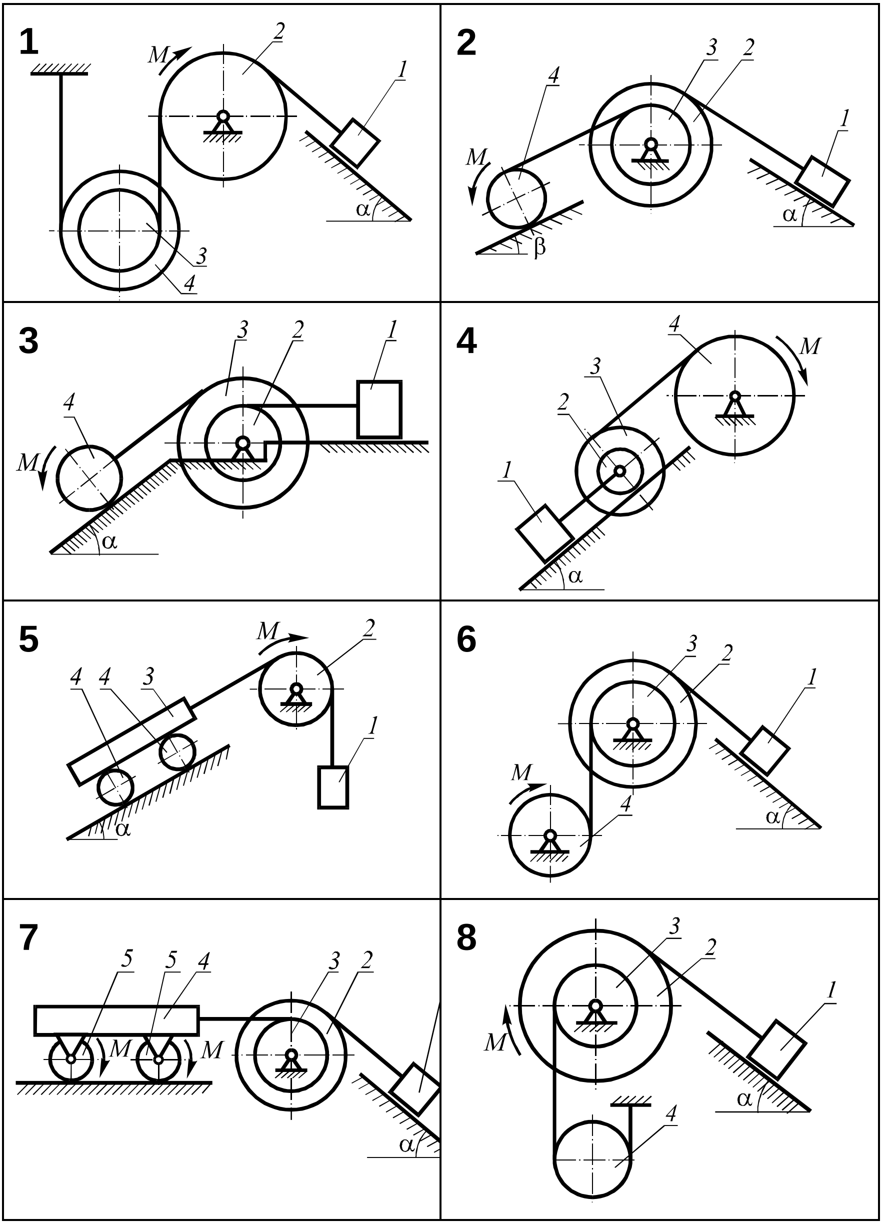


Рисунок 2.4 (начало)

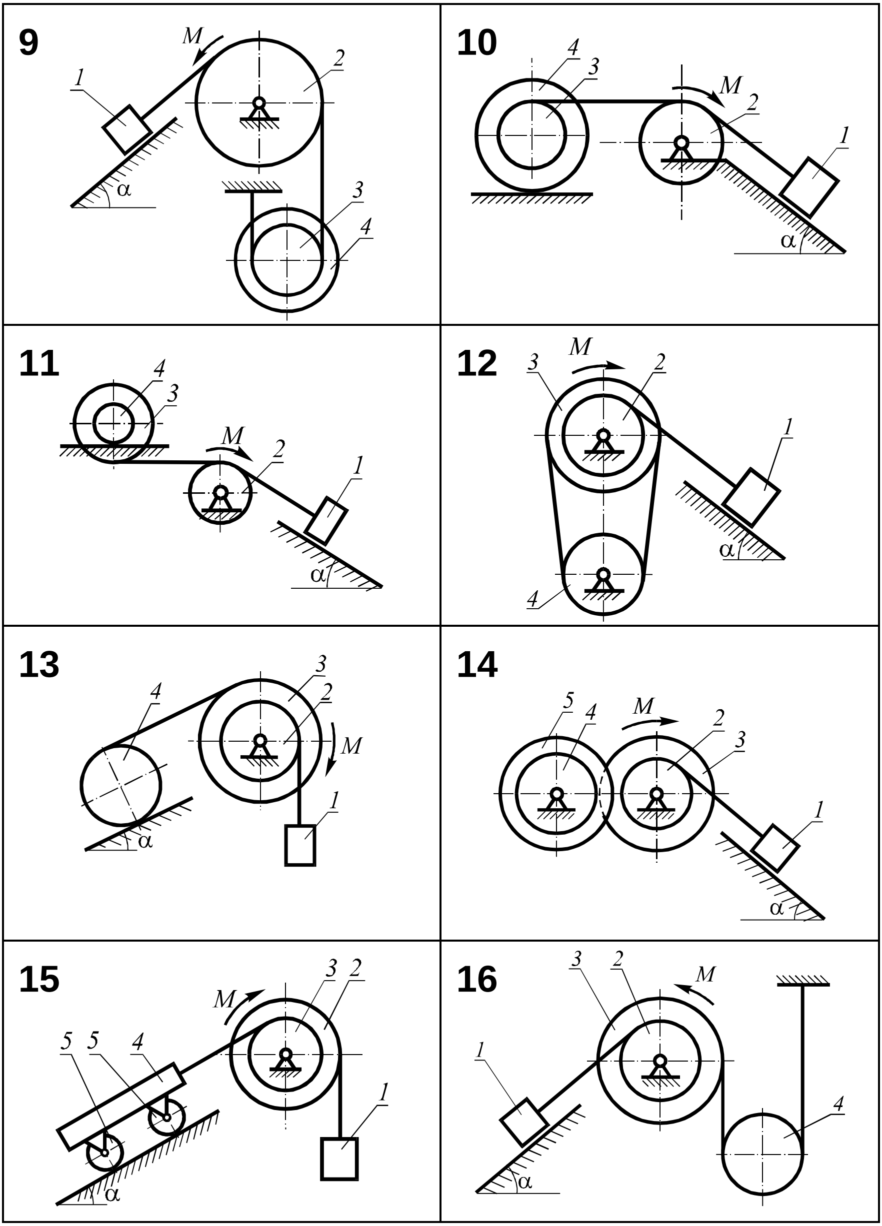


Рисунок 2.4 (продолжение)

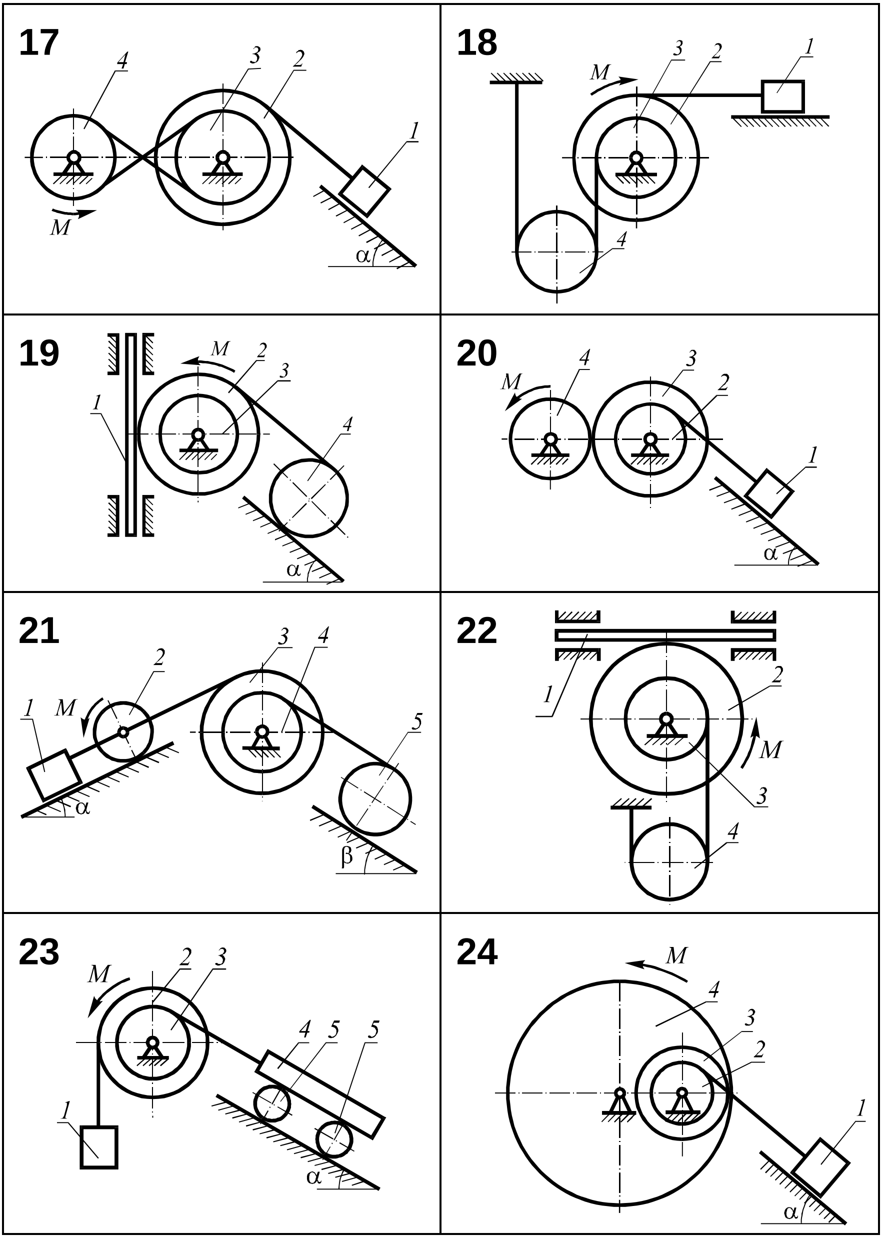


Рисунок 2.4 (продолжение)

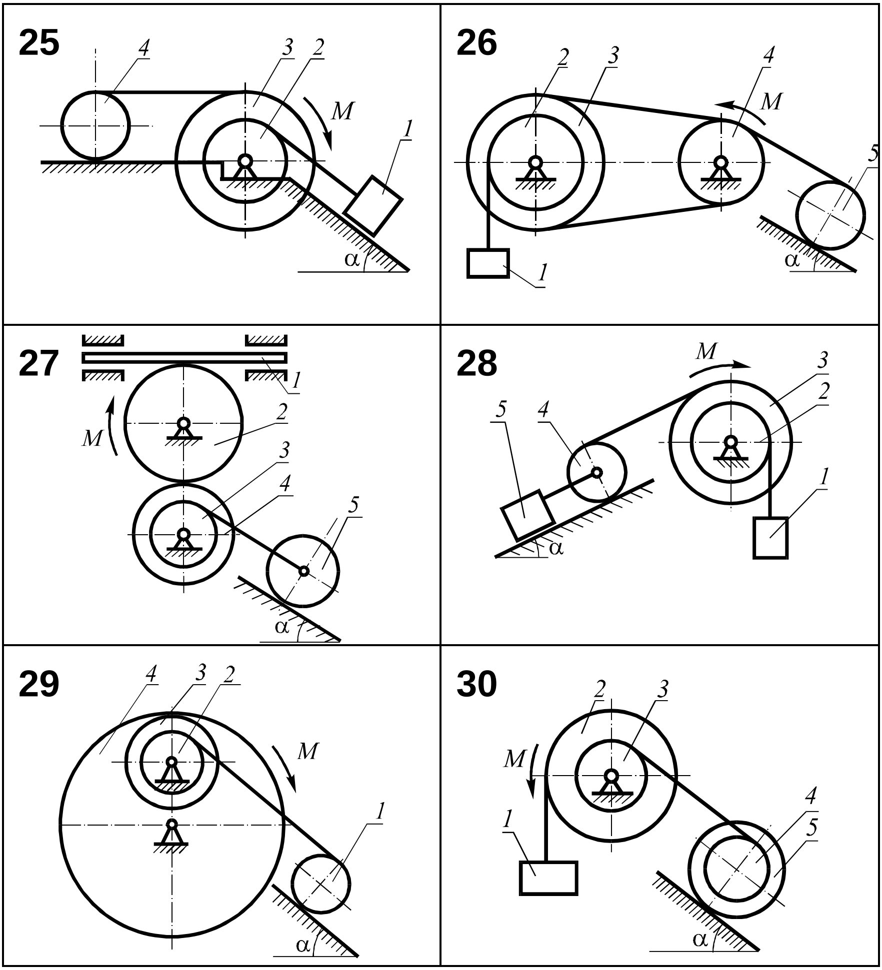


Рисунок 2.4 (окончание)

3 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

3.1 Некоторые положения теории

3.1.1 Обобщенные координаты

Обобщенными координатами материальной системы называют независимые между собой параметры, задание которых однозначно определяет положение всех точек системы. Как правило, в задачах механики в качестве обобщенных координат выбирают величины, определяющие линейные или угловые перемещения. В большинстве механических систем количество обобщенных координат системы равно числу ее степеней свободы. Обобщенные координаты обозначают символом q_i, i – порядковый номер обобщенной координаты, который изменяется от 1 до k, k – число степеней свободы системы. Производные от обобщенных координат по времени называют *обобщенными скоростями* $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$.

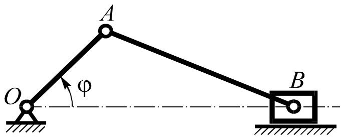


Рисунок 3.1

Рассмотрим примеры задания обобщенных координат для системы:

1) положение материальной точки, движущейся по заданной траектории, определяется ее дуговой координатой s, которая отсчитывается вдоль траектории. Следовательно, для данной точки число степеней свободы $k = 1$ и $q_1 = s$. При этом обобщенная координата имеет размерность длины $[q]$ = м;

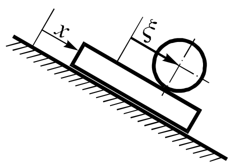


Рисунок 3.2

2) положение вращательно движущегося тела определяется углом поворота φ. Значит, в данном случае $k = 1$ и $q_1 = \varphi$. При этом обобщенная координата имеет размерность угла $[q]$ = рад;

3) положение всех точек кривошипно-шатунного механизма (рисунок 3.1) определяется углом поворота кривошипа φ. Следовательно, для данного механизма также $k = 1$ и $q_1 = \varphi$;

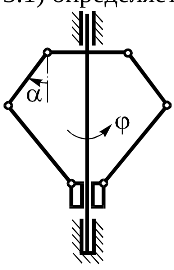


Рисунок 3.3

4) положение точек катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности колеса определяется координатой x центра колеса. Значит $k = 1$, $q_1 = x$, $[q]$ = м;

5) если колесо катится по поверхности поступательно движущегося тела (рисунок 3.2), то данная система описывается координатой x тела и относительным смещением ξ центра колеса. При этом $k = 2$, $q_1 = x$, $q_2 = \xi$;

6) положение центробежного регулятора (рисунок 3.3) определяется углами φ и α. Значит для данного механизма $k = 2$, $q_1 = \varphi$, $q_2 = \alpha$.

3.1.2 Обобщенные силы

Любое возможное перемещение материальной системы определяется набором бесконечно малых возможных приращений обобщенных координат δq_i. Следовательно, сумму работ сил на возможном перемещении системы можно выразить через приращения обобщенных координат:

$$\delta A = \sum \overline{F}_j \cdot \delta \overline{s}_j = \sum Q_i \, \delta q_i \ , \qquad (3.1)$$

где $\overline{F}_j$ – сила, действующая на j-ю точку системы;

$\delta \overline{s}_j$ – возможное перемещение j-й точки.

В формуле (3.1) введены коэффициенты Q_i, которые называют *обобщенными силами*. Таким образом, *обобщенные силы* – это величины, равные коэффициентам при элементарных приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы сил, действующих на систему, на ее возможном перемещении. Размерность обобщенной силы определяется размерностью соответствующей обобщенной координаты. Если обобщенная координата имеет размерность длины, то соответствующая обобщенная сила измеряется в ньютонах. Если в качестве обобщенной координаты выбран угол, то обобщенная сила имеет размерность момента (Н·м).

Для определения обобщенных сил используется один из трех методов:

1) с использованием соотношения (3.1). При этом системе придают такое возможное перемещение, при котором отличным от нуля будет только одно элементарное приращение δq_i ($\delta q_j = 0$ при $j \neq i$). Затем следует определить элементарную работу δA_i всех сил, действующих на систему, при этом перемещении. В соответствии с равенством (3.1) обобщенная сила определяется как отношение элементарной работы δA_i к приращению обобщенной координаты:

$$Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i} \, . \qquad (3.2)$$

Индекс при элементарной работе соответствует номеру обобщенной координаты, приращение которой отлично от нуля.

В качестве примера определим обобщенные силы для системы, состоящей из вращающегося диска массой m_1 и двух грузов массами m_2 и m_3 (рисунок 3.4). Система также содержит пружину с коэффициентом жесткости c. Радиус диска r. Систему будем описывать двумя обобщенными координатами: углом поворота диска φ и деформацией пружины x.

Для определения обобщенной силы Q_φ придадим координате φ возможное приращение $\delta\varphi$. Вторую обобщенную координату при этом оставим неизменной $\delta x = 0$.

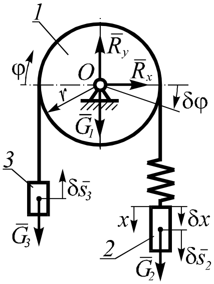


Рисунок 3.4

Определим сумму работ сил, действующих на систему, при выбранном возможном перемещении. Сила тяжести диска G_1 и реакции цилиндрического шарнира в точке O приложены к неподвижной точке. Следовательно, при возможном перемещении системы эти силы не совершают работы. При $\delta x = 0$ деформация пружины не изменяется, и внутренняя сила упругости в пружине также не совершает работы. Значит,

$$\delta A_{\varphi} = \delta A(\overline{G}_2) + \delta A(\overline{G}_3) = G_2\,\delta s_2 - G_3\,\delta s_3 =$$
$$= m_2 gr\delta\varphi - m_3 gr\delta\varphi\ ,$$

где $\delta\bar{s}_2, \delta\bar{s}_3$ – возможные перемещения второго и третьего поступательно движущихся тел соответственно.

В соответствии с формулой (3.2)

$$Q_{\varphi} = \frac{\delta A_{\varphi}}{\delta\varphi} = gr(m_2 - m_3). \tag{3.3}$$

Обобщенная сила Q_{φ} имеет размерность момента.

Для определения обобщенной силы Q_x, соответствующей координате x, придадим системе такое возможное перемещение, при котором $\delta\varphi = 0$ и $\delta x \neq 0$. При этом диск не вращается, а груз 3 не перемещается. Возможное перемещение груза 2 совпадает с приращением деформации пружины δx:

$$\delta A_x = \delta A(\overline{F}_{\text{упр}}) + \delta A(\overline{G}_2) = -F_{\text{упр}}\,\delta x + G_2\,\delta s_2 = -cx\delta x + m_2 g\,\delta x.$$

Здесь $F_{\text{упр}} = cx$ – сила упругости, равная произведению коэффициента жесткости на деформацию пружины. При возможном перемещении сила упругости остается постоянной. Поэтому ее работа определяется как скалярное произведение силы на возможное перемещение точки приложения. Сила упругости направлена противоположно приращению δx. В соответствии с формулой (3.2)

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = -cx + m_2 g\,. \tag{3.4}$$

Обобщенная сила Q_x измеряется в ньютонах;

2) через потенциальную энергию системы. Силы, работа которых не зависит от траектории движения точки приложения, а определяется только начальным и конечным положениями этой точки, называются *потенциальными силами*. Если на точки материальной системы действуют потенциальные силы, то обобщенная сила Q_i, соответствующая обобщенной координате q_i, равна взятой со знаком минус частной производной от потенциальной энергии системы по этой координате:

$$Q_i = -\frac{\partial П}{\partial q_i}. \quad (3.5)$$

Используем соотношение (3.5) для определения обобщенных сил системы, изображенной на рисунке 3.4. Потенциальная энергия *П* данной системы является суммой потенциальной энергии деформирования пружины и потенциальных энергий поля силы тяжести:

$$П = П_{\text{упр}} + П_G = c\frac{\Delta l^2}{2} + m_1 g y_{1C} + m_2 g y_{2C} + m_3 g y_{3C},$$

где y_{1C}, y_{2C}, y_{3C} – высота центра тяжести тела 1-3 над произвольно выбранным нулевым эквипотенциальным уровнем;

$\Delta l = x$ – деформация пружины.

Выразим высоты y_{1C}, y_{2C}, y_{3C} через обобщенные координаты φ и x:

$$y_{1C} = y_{10}, \quad y_{2C} = y_{20} - r\varphi - x, \quad y_{3C} = y_{30} + r\varphi,$$

где y_{10}, y_{20}, y_{30} – высоты центров тяжести соответствующих тел в исходном положении системы (φ = 0, x = 0).

Тогда

$$П = c\frac{x^2}{2} + (m_1 y_{10} + m_2 y_{20} + m_3 y_{30})g - m_2 g(r\varphi + x) + m_3 g r\varphi.$$

Для определения обобщенных сил возьмем производные по обобщенным координатам от потенциальной энергии системы:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial П}{\partial \varphi} = m_2 g r - m_3 g r = g r(m_2 - m_3), \quad Q_x = -\frac{\partial П}{\partial x} = -cx + m_2 g.$$

Данные выражения совпадают с ранее полученными формулами (3.3) и (3.4) для обобщенных сил данной системы;

3) через силы, действующие на точки системы. При этом

$$Q_i = \sum \bar{F}_j \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} = \sum \left(F_{jx}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{jy}\frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{jz}\frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right),$$

где $\bar{F}_j, F_{jx}, F_{jy}, F_{jz}$ – сила, действующая на j-ю точку системы, и проекции этой силы на оси декартовой системы координат;

$\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i}$ – частная производная от радиус-вектора j-й точки по обобщенной координате q_i;

x_j, y_j, z_j – координаты j-й точки.

Из-за трудоемкости последний метод определения обобщенных сил используется при решении задач крайне редко.

3.1.3 Уравнение Лагранжа второго рода

Преобразуя общее уравнение динамики системы (2.3) к форме, содержащей обобщенные координаты и силы, для любой материальной системы можно получить уравнение [4]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\,, \qquad (3.6)$$

где $T = \sum \frac{m_j v_j^2}{2}$ – кинетическая энергия системы;

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \frac{\partial T}{\partial q_i}$ – частные производные от кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{q}_i$ и обобщенной координате q_i соответственно.

Уравнение (3.6) будет выполняться при любом номере обобщенной координаты *i*. Значит, для системы, которая имеет *k* степеней свободы, можно записать *k* дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2; \\ \quad\vdots \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k\,. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Уравнения (3.7) называются *уравнениями Лагранжа второго рода*. Их количество равно числу обобщенных координат системы. Решение уравнений Лагранжа второго рада позволяет определить зависимость от времени обобщенных координат, характеризующих положение материальной системы.

Если на систему действуют только потенциальные силы, то уравнения Лагранжа второго рода можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,,$$

где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа.

3.1.4 Порядок решения задач с использованием уравнений Лагранжа второго рода

Решение задач с использованием уравнений Лагранжа второго рода рекомендуется осуществлять по следующей методике.

1 Изобразить исследуемую систему. Определить количество степеней свободы и выбрать обобщенные координаты, которые полностью характеризуют положение и движение системы.

2 Определить кинетическую энергию. При этом скорости всех звеньев системы следует выразить через обобщенные скорости и координаты.

3 Определить обобщенные силы. При этом для каждой обобщенной координаты надо выполнить действия:

а) придать системе такое возможное перемещение, при котором отлично от нуля приращение только одной обобщенной координаты δq_i;

б) определить элементарную работу всех сил δA_i , действующих на систему при этом возможном перемещении;

с) обобщенную силу Q_i, которая соответствует обобщенной координате q_i, определить по формуле (3.2).

4 Подставить полученные выражения для кинетической энергии и обобщенных сил в уравнения Лагранжа второго рода (3.7).

5 Решить полученную систему дифференциальных уравнений и найти требуемые по условию задачи величины.

3.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Система состоит из трех тел массами $m_1 = m_2 = 10$ кг, $m_3 = 40$ кг и пружины с коэффициентом жесткости $c = 8$ Н/см (рисунок 3.5). К системе приложена активная сила $F = 300$ Н и пара сил с моментом $M = 100$ Н·м. Радиусы блоков: $R_1 = 60$ см, $r_1 = 0{,}5R_1 = 30$ см, $R_2 = 40$ см. Радиус инерции первого тела $i_1 = 40$ см. Тело 2 – однородный цилиндр. Угол наклона плоскости $\alpha = 30°$. В начальный момент система находилась в покое, а пружина недеформирована. Используя уравнения Лагранжа второго рода, определить период колебания тел при движении системы.

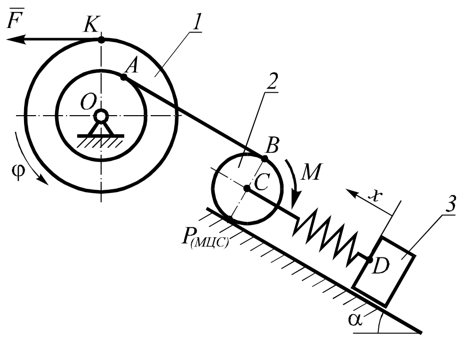


Рисунок 3.5

Р е ш е н и е

1 *Изображаем исследуемую систему* (см. рисунок 3.5). Система имеет две степени свободы. Значит, ее следует характеризовать двумя обобщен-

ными координатами. В качестве одной обобщенной координаты выберем угол поворота вращательно движущегося тела 1 – φ. В качестве второй обобщенной координаты выберем деформацию пружины – x (см. рисунок 3.5).

2 *Определяем кинетическую энергию системы*. Так как система состоит из трех тел, то

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где T_1 – кинетическая энергия тела 1.

Тело 1 движется вращательно. Значит, $T_1 = \frac{J_O \omega_1^2}{2}$. Здесь J_O – момент инерции тела 1 относительно оси вращения O; ω_1 – угловая скорость тела 1. Так как для тела 1 известен радиус инерции, то $J_O = m_1 i_1^2$. Угловая скорость ω_1 определяется как производная по времени от угла поворота φ. Значит, она совпадает с обобщенной скоростью $\omega_1 = \dot{\varphi}$. Подставим полученные выражения в формулу для кинетической энергии первого тела:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 i_1^2 \dot{\varphi}^2,$$

где T_2 – кинетическая энергия второго тела.

Тело 2 движется плоскопараллельно. Значит,

$$T_2 = \frac{J_C \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_C^2}{2},$$

где J_C – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через центр масс C;

ω_2 – угловая скорость тела 2;

v_C – скорость центра масс тела 2.

Так как тело 2 – однородный цилиндр, то $J_C = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$. Угловые скорости первого ω_1 и второго ω_2 тел взаимосвязаны. Для установления этой связи используем метод общей точки. Выберем на теле 1 точку A, а на теле 2 – точку B (см. рисунок 3.5). В силу нерастяжимости нитей скорости этих точек одинаковы $v_A = v_B$. Точка A принадлежит вращательно движущемуся телу 1. Значит, $v_A = \omega_1 r_1 = \dot{\varphi} r_1$. Тело 2 катится без проскальзывания по неподвижной поверхности. Мгновенный центр P этого тела находится в точке касания с поверхностью (см. рисунок 3.5). Тогда для скорости точки B запишем $v_B = \omega_2 BP = \omega_2 2R_2$. Так как скорости точек A и B равны, то $\dot{\varphi} r_1 = \omega_2 2R_2$. Выразим угловую скорость второго тела:

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \frac{r_1}{2R_2}. \qquad (3.8)$$

Точка C принадлежит плоскопараллельно движущемуся телу 2, значит,

$$v_C = \omega_2 CP = \omega_2 R_2 = \dot\varphi \frac{r_1}{2}. \qquad (3.9)$$

Подставим полученные выражения для J_O, ω_2 и v_C в формулу для кинетической энергии второго тела:

$$T_2 = \frac{1}{4} m_2 \dot\varphi^2 \frac{r_1^2}{4} + \frac{1}{2} m_2 \dot\varphi^2 \frac{r_1^2}{4} = \frac{3}{16} m_2 \dot\varphi^2 r_1^2,$$

где $T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_D^2$ – кинетическая энергия тела 3, которое движется поступательно.

Если точка C переместится по наклонной плоскости на s_C, то перемещение точки D будет равно сумме: $s_D = s_C + x$, где x – деформация пружины. Тогда для скорости точки D получим $v_D = v_C + \dot x = \dot\varphi \frac{r_1}{2} + \dot x$. Подставим v_D в формулу для кинетической энергии третьего тела:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left(\dot\varphi^2 \frac{r_1^2}{4} + \dot\varphi r_1 \dot x + \dot x^2 \right).$$

Сложим кинетические энергии тел и определим T:

$$T = \frac{1}{2} m_1 i_1^2 \dot\varphi^2 + \frac{3}{16} m_2 r_1^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{8} m_3 r_1^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m_3 r_1 \dot\varphi \dot x + \frac{1}{2} m_3 \dot x^2. \qquad (3.10)$$

3 *Определим обобщенные силы.*

3.1 *Определим обобщенную силу* Q_φ, соответствующую обобщенной координате φ:

а) придадим координате φ элементарное приращение $\delta\varphi$ (рисунок 3.6). Координату x оставим неизменной ($\delta x = 0$). В этом случае звено 1 повернется на угол $\delta\varphi$. Точка приложения силы $\overline{F}$ переместится на $\delta s_N = R_1 \delta\varphi$. Звено 2 повернется на угол $\delta\varphi_2$, а точка C переместится вверх по наклонной плоскости на δs_C. Все точки тела 3 переместятся по наклонной плоскости на δs_D. Так как при рассматриваемом перемещении системы $\delta x = 0$, то $\delta s_D = \delta s_C$;

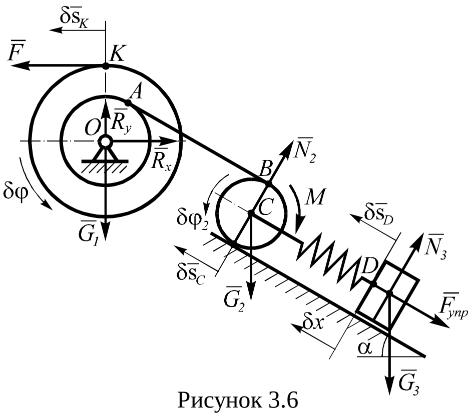


Рисунок 3.6

б) определим сумму элементарных работ сил, действующих на систему, на выбранном перемещении. На систему действуют: силы тяжести $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3$; реакции цилиндрического шарнира; нормальные реакции $\overline{N}_2, \overline{N}_3$; активная сила $\overline{F}$; пара сил с моментом *M*. Силы $\overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{G}_1$ не совершают работы, так как приложены к неподвижной точке *O*: $\delta A(\overline{G}_1) = \delta A(\overline{R}_x) = \delta A(\overline{R}_y) = 0$. Силы нормальной реакции направлены перпендикулярно перемещению точек приложения и также не совершают работы: $\delta A(\overline{N}_2) = \delta A(\overline{N}_3) = 0$. При $\delta x = 0$ расстояние между точками *C* и *D* остается неизменным. В этом случае работа внутренней силы упругости в пружине равна нулю. Значит, элементарная работа всех сил на рассматриваемом перемещении равна сумме 4 слагаемых:

$$\delta A_\varphi = \delta A(\overline{F}) + \delta A(M) + \delta A(\overline{G}_2) + \delta A(\overline{G}_3).$$

Так как сила $\overline{F}$ направлена так же, как и перемещение $\delta\overline{s}_N$, то

$$\delta A(\overline{F}) = F\delta s_N = FR_1\delta\varphi.$$

Момент *M* направлен противоположно повороту второго тела $\delta A(M) = -M\,\delta\varphi_2$. Угол поворота $\delta\varphi_2$ связан с $\delta\varphi$ так же, как угловая скорость второго звена ω_2 связана с обобщенной скоростью $\dot{\varphi}$. В соответствии с равенством (3.8) $\delta\varphi_2 = \delta\varphi\dfrac{r_1}{2R_2}$. Тогда

$$\delta A(M) = -M\,\frac{r_1}{2R_2}\delta\varphi.$$

Сила тяжести $\overline{G}_2$ приложена к точке *C*, которая при рассматриваемом перемещении системы движется вверх по наклонной плоскости. Значит, работа этой силы $\delta A(\overline{G}_2) = -m_2 g\Delta h_C = -m_2 g\delta s_C \sin\alpha$. Здесь Δh_C – изменение высоты точкой *C* при движении системы. Используя соотношение (3.9) для скорости точки *C*, установим связь между перемещением точки *C* и углом поворота тела 1 $\delta s_C = \delta\varphi\dfrac{r_1}{2}$. При этом

$$\delta A(\overline{G}_2) = -m_2 g\,\frac{r_1}{2}\delta\varphi\,\sin\alpha.$$

Перемещение центра масс тела 3 совпадает с перемещением точки *C* ($\delta x = 0$):

$$\delta A(\overline{G}_3) = -m_3 g\,\delta s_D \sin\alpha = -m_3 g\,\delta s_C \sin\alpha = -m_3 g\,\frac{r_1}{2}\delta\varphi\,\sin\alpha;$$

в) сложим полученные выражения для элементарных работ сил и определим обобщенную силу Q_φ:

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = FR_1 - M\,\frac{r_1}{2R_2} - m_2 g\,\frac{r_1}{2}\sin\alpha - m_3 g\,\frac{r_1}{2}\sin\alpha\,. \qquad (3.11)$$

3.2 *Определим обобщенную силу* Q_x, соответствующую обобщенной координате x:

а) придадим координате x элементарное приращение δx (см. рисунок 3.6). При этом обобщенную координату φ оставим неизменной ($\delta\varphi = 0$). В этом случае звено 1 остается неподвижным. Следовательно, неподвижна и точка B. Значит звено 2 также неподвижно. Все точки тела 3 перемещаются вверх по наклонной плоскости на δx;

б) определим элементарную работу сил, действующих в системе, на этом перемещении. Силы $\overline{G}_1, \overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{N}_2, \overline{N}_3$ не совершают работы. Так как при $\delta\varphi = 0$ звенья 1 и 2 неподвижны, то работы сил $\overline{F}, \overline{G}_2$ и пары сил с моментом M также равны нулю $\delta A(\overline{F}) = \delta A(\overline{G}_2) = \delta A(M) = 0$. При рассматриваемом движении расстояние между точками C и D изменяется на δx. Значит, в данном случае работа внутренней силы упругости пружины не равна нулю. Тогда элементарная работа всех сил будет равна сумме двух слагаемых:

$$\delta A_x = \delta A(\overline{G}_3) + \delta A(\overline{F}_{\text{упр}})\,.$$

Так как центр масс тела 3 перемещается вверх по наклонной плоскости на δx, то

$$\delta A(\overline{G}_3) = -m_3 g\,\delta x \sin\alpha\,.$$

На элементарных перемещениях все силы (в том числе и сила упругости) постоянны. Значит,

$$\delta A(\overline{F}_{\text{упр}}) = -F_{\text{упр}}\delta x = -cx\,\delta x\,.$$

Здесь учтено, что сила упругости по модулю равна произведению коэффициента жесткости на деформацию пружины x и направлена противоположно δx;

с) сложим полученные выражения для элементарных работ сил и определим обобщенную силу Q_x:

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = -m_3 g\sin\alpha - cx\,. \qquad (3.12)$$

4 *Подставим полученные выражения в уравнения Лагранжа второго рода.* В данной задаче в качестве первой обобщенной координаты выбран угол φ ($q_1 = \varphi$), а в качестве второй – деформация x ($q_2 = x$). Значит, уравнения Лагранжа (3.7) запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_{\varphi};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_{x}\ . \qquad (3.13)$$

Определим частные производные от кинетической энергии T по обобщенным скоростям. В соответствии с (3.10) получим:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\left(m_1 i_1^2+\frac{3}{8}m_2 r_1^2+\frac{1}{4}m_3 r_1^2\right)\dot{\varphi}+\frac{1}{2}m_3 r_1\dot{x}\ ,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=\frac{1}{2}m_3 r_1\dot{\varphi}+m_3\dot{x}\ .$$

Так как выражение (3.10) для кинетической энергии системы не содержит обобщенных координат φ, x, то

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=\frac{\partial T}{\partial x}=0\ .$$

Используем полученные выражения для частных производных и формулы (3.11), (3.12) для обобщенных сил в системе (3.13):

$$\left(m_1 i_1^2+\frac{3}{8}m_2 r_1^2+\frac{1}{4}m_3 r_1^2\right)\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}m_3 r_1\ddot{x}=$$

$$=FR_1-M\,\frac{r_1}{2R_2}-(m_2+m_3)g\,\frac{r_1}{2}\sin\alpha; \qquad (3.14)$$

$$\frac{1}{2}m_3 r_1\ddot{\varphi}+m_3\ddot{x}=-m_3 g\sin\alpha-cx\ .$$

5 *Решим полученную систему дифференциальных уравнений.* Подставим численные значения величин, входящих в систему (3.14):

$$(1{,}6+0{,}34+0{,}9)\ddot{\varphi}+6\ddot{x}=180-37{,}5-36{,}75;$$

$$6\ddot{\varphi}+40\ddot{x}=-196-800x\ .$$

После вычислений получим:

$$\begin{cases} 2{,}84\ddot{\varphi}+6\ddot{x}=105{,}75\ ; \\ 6\ddot{\varphi}+40\ddot{x}=-196-800x\ . \end{cases} \qquad (3.15)$$

Для того чтобы определить период колебаний, надо вывести уравнение для деформации пружины x или угла φ. Значит, из первого уравнения системы надо выразить обобщенное ускорение $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi}=37{,}24-2{,}11\ddot{x}\ .$$

Подставим данное выражение во второе уравнение системы (3.15):

$$223{,}42-12{,}66\ddot{x}+40\ddot{x}=-196-800x\ .$$

Приведем подобные слагаемые:

$$27{,}34\ddot{x}+800x=-419{,}42\ .$$

Разделим обе части равенства на 27,34:

$$\ddot{x} + 29{,}26x = -15{,}34 .$$

Последнее уравнение по форме совпадает с динамическим уравнением колебательного движения материальной точки в каноническом виде при отсутствии вязкого сопротивления (см. задачу Д-2 из [2]):

$$\ddot{x} + k^2 x = f .$$

В этом уравнении k – частота колебаний.

Значит, частота колебания тел системы $k = \sqrt{29{,}26} = 5{,}41\ \text{с}^{-1}$. Период колебаний τ связан с частотой k следующим образом:

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 1{,}16\ \text{с} .$$

3.3 Условие задания Д-10

Применение уравнений Лагранжа второго рода для исследования колебаний движения материальной системы

Система состоит из трех тел массами m_1, m_2, m_3 и пружины с коэффициентом жесткости c. К ней приложена активная сила F и пара сил с моментом M. Радиусы блоков: R_1, r_1, R_2, r_2. Радиусы инерции тела i_1, i_2. При этом для всех блоков выполняются следующие условия: $r = 0{,}5R$; $i = R/\sqrt{2}$. Угол наклона плоскости α. В начальный момент система находилась в покое, а пружина недеформирована. Используя уравнения Лагранжа второго рода, определить период колебания тел при движении системы.

Исходные данные приведены в таблице 3.1, система изображена на рисунке 3.7. Трение скольжения и сопротивление качению не учитывается.

Рекомендация: в качестве первой обобщенной координаты выбрать угол поворота одного из вращательно движущихся тел, а в качестве второй – деформацию пружины.

Таблица 3.1 – **Исходные данные к заданию Д-10**

Вариант	Массы тел, кг			Радиусы, см		Углы, град		c, Н/см	F, кН	M, кН·м
	m_1	m_2	m_3	R_1	R_2	α	β			
1	30	15	10	60	30	45	60	4	0,5	1
2	50	20	20	70	45	60	—	11	2	0,3
3	60	55	8	50	40	30	—	9	1,6	0,1
4	50	40	40	65	60	30	—	6	1	0,5
5	80	45	50	80	30	45	—	10	1,8	0,8
6	40	30	10	60	55	60	45	5	1	0,4

Окончание таблицы 3.1

Вариант	Массы тел, кг			Радиусы, см		Углы, град		c, Н/см	F, кН	M, кН·м
	m_1	m_2	m_3	R_1	R_2	α	β			
7	60	60	15	55	50	30	—	8	1,9	1,1
8	40	35	20	50	35	60	—	12	0,4	1,6
9	60	80	30	60	70	30	—	4	1,1	0,7
10	70	30	40	80	50	30	60	15	1,5	0,4
11	80	85	45	85	90	45	—	17	2	0,6
12	50	50	14	40	50	30	—	10	0,9	0,2
13	90	70	20	80	55	60	—	12	0,4	1
14	50	60	52	45	70	30	—	16	2,1	0,3
15	60	80	18	65	80	60	30	9	1,4	0,5
16	80	85	35	60	95	60	—	20	2,5	0,8
17	60	40	40	70	40	60	45	11	1,7	0,6
18	70	30	15	60	35	60	—	7	2,3	0,5
19	60	55	20	60	60	30	45	15	1,9	1
20	70	60	10	65	40	45	—	5	0,6	1,3
21	90	50	15	55	30	30	60	16	1,4	0,7
22	50	65	10	50	55	30	—	8	2,1	0,3
23	45	70	35	40	80	45	—	10	1,6	0,2
24	75	15	60	70	30	45	—	22	1,9	0,8
25	60	60	15	60	50	45	60	15	1,5	0,4
26	40	40	50	45	40	60	—	20	1,1	0,1
27	30	25	10	60	55	45	—	7	0,8	1,3
28	70	50	25	70	45	30	—	12	1,6	0,3
29	60	20	40	80	50	60	—	11	2,3	0,7
30	40	55	15	40	70	—	—	16	1,5	0,6

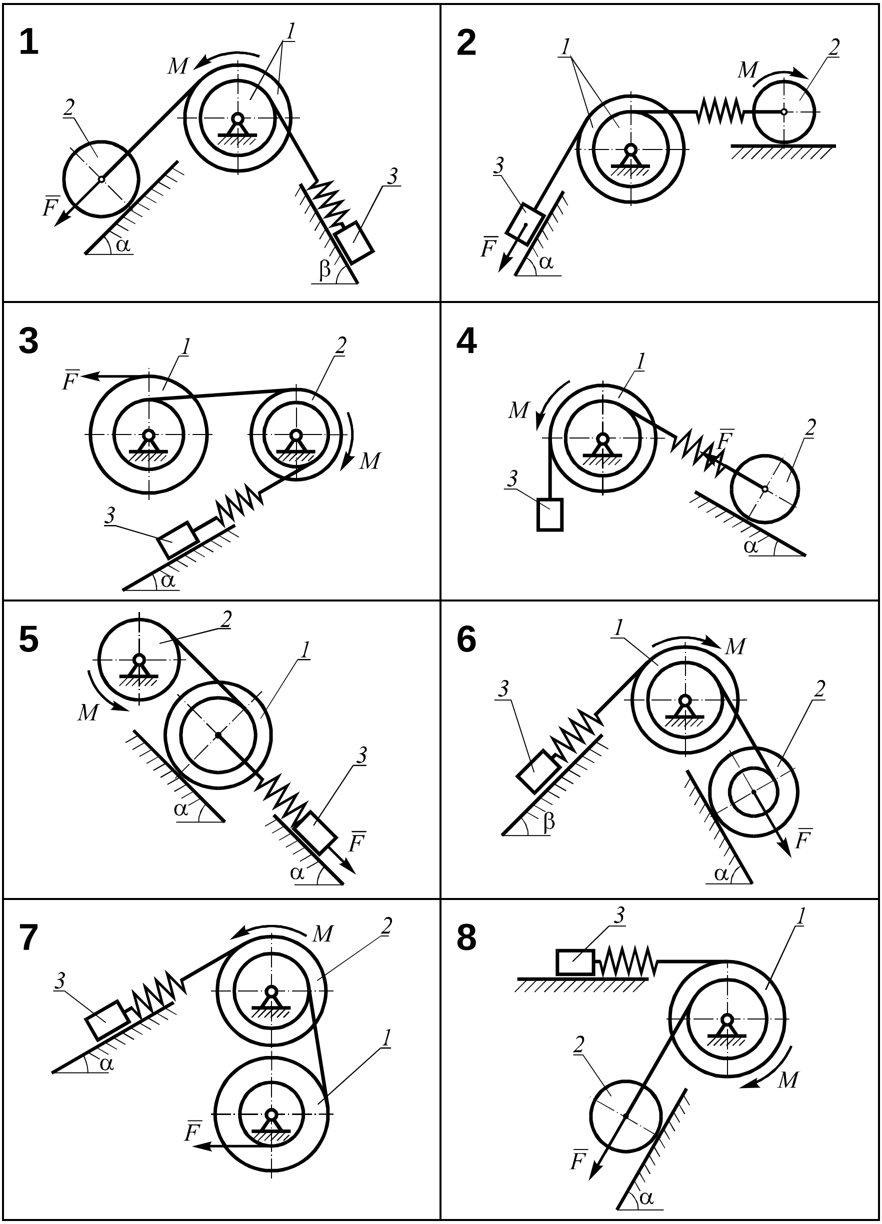


Рисунок 3.7 (начало)

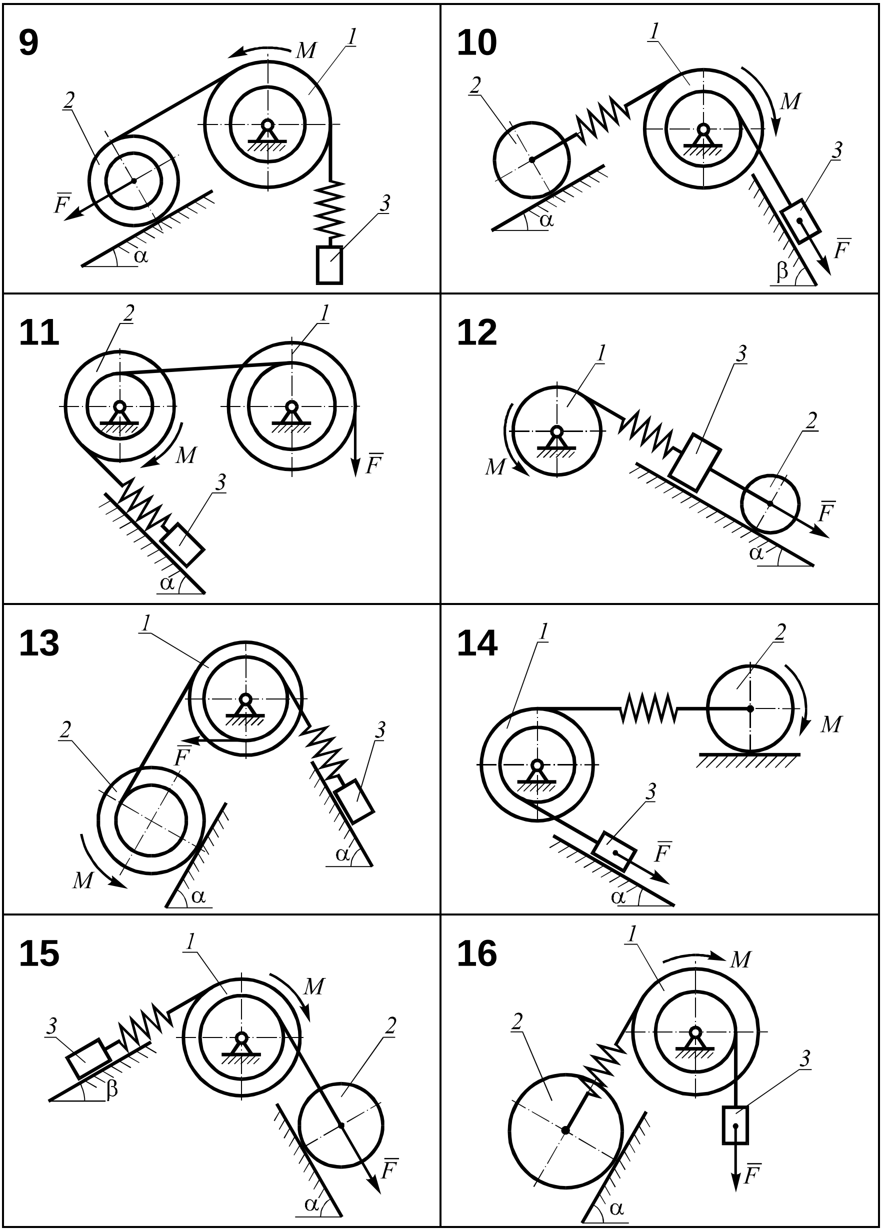


Рисунок 3.7 (продолжение)

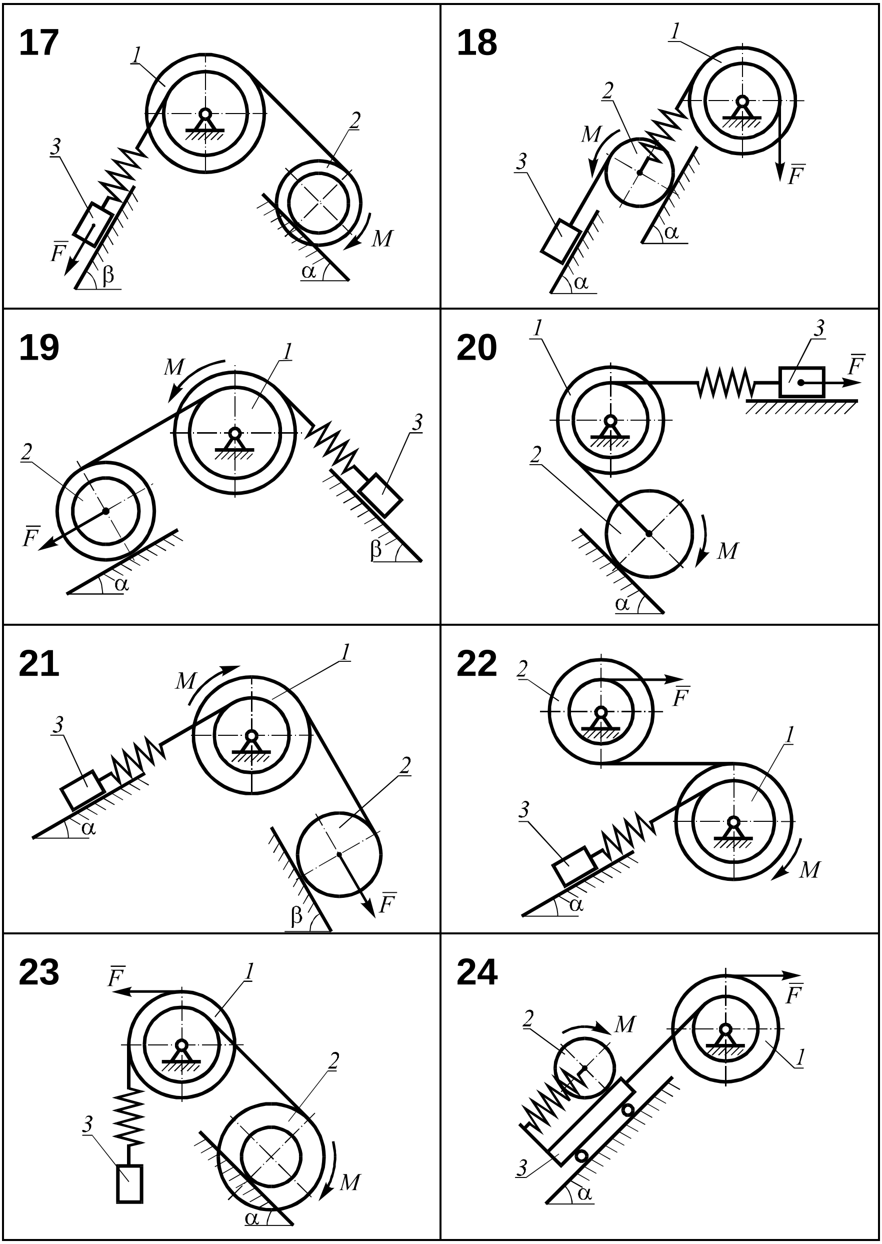


Рисунок 3.7 (продолжение)

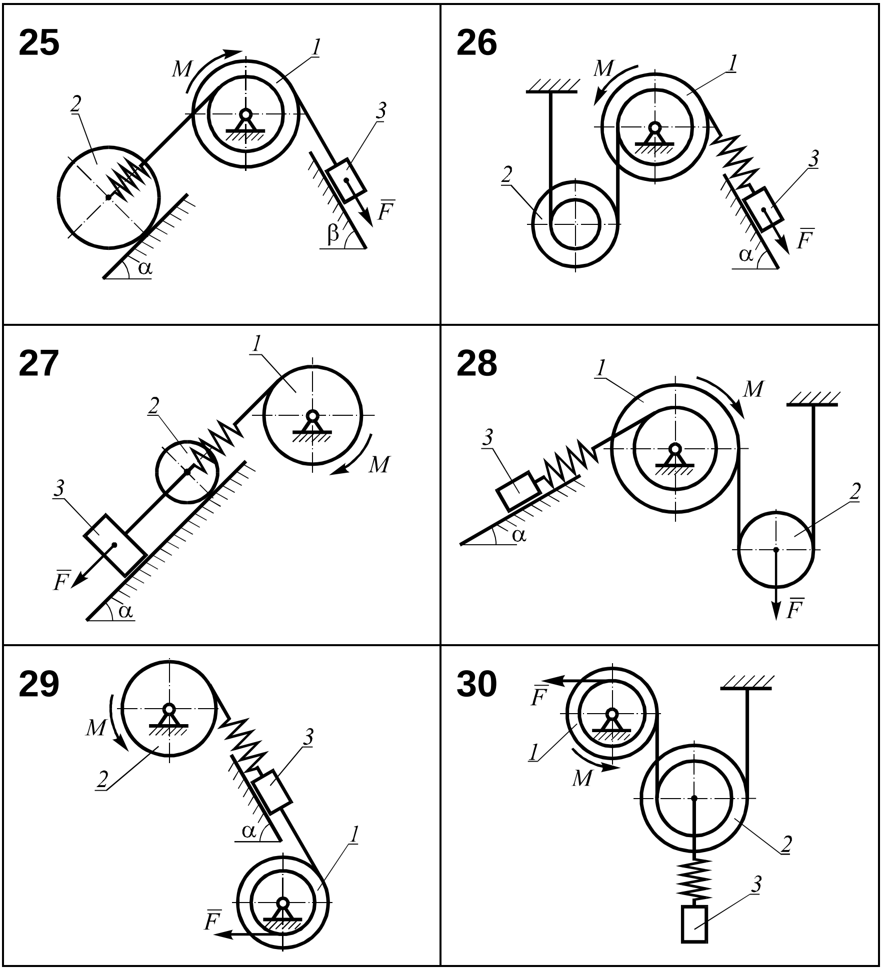


Рисунок 3.7 (окончание)

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Ефремова, З. Г.** Теоретическая механика. Раздел «Динамика материальной точки» (Обзор материала и задания для контрольных работ) : пособие для студентов технических специальностей / З. Г. Ефремова, Д. А. Черноус, О. С. Коломникова. – Гомель : БелГУТ, 2005. – 49 с.

2 **Черноус, Д. А.** Теоретическая механика. Раздел «Динамика материальной точки» (Обзор материала и задания для контрольных работ) : пособие для студентов технических специальностей / Д. А. Черноус, О. С. Коломникова. – Гомель : БелГУТ, 2006. – 63 с.

3 **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб. : Изд-во «Лань», 1998. – 736 с.

4 **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Высшая школа, 1995. – 416 с.

5 **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1990. – 670 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(*справочное*)

Программа курса «Теоретическая механика»

1 Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики – изучение механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Объективный характер законов механики. Значение теоретической механики как научной базы большинства областей современной техники. Связь механики с производством и ее роль в решении народнохозяйственных задач. Значение механики для специалистов данного профиля. Основные исторические этапы развития механики.

2 Основные понятия механики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, силы внешние и внутренние. Связи и реакции связей. Трение скольжения при покое (сцепление) и движении. Законы трения скольжения. Реакция шероховатой поверхности.

3 Предмет статики. Аксиомы статики. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Проекция силы на ось и плоскость. Равнодействующая сходящихся сил. Геометрическое и аналитические условия равновесия сходящихся сил.

4 Момент силы относительно центра. Свойства момента. Момент силы относительно центра как вектор. Момент силы относительно оси. Зависимость между моментами силы относительно центра и оси, проходящей через этот центр.

5 Понятие о паре сил. Момент пары сил. Момент пары сил как вектор. Теорема о сумме моментов пары сил относительно центра. Теоремы об эквивалентности пар. Сложение пар сил, расположенных в плоскости и пространстве. Условия равновесия пар сил.

6 Приведение силы и системы сил к данному центру. Метод Пуансо и основная теорема статики. Главный вектор и главный момент системы сил. Частные случаи приведения системы сил. Статически определимые и статически неопределимые системы. Условия равновесия тел, находящихся под действием различных систем сил. Равновесие системы тел.

7 Приведение системы параллельных сил к равнодействующей. Центр параллельных сил, его радиус-вектор и координаты. Центр тяжести твердого тела; центр тяжести объема, площади и линии. Способы определения положения центров тяжести тел.

8 Предмет кинематики. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

9 Кинематика простого движения точки. Векторный, координатный и естественный способы задания движения точки. Траектория точки. Связь между различными способами задания движения. Скорость точки при векторном, координатном (декартовы координаты) и естественном способах задания движения. Ускорение точки при векторном, координатном и естественном способах задания движения. Касательное и нормальное ускорения точки. Частные случаи движения точки.

10 Простейшие движения твердого тела. Понятие числа степеней свободы твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение вращательного движения тела. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела.

11 Кинематика сложного движения точки. Абсолютное и относительное движения точки; переносное движение. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений; определение кориолисова ускорения.

12 Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Определение скорости любой точки фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры. Мгновенный центр скоростей; определение с его помощью скоростей точек плоской фигуры. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении фигуры вокруг полюса.

13 Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила, постоянные и переменные силы. Законы классической механики или законы Галилея–Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

14 Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых прямоугольных координатах и проекциях на оси естественного трехгранника. Две основные задачи динамики для материальной точки, их решение.

15 Механическая система. Масса системы. Центр масс системы и его координаты. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы внешние и внутренние, задаваемые (активные) силы и реакции связей. Свойства внутренних сил.

16 Общие теоремы динамики системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс системы.

Закон сохранения движения центра масс. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

17 Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость центра масс. Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения системы.

18 Главный момент количества движения механической системы относительно центра и оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента системы. Закон сохранения кинетического момента. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

19 Моменты инерции системы и твердого тела относительно оси и полюса. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Осевые моменты инерции некоторых однородных тел: стержень, полый и сплошной цилиндры, шар.

20 Кинетическая энергия механической системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела в различных случаях его движения. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Равенство нулю суммы работ внутренних сил, действующих в твердом теле или неизменяемой механической системе. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Закон сохранения механической энергии системы при действии на нее потенциальных сил.

21 Принцип Даламбера для материальной точки; сила инерции. Принцип Даламбера для механической системы. Главный вектор и главный момент сил инерции. Определение с помощью принципа Даламбера динамических реакций при движении точки и механической системы.

22 Возможные или виртуальные перемещения системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Принцип Даламбера–Лагранжа; общее уравнение динамики системы.

23 Малые колебания механической системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия; свободные незатухающие колебания и их свойства; частота и период колебаний; амплитуды и фазы колебаний; свободные затухающие колебания при сопротивлении, пропорциональном скорости; период и декремент этих колебаний; случай апериодического движения; вынужденные колебания при гармонической вынуждающей силе и сопротивлении, пропорциональном скорости; коэффициент динамичности, резонанс.

24 Колебания систем с несколькими степенями свободы. Свободные и собственные колебания.

Учебное издание

ЧЕРНОУС Дмитрий Анатольевич

КОЛОМНИКОВА Оксана Сергеевна

Теоретическая механика. Раздел «Основы аналитической механики»
(Обзор материала и задания для контрольных работ)
Учебно-методическое пособие для студентов технических специальностей

Редактор *Т. М. Ризевская*
Технический редактор *В. Н. Кучерова*
Корректор *М.П. Дежко*

Подписано в печать 27.05.2008 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,58. Тираж 500 экз.
Зак. № . Изд. № 81 .

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0133394 от 19.07.2004 г.
ЛП № 02330/0148780 от 30.04.2004 г.
246053, г. Гомель, ул. Кирова, 34