МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Прикладная математика»

В. Е. ЕВДОКИМОВИЧ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие для студентов
всех специальностей факультета УПП

Гомель 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Прикладная математика»

В. Е. ЕВДОКИМОВИЧ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие для студентов
всех специальностей факультета УПП

Одобрено методической комиссией факультета УПП

Гомель 2007

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171
Е15

Рецензент – зав. кафедрой высшей математики д-р физ.-мат. наук В. Н. Семенчук (УО «ГГУ им. Ф.Скорины»).

Евдокимович, В. Е.

Е15 Основы теории вероятностей : учеб.-метод. пособие для всех специальностей факультета УПП / В. Е. Евдокимович ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 122 с.
ISBN 978-985-468-347-8

Содержит основные разделы теории вероятностей, предусмотренные учебной программой по специальностям 1-44 01 01 «Организация перевозок и управление на автомобильном и городском транспорте», 1-44 01 03 «Организация перевозок и управление на ж.-д. транспорте», 1-44 01 04 «Организация перевозок и управление на речном транспорте» по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Включает в себя теоретические сведения, предметные постановки и примеры решения задач, связанных с анализом вероятностных характеристик процессов управления перевозок на транспорте.

Предназначено для студентов всех специальностей факультета УПП. Может быть использовано при выполнении курсовых и дипломных проектов студентами, аспирантами и научными работниками, занимающимися вероятностными методами.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171

ISBN 978-985-468-347-8

ВВЕДЕНИЕ

Последние годы характеризуются интенсивным внедрением вероятностных методов в технологические, социологические и экономические науки в связи с развитием массовых процессов в производстве и экономике. Поэтому знание методов теории вероятностей необходимо инженерам при разработке математических моделей для решения практических задач.

Теория вероятностей изучает модели экспериментов со случайными исходами (случайных экспериментов). Всякий случайный эксперимент (испытание) состоит в осуществлении некоторого вполне определенного комплекса условий и наблюдении результата. Рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторить при неизменном комплексе условий произвольное число раз.

Предметом наблюдения в том или ином случайном опыте может быть некоторый процесс, физические явления или действующая система. Для реально воспроизводимого эксперимента понятие “наблюдаемый результат” означает, что существует принципиальная возможность зарегистрировать данный результат опыта с помощью того или иного прибора. Любой наблюдаемый результат интерпретируется как случайный исход опыта (случайное событие). Событие может произойти, а может не произойти в результате эксперимента.

При математической формализации модели случайного эксперимента основным пунктом является понятие множества (пространства) элементарных исходов (событий), связанного с данным экспериментом. Под этим понимают множество взаимоисключающих исходов, такое, что результатом эксперимента всегда является один и только один исход. Любое подмножество данного множества рассматривается как событие.

Результат эксперимента можно охарактеризовать количественно. Количественная характеристика эксперимента состоит в определении значений некоторых величин, которыми интересуются при данном эксперименте. В силу действия большого числа случайных факторов эти величины могут принимать различные значения в результате эксперимента. Поэтому такие величины называют случайными.

Теория вероятностей занимается изучением случайных событий и случайных величин.

В пособии содержатся основные сведения из теории вероятностей (определения, леммы, теоремы), рассматривается множество примеров, а также содержатся задания по РГР.

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1 Вероятностный эксперимент. Пространство элементарных событий

Любой эксперимент или наблюдение изучаемого физического явления заканчивается некоторым событием (исходом). Если результат эксперимента заранее однозначно непредсказуем, то данный эксперимент называется *вероятностным* и обозначается символом «*E*».

Элементарным событием (*элементарным исходом*) ω называется любой мысленно возможный неразложимый результат вероятностного эксперимента *E*.

Пространством элементарных событий Ω называется множество всех мыслимых взаимоисключающих результатов вероятностного эксперимента *E*.

Случайным событием называется такое событие, о котором нельзя заведомо точно сказать, произойдёт оно или нет.

Случайные события обозначаются заглавными латинскими буквами (*A, B, C, D, …*). Случайное событие является некоторым подмножеством пространства элементарных событий ($A \subseteq \Omega$).

Пример 1

E: бросается игральная кость.

Элементарные события: $\omega_1 =$ {выпадение на игральной кости «1»}, $\omega_2 =$ {выпадение на игральной кости «2»} и т. д. Пространство элементарных событий $\Omega =$ {выпадение на игральной кости числа от «1» до «6»} = $\{ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6 \}$. Тогда случайные события:

A = {выпадение чётного числа} = $\{ \omega_2, \omega_4, \omega_6 \}$;

B = {выпадение нечётного числа} = $\{ \omega_1, \omega_3, \omega_5 \}$;

C = {выпадение «5»} = $\{ \omega_5 \}$;

D = {невыпадение «3»} = $\{ \omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6 \}$;

F = {выпадение числа от «3» до «5»} = $\{ \omega_3, \omega_4, \omega_5 \}$;

G = {выпадение числа > 4} = { ω_5, ω_6 };

I = {выпадение числа < 4} = { ω_1, ω_2, ω_3 }.

В зависимости от размерности множества возможных элементарных событий, различают *конечное*, *счётное* и *несчётное* пространство элементарных событий Ω.

В примере 1 пространство элементарных событий Ω является конечным, поскольку включает лишь 6 элементарных событий. В эксперименте с исследованием числа поездов, прибывающих на станцию в течение суток, пространство элементарных событий Ω счётно, т. к. каждому элементарному событию эксперимента можно поставить в однозначное соответствие число натурального ряда. В эксперименте с исследованием времени обслуживания поезда на станции, пространство элементарных событий Ω несчётно, т. к. время обслуживания может принимать любые положительные значения.

Элементарные события, которые образуют случайное событие A, называются *благоприятными* событию A.

В примере 1 элементарные события ω_2, ω_4, ω_6 являются благоприятными событию A, элементарные события ω_1, ω_3, ω_5 – благоприятными событию B и т. д.

В частном случае множество элементарных исходов, благоприятных событию А, может совпадать с пространством элементарных событий Ω или быть пустым множеством Ø.

Достоверным событием называется событие, которое всегда происходит, т. е. совпадающее с пространством элементарных событий Ω.

Невозможным событием называется событие, которое никогда не произойдёт, т. е. совпадающее с пустым множеством.

В примере 1 достоверным событием является случайное событие K = {выпадение числа от «1» до «6»} = Ω, а невозможным событием является, например, случайное событие L = {выпадение числа «7»} = Ø.

1.2 Операции над событиями

Пусть имеется пространство элементарных событий Ω. Будем рассматривать в качестве случайных событий подмножества *A, B, C, ...* этого пространства.

Суммой (объединением) событий A и B называется третье событие A+B $(A \cup B)$, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий A или B. Благоприятными событию $A \cup B$ являются все элементарные события, благоприятные хотя бы одному из событий A или B.

Аналогично определяется *сумма любого числа событий* $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots$.

Произведением (пересечением) событий A и B называется третье событие $AB\,(A \cap B)$, состоящее в одновременном осуществлении событий A и B. Благоприятными событию $A \cap B$ являются все элементарные события, благоприятные одновременно событию A и событию B.

Произведение *любого числа событий* $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots$ состоит в одновременом осуществлении событий A_1, A_2, A_3 и т. д.

Разностью событий A и B называется третье событие *A–B (A\B)*, состоящее в осуществлении события A без осуществления события B. Событие *A\B* состоит из элементарных событий благоприятных событию A, за исключением элементарных событий благоприятных событию B.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в ненаступлении события A. Событию $\overline{A}$ благоприятны все возможные элементарные события пространства элементарных событий Ω, кроме тех, которые благоприятны событию A ($\overline{A} = \Omega \setminus A$).

События A и B называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно, т. е. одновременное осуществление событий A и B есть событие невозможное ($A \cap B = \varnothing$).

События A_1, A_2, A_3, ..., A_n образуют *полную группу* событий, если их сумма составляет пространство элементарных событий Ω ($A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$), т. е. в результате эксперимента хотя бы одно из событий произойдёт.

Пример 2

Рассмотрим операции над событиями, используя условия из примера 1.

а) $A \cup B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega$;

$A \cup C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;

$C \cup I = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$;

$C \cup D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;

$F \cup G = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;

б) $A \cap B = \varnothing$;

$B \cap C = \{\omega_5\}$;

$D \cap F = \{\omega_5, \omega_6\}$;

$G \cap I = \varnothing$;

$C \cap G = \{\omega_5\}$;

в) $A \setminus B = \varnothing$;

$B \setminus C = \{\omega_1, \omega_3\}$;

$D \setminus F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_6\}$;

$G \setminus I = \{\omega_5, \omega_6\} = G$;

$G \setminus C = \{\omega_6\}$;

г) $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = B$;

$\overline{B} = \Omega \setminus B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = A$;

$\overline{C} = \Omega \setminus C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$;

$\overline{D} = \Omega \setminus D = \{\omega_3\}$;

$\overline{F} = \Omega \setminus F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_6\}$;

д) События A и B образуют полную группу событий, т. к. $A \cup B = \Omega$.

Пример 3

E: в прямоугольник (рисунок 1) наудачу бросается точка.

Элементарное событие данного эксперимента – некоторая точка внутри прямоугольника. Пространство элементарных событий Ω (в данном случае – несчётное) – всё множество точек внутри прямоугольника. На множестве Ω определены два события: A=\{выбранная точка лежит внутри круга A\} и B = \{ выбранная точка лежит внутри круга B\}.

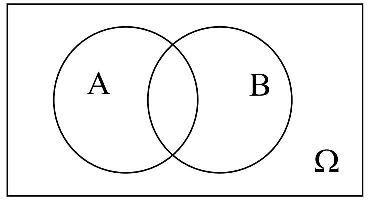
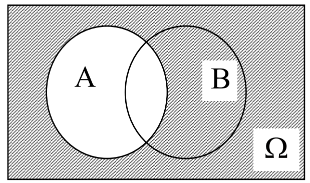
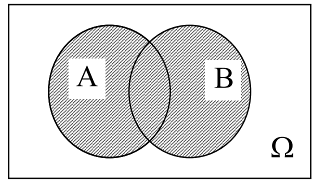


Рисунок 1 – Диаграмма Венна-Эйлера

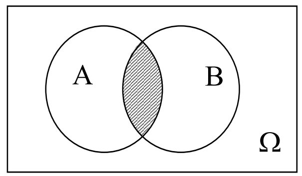
Изобразим области, попадание в которые соответствует осуществлению событий $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$:



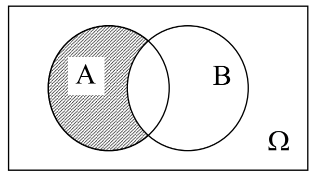
$\overline{A}$



$A \cup B$



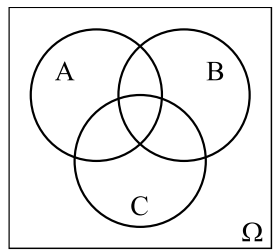
$A \cap B$



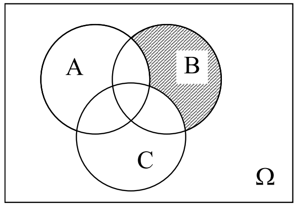
$A \setminus B$

Пример 4

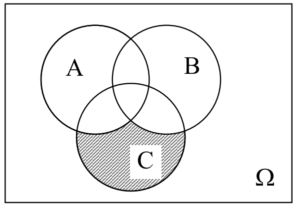
E: в прямоугольник наудачу бросается точка.



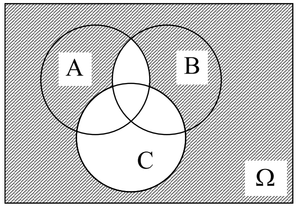
На множестве Ω определены три события: A = {выбранная точка лежит внутри круга A}, B = {выбранная точка лежит внутри круга B}, C = {выбранная точка лежит внутри круга C}. Изобразим области, попадание в которые соответствует осуществлению следующих событий $\overline{A} \cap (B \setminus C)$, $\overline{(A \cup B)} \cap C$, $\overline{A \cap B} \setminus C$, $A \setminus B \cup C$:



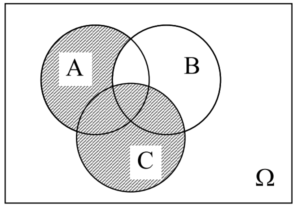
$\overline{A} \cap (B \setminus C)$



$(\overline{A \cup B}) \cap C$



$\overline{A \cap B} \setminus C$



$A \setminus B \cup C$

1.3 Вероятности случайных событий

1.3.1 Относительная частота случайного события

Пусть было проведено n вероятностных экспериментов E, при этом случайное событие A произошло m раз.

Число m называется *частотой* появления случайного события A, а отношение $P^* = \dfrac{m}{n}$ – *относительной частотой (частостью)* случайного события A.

Относительная частота наступления некоторого случайного события не является постоянной величиной, однако она обладает устойчивостью, стремлением к некоторому постоянному числу и колебания её тем меньше, чем больше проведено экспериментов.

1.3.2 Понятие вероятности случайного события. Аксиомы Колмогорова

Вероятностью случайного события A называется числовая функция *P(A)*, определённая на пространстве элементарных событий Ω, характеризующая меру объективной возможности наступления события A и удовлетворяющая для каждого случайного события аксиомам Колмогорова А. Н.

Аксиома 1. $P(A) \geq 0$, т. е. вероятность наступления произвольного случайного события – неотрицательная функция.

Аксиома 2. $P(\Omega) = 1$, т. е. вероятность наступления достоверного события равна 1.

Аксиома 3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$, т. е. вероятность наступления суммы счётного множества попарно несовместных событий A_i, $i = \overline{1,\infty}$ равна сумме вероятностей этих событий.

1.4 Методы вычисления вероятностей

1.4.1 Классический метод вычисления вероятностей

Пусть пространство элементарных событий Ω некоторого вероятностного эксперимента E конечно $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ и все элементарные события равновозможны, т. е. $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n)$.

По *классическому (лапласовскому) методу* вероятность случайного события A равна отношению числа элементарных событий N_A, благоприятных событию A, к общему количеству элементарных событий N пространства элементарных событий Ω, т. е. $\mathrm{P(A)} = \dfrac{N_A}{N}$.

Учитывая, что A и Ω – множества (элементарных событий), можно записать:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{1}$$

где $|A|$ – количество элементарных событий, благоприятных событию A;

$|\Omega|$ – общее количество элементарных событий пространства элементарных событий Ω.

Классический метод вычисления вероятностей имеет следующие *ограничения*:

а) все элементарные события вероятностного эксперимента E должны быть равновозможными, т. е. $P(\omega_i) = P(\omega_j)$, $\forall \overline{i, j}$;

б) множество элементарных событий пространства Ω должно быть конечным, чтобы отношение $|A|/|\Omega|$ не являлось неопределённостью ∞ / ∞.

Пример 5

E: бросается игральная кость.

Найдём вероятности случайных событий из примера 1.

$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{1}{6}$; $P(D) = \frac{5}{6}$; $P(F) = \frac{1}{2}$; $P(G) = \frac{1}{3}$; $P(I) = \frac{1}{2}$.

Пример 6

E: разгрузка вагонов на сортировочной станции.

На сортировочную станцию прибывают вагоны из Минска, Гомеля и Бреста. Предполагая равновозможными все варианты очерёдности разгрузки этих трёх вагонов, найти вероятности следующих случайных событий:

A = {вагон из Гомеля будет разгружен первым};

B = {вагон из Бреста будет разгружен не ранее, чем вагон из Минска}.

Решение. Пространство элементарных событий Ω в данном эксперименте состоит из шести элементарных событий $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Введём условные обозначения элементарных событий по первым буквам названий городов Ω = {ГМБ, ГБМ, МГБ, МБГ, БГМ, БМГ}, где, например, элементарное событие МГБ соответствует такой последовательности разгрузки: из Минска – из Гомеля – из Бреста. Тогда

$$A = \{\text{ГМБ, ГБМ}\},\ P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$B = \{\text{ГМБ, МГБ, МБГ}\},\ P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

1.4.2 Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, изучающий количество комбинаций, подчинённых некоторым условиям.

Лемма 1 (основная лемма комбинаторики)

Из m элементов первого множества $\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{m}\}$ *и n элементов второго множества* $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ *можно составить ровно mn различных упорядоченных пар* (a_i, b_j), *содержащих по одному элементу из каждого множества.*

Пример 7

Рассмотрим две группы элементов: ♠ – пики, ♣ – трефы, ♥ – черви, ♦ – бубны и 6, 7, 8, 9, 10, валет, дама, король, туз. По лемме 1 число пар 4·9 = 36. Это чило равно числу карт в колоде, т. к. каждая карта определяется парой элементов (масть и значение).

Пример 8

На «горном» велосипеде 3 передние и 6 задних звездочек. Сколько скоростей у «горного» велосипеда?

Решение. Так как каждая скорость велосипеда – комбинация одной из 3 передних ($n_1 = 3$) и одной из 6 задних ($n_2 = 6$) звездочек, то количество скоростей на велосипеде равно количеству комбинаций звездочек двух типов и определяется, в соответствии с леммой 1, произведением $n_1 n_2 = 3 \cdot 6 = 18$ скоростей.

Пример 9

E: бросаются две игральные кости.

Определим элементарное событие как пару $\omega = (i, j)$, где i – число очков, выпавших на первой кости, j – число очков, выпавших на второй кости. Тогда i выбирается из группы 1, 2, 3, 4, 5, 6; j выбирается из этой же группы. По лемме 1 число всех элементарных событий (т. е. всевозможных пар (i,j)) $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$.

Лемма 2

Из n_1 элементов первого множества $\{a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_{n1}\}$, n_2 элементов второго множества $\{b_1, b_2,\ \ldots, b_{n2}\}$ и т. д., n_k элементов k-го множества $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{nk}\}$ можно составить ровно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ различных упорядоченных комбинаций $(a_i, b_j,\ \ldots,\ x_s)$, содержащих по одному элементу из каждого множества.

Пример 10

E: бросаются три игральные кости.

Элементарное событие $\omega = (i,\ j,\ k)$, где i – число очков, выпавших на первой кости, j – на второй кости, k – на третьей кости. По лемме 2 число всех элементарных событий (т. е. всевозможных комбинаций (i, j, k)) будет $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$.

Пример 11

Из пункта *A* в пункт *B* проходит 10 дорог, из пункта *B* в пункт *C* – 5 дорог, из пункта *C* в пункт *D* – 6 дорог. При этом все дороги, ведущие из *A* в *D*, проходят сначала через *B*, а затем через *C*. По лемме 2 из пункта *A* в пункт *D* проходит $10 \cdot 5 \cdot 6 = 300$ дорог.

Перестановками называются комбинации *n* различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Количество возможных перестановок *n* различных элементов обозначается $P_n = n!$

Упорядоченными выборками (размещениями) называются комбинации, составленные из *n* различных элементов по *m* элементов, различающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Количество возможных размещений *m* элементов из *n* различных элементов обозначается A_n^m.

Неупорядоченными выборками (сочетаниями) называются комбинации, составленные из *n* различных элементов по *m* элементов, различающиеся только составом элементов. Количество возможных сочетаний *m* элементов из *n* различных элементов обозначается C_n^m.

Упорядоченные и неупорядоченные выборки, элементы которых

могут повторяться, называются соответственно *упорядоченными и неупорядоченными выборками с повторением.* Количество возможных упорядоченных и неупорядоченных выборок *m* элементов из *n* различных элементов с повторением обозначается соответственно $\widetilde{A}_n^m$ и $\widetilde{C}_n^m$.

Таблица 1 - **Числа выборок объёма *m* из множества** $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Выборки	Упорядоченные (размещения)	Неупорядоченные (сочетания)
С повторением (с возвращением)	$\widetilde{A}_n^m = n^m$	$\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$
Без повторения (без возвращения)	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$

Пример 12

Сколькими способами можно расположить три шара, пронумерованных цифрами «1», «2», «3»?

Решение. Поскольку комбинации расположения трёх различных шаров отличаются лишь порядком расположения, то данные комбинации называются перестановками. Перечислим все возможные способы перестановками трёх шаров: «1-2-3», «1-3-2», «2-1-3», «2-3-1», «3-1-2», «3-2-1». Таким образом, количество всевозможных перестановок равно 6.

Пример 13

Перечислить все возможные способы выбора двух шаров из урны с тремя шарами, пронумерованными числами «1», «2», «3».

Таблица 2 - **Способы выбора 2 шаров из урны с 3 пронумерованными шарами**

Выборки	Упорядоченые (размещения)	Неупорядоченные (сочетания)
С повторением (с возвращением)	(1,1) (1,2) (1,3) (2,1) (2,2) (2,3) (3,1) (3,2) (3,3)	(1,1) (1,2) (1,3) (2,2) (2,3) (3,3)
Без повторения (без возвращения)	(1,2) (1,3) (2,1) (2,3) (3,1) (3,2)	(1,2) (1,3) (2,3)

Пример 14

На железнодорожной станции имеются 10 путей. Сколькими способами можно расставить на них три состава?

Решение. Поскольку комбинации расположения трёх различных составов на 10 путях отличаются лишь расположениями, то данные комбинации являются упорядоченными выборками без возвращения. Количество всевозможных размещений в этом случае равно $A_n^m = A_{10}^3 = 720$.

Пример 15

В вагон электрички, делающей 9 остановок, на первой остановке вошли два пассажира. Каждый из них, с одинаковой вероятностью, выходит на любой из остановок, начиная со второй. Найти вероятность того, что оба пассажира выйдут на одной остановке.

Решение. Пусть случайное событие A = {два пассажира выйдут на одной остановке}. По классическому методу $P(A) = \frac{N_A}{N}$, где $N_A = 8$ – число элементарных событий, благоприятных событию A, а $N = \tilde{A}_n^m = n^m = 8^2 = 64$ – число всевозможных элементарных событий пространства Ω. Таким образом, $P(A) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

1.4.3 Геометрический метод вычисления вероятностей

Если пространство элементарных событий Ω вероятностного эксперимента E является несчетным, то для вычисления вероятностей случайных событий может применяться геометрический метод.

Пусть пространство Ω эксперимента E содержит несчетное множество элементарных исходов ω (т. е. $|\Omega| = \infty$) и *их можно трактовать как точки в евклидовом пространстве*, а события эксперимента E – как некоторые ограниченные области этого пространства. Тогда вероятность случайного события A может быть определена выражением

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{2}$$

где $\mu(A)$ – геометрическая мера (длина, площадь, объём) области, соответствующая событию A; $\mu(\Omega)$ – геометрическая мера области, соответствующая пространству элементарных событий Ω.

Пример 16

Простой состава в ожидании осмотра бригадой пункта технического осмотра (ПТО) в парке прибытия сортировочной станции равно возможен в интервале [0; 50 мин]. Простой в ожидании расформирования состава также равновозможен в интервале [0; 40 мин].

Найти вероятность того, что нерегламентированный простой состава в парке прибытия не привысит 20 минут.

Решение. Пространством элементарных событий Ω этого эксперимента является прямоугольник, изображённый на рисунке 5, т. е.

$$\Omega = \{\omega = (x, y) \mid 0 \le x \le 50, 0 \le y \le 40\}.$$

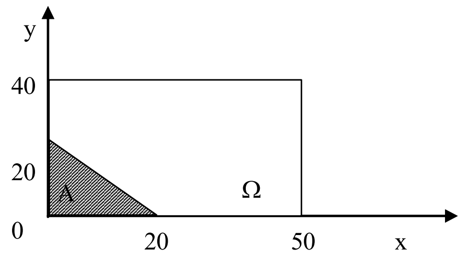


Рисунок 2 – Геометрическая интерпретация вероятностного эксперимента

Событию $A = \{\omega = (x, y) \mid x + y \le 20\}$ ={простой состава не превысит 20 минут} соответствует заштрихованная на рисунке область.

Следовательно,

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{0{,}5 \cdot 20 \cdot 20}{40 \cdot 50} = 0{,}1.$$

Пример 17

Два теплохода должны подойти к одному причалу. Моменты прихода обоих теплоходов независимы и равновозможны в течение суток. Определить вероятность того, что одному из теплоходов придётся ожидать на рейде, пока не освободится причал, если время стоянки теплоходов равно одному часу.

Решение. Пространством элементарных событий Ω этого эксперимента является прямоугольник, изображённый на рисунке 6, т. е.

$\Omega = \{\omega = (x, y) \mid 0 \le x \le 24, 0 \le y \le 24\}$.

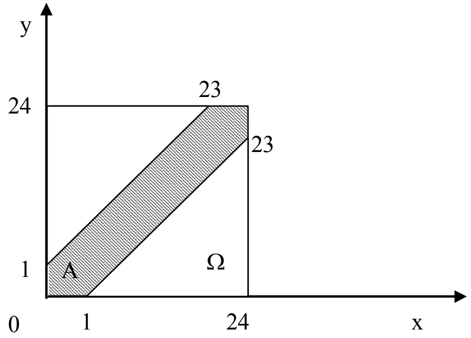


Рисунок 3 – Геометрическая интерпретация вероятностного эксперимента

Событию $A = \{\omega = (x, y) \mid |x - y| \le 1\}$ ={одному из теплоходов придётся ожидать на рейде} соответствует заштрихованная на рисунке область. Следовательно,

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{24^2 - 23^2}{24^2} = \frac{47}{576} \approx 0{,}082 .$$

1.4.4 Статистический и экспертный методы вычисления вероятностей

Кроме классического и геометрического существуют еще два способа определения вероятностей случайных событий: *статистический* и *экспертный*. Статистический способ заключается в оценке вероятности случайного события по результатам многократного воспроизведения вероятностного эксперимента *E*, например, по относительной частоте появления случайного события.

Метод экспертных оценок заключается в опросе мнения некоторого количества экспертов о значении вероятности случайного события. Анализируя полученные значения экспертных оценок, можно получить представление о реальном значении вероятности исследуемого случайного события.

Статистический и экспертный способы оценки вероятностей являются универсальными, однако, предоставляемый с их помощью результат не является точным. Для увеличения достоверности и точности оценки вероятности требуется проведение большего количества повторных экспериментов и привлечение большего числа опытных экспертов.

1.5 Свойства вероятностей случайных событий

Вероятности случайных событий обладают следующими важными свойствами:

Свойство 1. $P(\varnothing) = 0$, т. е. вероятность невозможного события равна 0.

Свойство 2. Если в пространстве Ω, содержащем конечное или счётное множество возможных элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots$ ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots\}$), заданы вероятности элементарных событий $P(\omega_1) = p_1, P(\omega_2) = p_2, \ldots, P(\omega_i) = p_i, \ldots$, то вероятность произвольного события $A = \{\omega_j, \omega_k, \ldots, \omega_l\}$ равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятных событию *A*, т. е. $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$.

Говорят, что событие *A* влечёт событие *B* $(A \subseteq B)$, если все элементарные события ω_i, благоприятные событию *A*, благоприятны событию *B* (рисунок 4).

Свойство 3. Если $A \subseteq B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

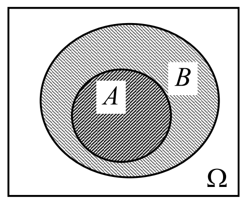


Рисунок 4 – Пример события *A*, которое влечёт событие *B*

Свойство 4 (следствие свойства 3). Если $A \subseteq B$, то $P(B) \leq P(A)$.

Свойство 5. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, т.е. сумма вероятностей противоположных событий равна 1 (рисунок 5).

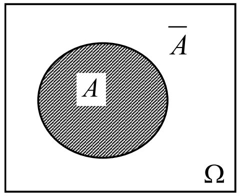


Рисунок 5 – Пример противоположных событий A и $\overline{A}$

Свойство 6. $0 \leq P(A) \leq 1$, т. е. вероятность произвольного случайного события принадлежит отрезку [0,1].

Свойство 7. Вероятность произведения двух несовместных случайных событий равна нулю. То есть, если события A и B несовместны, то $P(A \cap B) = 0$.

Несовместные события $H_1, H_2, \ldots, H_n$, которые образуют полную группу событий, называются *гипотезами*.

Свойство 8. Сумма вероятностей гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ равна единице.

Гипотезы, вероятности которых равны, называются *шансами*.

1.6 Теоремы сложения и умножения вероятностей

1.6.1 Теорема сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей двух событий: Пусть A и B – произвольные случайные события, принадлежащие пространству Ω, тогда вероятность суммы этих событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления (рисунок 6):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{3}$$

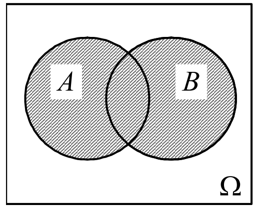


Рисунок 6 – Сумма случайных событий A и B

Следствие. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, т. к. вероятность произведения несовместных событий равна нулю по свойству 7.

Теорема сложения вероятностей трёх произвольных событий:

$$\begin{gathered} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \\ - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{gathered} \tag{4}$$

Пример 18

В подаче вагонов на контейнерную площадку могут находиться четырёхосная платформа с вероятностью 0,35, четырёхосный полувагон с вероятностью 0,5 и шестиосный полувагон с вероятностью 0,15. Найти вероятность того, что выбранный наудачу вагон окажется четырёхосным.

Решение. Пространство элементарных событий Ω этого эксперимента определяется следующим образом:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

где ω_1 – выбранный вагон – четырёхосная платформа; ω_2 – выбранный вагон – четырёхосный полувагон; ω_3 – выбранный вагон – шестиосный полувагон.

Событие A = {выбран четырёхосный вагон} = $\{\omega_1, \omega_2\}$ и, следовательно,

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) = 0{,}35 + 0{,}5 = 0{,}85.$$

1.6.2 Условная вероятность. Независимость событий

Рассмотрим следующий вероятностный эксперимент E. Пусть в пространстве Ω определены случайные события A, B, C, … и их вероятности. Предположим, что в ходе эксперимента E событие A уже произошло. Получение дополнительной информации о ходе эксперимента E может привести к желанию пересмотреть вероятности других событий пространства Ω, связанных с событием A. Ведь логично предположить, что появление события A каким-то образом может изменить вероятность появления событий, связанных (зависимых) с ним.

Событие B называется *зависимым* от события A, если появление (или непоявление) события A изменяет вероятность появления события B. Если наступление события A не изменяет вероятности появления B, событие B называется *независимым* от события A.

Условной вероятностью $P(B \mid A)$ (или $P_A(B)$) называют вероятность наступления события B при условии, что событие A уже произошло.

1.6.3 Теорема умножения вероятностей

Теорема умножения вероятностей двух произвольных событий. Вероятность произведения двух произвольных событий равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого события при условии, что первое уже произошло:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B). \quad (5)$$

Теорема умножения вероятностей трёх произвольных событий:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B). \quad (6)$$

Следствие 1. Если событие A не зависит от B, то и событие B не зависит от A.

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. То есть, если события A и B независимы, то

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (7)$$

Случайные события называются *независимыми в совокупности*, если вероятность наступления каждого из них не изменяется с наступлением любой комбинации остальных событий. Для случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, справедлива следующая теорема умножения вероятностей (необходимое условие независимости в совокупности n случайных событий):

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \quad (8)$$

Замечание – Попарная независимость случайных событий не означает их независимость в совокупности.

Пример 19

Вероятность появления в поезде вагонов на контейнерную площадку – 0,1, на грузовой двор – 0,3, на промышленное предприятие – 0,4. Определить вероятность появления в поезде вагонов на все три направления.

Решение. Обозначим событие A = {в поезде появятся вагоны на все три направления}.

$A = A_1\ A_2\ A_3$, где A_1 ={появление в поезде вагона на контейнерную площадку}, A_2 = {появление в поезде вагона на грузовой двор}, A_3 = {появление в поезде вагона на промышленное предприятие}. Поскольку события A_1, A_2 и A_3 независимы (вагоны появляются в поезде независимо друг от друга),

$$P(A) = P(A_1\ A_2\ A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}012\,.$$

Пример 20

На пути движения локомотива три светофора. Каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение локомотива с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что локомотив сделает три остановки?

Решение. Обозначим событие A = {локомотив сделает три остановки}.

$A = A_1\ A_2\ A_3$, где A_1 = {локомотив сделает остановку на первом светофоре}, A_2 = {локомотив сделает остановку на втором светофоре}, A_3 = {локомотив сделает остановку на третьем светофоре}. Поскольку события A_1, A_2 и A_3 независимы (остановки локомотива на светофорах не зависят друг от друга),

$$P(A) = P(A_1\ A_2\ A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125 .$$

Пример 21

Вероятность прибытия поезда на станцию без опоздания равна 0,95. Найти вероятность того, что четыре последовательно прибывших на станцию поезда опоздали.

Решение. Обозначим событие A = {четыре прибывших на станцию поезда опоздали}.

$A = A_1\ A_2\ A_3$, где A_1 = {опоздает поезд, прибывший первым}, A_2 = {опоздает поезд, прибывший вторым}, A_3 = {опоздает поезд, прибывший третьим}, A_4 = {опоздает поезд, прибывший четвёртым}. Поскольку события A_1, A_2, A_3 и A_4 независимы (поезда опаздывают независимо друг от друга),

$$P(A) = P(A_1\ A_2\ A_3\ A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) =$$
$$= 0{,}05 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05 = 6{,}25 \cdot 10^{-6}.$$

1.7 Формулы полной вероятности и Байеса

1.7.1 Формула полной вероятности

Формула полной вероятности является следствием теорем сложения и умножения вероятностей.

Пусть требуется определить вероятность некоторого случайного события A, которое может произойти только с одной из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Тогда вероятность указанного события можно вычислить по формуле

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} (P(H_i)P(A\,|\,H_i)), \qquad (9)$$

т.е. как сумму произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события A при условии наступления этой гипотезы. В формуле (9) n – число гипотез.

1.7.2 Формула Байеса

Формула Байеса является следствием теорем сложения и умножения вероятностей и формулы полной вероятности. Применяется формула Байеса для переопределения вероятностей гипотез, сопутствующих (предшествующих) некоторому случайному событию A, о котором стало известно, что оно произошло.

Пусть некоторое случайное событие A может произойти только с одной из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Причем известны *априорные* (доопытные) вероятности этих гипотез $P(H_i)$, $i = \overline{1,n}$. Пусть известно, что событие A произошло. Требуется найти *апостериорные* (послеопытные) вероятности гипотез H_i, $i = \overline{1,n}$, т. е. пересчитать вероятности гипотез, сопутствующих (предшествующих) случайному событию A при наличии дополнительной информации о нем. В данном случае для вычисления апостериорных вероятностей гипотез используется формула Байеса:

$$P(H_i\,|\,A) = \frac{P(H_i)P(A\,|\,H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A\,|\,H_i)}{\sum_{i=1}^{n}\left(P(H_i)P(A\,|\,H_i)\right)}, \qquad (10)$$

где $P(H_i\,|\,A)$ – апостериорная (послеопытная) вероятность гипотезы H_i при условии, что событие A произошло; $P(H_i)$ – априорная (доопытная) вероятность гипотезы H_i, $i = \overline{1,n}$; $P(A\,|\,H_i)$ – условная вероятность события A при условии справедливости гипотезы H_i; $P(A) > 0$ – безусловная вероятность случайного события A, определяемая по формуле полной вероятности (9).

Пример 22

Из депо прописки вагон, нуждающийся в ремонте, направлен в одно из трёх ремонтных депо. Производительности этих депо соотносятся как 6:5:4. Вероятности бездефектного ремонта вагонов для первого, второго и третьего депо соответственно равны 0,9, 0,95 и 0,85.

а) Найти вероятность того, что направленый на ремонт из депо прописки вагон будет отремонтирован без дефектов.

б) Известно, что направленный на ремонт из депо прописки вагон был отремонтирован без дефектов. Найти вероятность того, что он подвергался ремонту во втором депо.

Решение. Относительно условий рассматриваемого случайного эксперимента, состоящего в направлении неисправного вагона в одно из ремонтных депо, можно выдвинуть три несовместные гипотезы:

H_1 = {вагон ремонтировался в первом депо};

H_2 = {вагон ремонтировался во втором депо};

H_3 = {вагон ремонтировался в третьем депо}.

Причём $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$.

Согласно условию $P(H_1) : P(H_2) : P(H_3) = 6 : 5 : 4$.

Учитывая свойство вероятностей гипотез $P(H_1) + P(H_2) +$ $+ P(H_3) = \Omega$, определим:

$$P(H_1) = \frac{6}{15}; \; P(H_2) = \frac{5}{15}; \; P(H_3) = \frac{4}{15}.$$

Условные вероятности события A = {вагон отремонтирован без дефектов} при осуществлении этих гипотез известны:

$$P(A \mid H_1) = 0{,}9; \; P(A \mid H_2) = 0{,}95; \; P(A \mid H_3) = 0{,}85.$$

а) Для определения вероятности события A воспользуемся формулой полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) =$$

$$= \frac{6}{15} \cdot 0{,}9 + \frac{5}{15} \cdot 0{,}95 + \frac{4}{15} \cdot 0{,}85 \approx 0{,}903.$$

б) Для определения вероятности того, что вагон подвергался ремонту во втором депо, при условии, что он был отремонтирован без дефектов, воспользуемся формулой Байеса

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{\sum_{i=1}^{3} \left(P(H_i)P(A \mid H_i) \right)} = \frac{\frac{5}{15} \cdot 0{,}95}{0{,}903} = 0{,}351.$$

О т в е т: а) вероятность того, что направленный на ремонт из депо прописки вагон будет отремонтирован без дефектов, равна 0,903;

б) вероятность того, что вагон подвергался ремонту во втором депо, при условии, что он был отремонтирован без дефектов, равна 0,351.

Пример 23

На сортировочную станцию прибывают полувагоны, платформы и крытые вагоны с вероятностями соответственно 0,25, 0,3, 0,45. Вероятность неисправности полувагона равна 0,02, платформы – 0,015, крытого вагона – 0,01.

а) Найти вероятность того, что поступивший на осмотр в парк приёма вагон окажется неисправным.

б) Поступивший на осмотр в парк приёма вагон оказался неисправным. Найти вероятность того, что этот вагон является платформой.

Решение. Относительно условий рассматриваемого случайного эксперимента, состоящего в направлении вагонов на осмотр в парк приёма, можно выдвинуть три несовместные гипотезы:

H_1 = {поступивший в парк вагон является полувагоном};

H_2 = {поступивший в парк вагон является платформой};

H_3 = {поступивший в парк вагон является крытым вагоном}.

Причём $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$.

Согласно условию $P(H_1) = 0{,}25; \; P(H_2) = 0{,}3; \; P(H_3) = 0{,}45$.

Условные вероятности события A = {поступивший вагон окажется неисправным} при осуществлении этих гипотез известны:

$$P(A \mid H_1) = 0{,}02; \; P(A \mid H_2) = 0{,}015; \; P(A \mid H_3) = 0{,}01.$$

а) Для определения вероятности события A воспользуемся формулой полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) =$$
$$= 0{,}25 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}015 + 0{,}45 \cdot 0{,}01 = 0{,}014.$$

б) Для определения вероятности того, что поступивший на осмотр вагон является платформой, при условии, что он был неисправным, воспользуемся формулой Байеса

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{\sum_{i=1}^{3}\big(P(H_i)P(A \mid H_i)\big)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}015}{0{,}014} = 0{,}3214.$$

Ответ: а) вероятность того, что поступивший на осмотр в парк приёма вагон окажется неисправным, равна 0,014;

б) вероятность того, что поступивший на осмотр в парк приёма вагон оказался неисправным, при условии, что этот вагон является платформой, равна 0,3214.

1.8 Последовательность независимых испытаний

1.8.1 Последовательность независимых испытаний. Испытания Бернулли. Схема Бернулли

Повторные испытания называются *независимыми*, если вероятности их исходов не зависят от исходов предшествующих испытаний. Например, многократное подбрасывание кубика, стрельба по мишеням (если считать вероятность попадания неизменной), безотказная работа однотипных устройств, эксплуатируемых в одинаковых условиях.

Испытаниями Бернулли называются повторные независимые испытания, в каждом из которых возможны два исхода (условно именуемые "успехом" и "неудачей"), вероятности которых не меняются от испытания к испытанию. Примерами испытаний Бернулли являются: многократное подбрасывание монеты (успех – выпадение герба); стрельба по мишеням в биатлоне (если считать вероятность попадания неизменной); проверка автобусов перед выходом на линию (успех – автобус исправен).

Вероятность успеха в каждом испытании Бернулли будем обозначать символом p $(P(\text{успех}) = P(\text{у}) = p)$, а вероятность неудачи – символом q $(P(\textit{неудача}) = P(\text{н}) = q)$. Естественно, что $p + q = 1$, как сумма вероятностей противоположных событий.

Схемой Бернулли называется проведение заранее определенного числа n испытаний Бернулли. Примером схемы Бернулли является проверка 10 автобусов перед выходом на линию.

1.8.2 Формула Бернулли

Пусть проведено n испытаний Бернулли. Тогда исход этой серии экспериментов можно представить в виде комбинации исходов каждого эксперимента серии:

$$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}, \tag{11}$$

где $\omega_i = \begin{cases} \text{"у"}, & \text{если в } i\text{-м испытании произошёл успех;} \\ \text{"н"}, & \text{если в } i\text{-м испытании произошла неудача.} \end{cases}$

Обозначим через m количество успехов в n испытаниях Бернулли. Тогда вероятность того, что в n испытаниях Бернулли произойдёт ровно k успехов, определяется формулой

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (k = \overline{0,n}). \tag{12}$$

Формула (12) называется *формулой Бернулли*.

1.8.3 Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли

Наиболее вероятным числом успехов в схеме Бернулли называется число k_0, для которого справедливо следующее двойное неравенство:

$$P_n(k_0 - 1) \le P_n(k_0) \le P_n(k_0 + 1), \tag{13}$$

т. е. вероятность появления именно k_0 успехов в n испытаниях не меньше вероятности появления меньшего или большего числа успехов, чем k_0.

Иначе, наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли определяется следующим двойным неравенством:

$$np - q \le k_0 \le np + p. \tag{14}$$

Пример 24

На автобазе имеется десять автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8.

Найти: а) вероятность того, что в определенный день на линию выйдут 9 автомашин; б) вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее восьми автомашин; в) наивероятнейшее число вышедших на линию автомашин и соответствующую этому числу вероятность.

Решение. Предполагая, что выходы машин на линию осуществляются независимо друг от друга, условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 10$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события A = {выход автомашины на линию} равна 0,8. То есть $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$.

а) Для определения вероятности того, что в определенный день на линию выйдут 9 из 10 машин автобазы, воспользуемся формулой Бернулли

$$P_{10}(9) = C_{10}^{9} p^9 q^1 = \frac{10!}{9!1!} \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2^1 = 10 \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2^1 \approx 0{,}2684 .$$

б) Введем в рассмотрение событие B = {нормальная работа автобазы}. Тогда

$$P(B) = P_{10}(k \geq 8) = P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) = 0{,}2718 + 0{,}2684 + \\ + 0{,}1074 = 0{,}6476;$$

$$P_{10}(8) = C_{10}^{8} p^8 q^2 = \frac{10!}{8!2!} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 = 10 \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}2718 ;$$

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10} p^{10} q^0 = \frac{10!}{10!0!} \cdot 0{,}8^{10} \cdot 0{,}2^0 = 1 \cdot 0{,}8^{10} \cdot 1 \approx 0{,}1074 .$$

в) Наивероятнейшее число k_0 вышедших на линию автомашин найдем по формуле $np - q \leq k_0 \leq np + p$. Отсюда $7{,}8 \leq k_0 \leq 8{,}8$. Единственное целое число k_0, удовлетворяющее этому двойному неравенству $k_0 = 8$, $P_{10}(8) \approx 0{,}2718$. Этому значению k_0 соответствует наибольшее значение вероятности $P_{10}(8)$.

1.8.4 Предельная теорема Пуассона

Формула Бернулли позволяет точно определить вероятность появления k успехов в n испытаниях Бернулли. Однако при $n \to \infty$ $(n >> 50)$ применение формулы Бернулли осложнено вычислением больших факториалов и значительными вычислительными

погрешностями, связанными с возведением в большую степень чисел, близких к нулю. В данном случае для вычисления вероятности появления k успехов в n испытаниях Бернулли следует использовать специальные предельные теоремы, рассматриваемые ниже.

Пусть число экспериментов Бернулли велико $(n \to \infty)$, а вероятность успеха в каждом из них мала $(p \to 0,\ p < 0{,}1)$ таким образом, что произведение $np = \lambda = \text{const}$ не мало и не велико; тогда вероятность появления ровно k успехов в n испытаниях Бернулли:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ np = \lambda}} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} . \tag{15}$$

Замечание 1 – Предельная теорема Пуассона позволяет приближенно вычислять вероятность появления ровно k маловероятных успехов в большом количестве экспериментов. Она тем точнее, чем меньше вероятность успеха и чем больше проводится испытаний Бернулли.

Замечание 2 – Предельная теорема Пуассона может применяться и в случае, если p велико $((1 - p) \to 0)$. Для этого следует поменять местами понятия “успеха” и “неудачи”. В случае, когда вероятность успеха близка к 0,5, для вычисления вероятности $P_n(k)$ применяется локальная предельная теорема Муавра-Лапласа, рассматриваемая ниже.

Пример 25

В порту каждые сутки может появиться одно большегрузное судно с вероятностью $p = \frac{1}{6}$. Вероятность появления более одного судна в течение суток пренебрежимо мала. Какова вероятность того, что за месяц (30 дней) порт посетят не более 4 судов?

Решение. Предполагая, что суда появляются в порту независимо друг от друга, условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 30$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события A = {судно прибывает в порт} равна $\frac{1}{6}$. Для нахождения вероятности $P_n(k \leq 4)$ воспользуемся предельной теоремой Пуассона

$$P_n(k \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} P_n(k) = \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-5} 5^k}{k!} = 0{,}4405 .$$

1.8.5 Предельные теоремы Муавра-Лапласа

Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Если в схеме Бернулли $0 < p < 1$, то при $n \to \infty$ справедлива следующая теорема:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ 0<p<1}} P_n(k)\frac{\sqrt{npq}}{\varphi(x_k)} = 1,$$

где $\varphi(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}$ – функция плотности стандартного нормального распределения (рисунок 7), (значения функции $\varphi(x_k)$ определяются по таблице из приложения А); $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

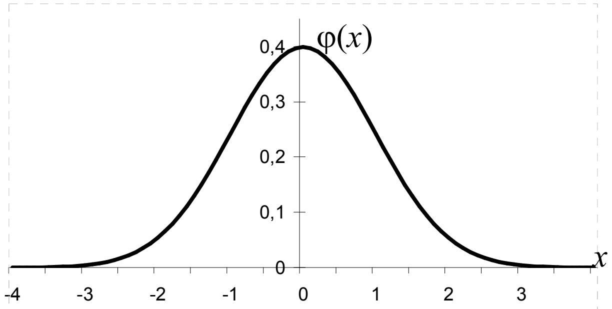


Рисунок 7 – Функция плотности стандартного нормального распределения

Следствие 1. При больших n вероятность появления ровно k успехов в n испытаниях Бернулли определяется приближенным выражением

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{npq}}. \qquad (16)$$

Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа. Если в схеме Бернулли $0 < p < 1$, а $n \to \infty$, тогда для любых k_1 и k_2, таких, что $0 \le k_1 < k_2 \le 1$, справедлива следующая теорема:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ 0<p<1}} (P(k_1 \le m \le k_2) - \Phi(x_2) + \Phi(x_1)) = 0,$$

где $\Phi(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_i} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа (рисунок 8);

$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = \overline{1,2}$.

Следствие 2. При больших значениях n вероятность того, что число успехов m в серии n испытаний Бернулли будет принадлежать отрезку $[k_1; k_2]$, определяется приближенным выражением

$$P_n(k_1, k_2) = P(k_1 \le m \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \qquad (17)$$

Замечание 1 – Непосредственное вычисление значения функции Лапласа затруднено (интеграл является неберущимся), поэтому значения функции Лапласа табулированы и представлены в приложении Б. При использовании таблицы следует учитывать, что функция Лапласа – нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; при $x > 4$ функция Лапласа принимает значения, близкие к 0,5 (см. рисунок 8).

Замечание 2 – Теоремы Муавра-Лапласа позволяют получать приближенное значение искомой вероятности, однако оно тем точнее, чем ближе вероятность успеха p к 0,5 и чем больше проводится испытаний Бернулли n.

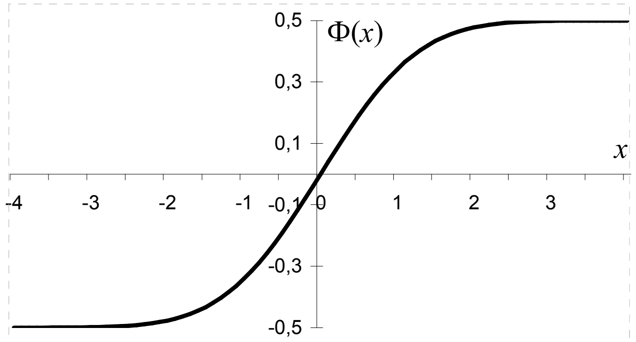


Рисунок 8 – Функция Лапласа

Пример 26

Депо производит ремонт вагонов. Вероятность того, что ремонт будет произведён со сдачей с первого предъявления, равна 0,6. Найти вероятность того, что из 100 вагонов, отремонтированных в депо:

а) ровно 80 вагонов будут сданы с первого предъявления;

б) от 40 до 60 вагонов будут сданы с первого предъявления.

Решение. Предполагая, что проверка качества ремонта вагонов осуществляется независимо друг от друга, условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 100$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность “успеха” {ремонт произведён со сдачей с первого предъявления} равна 0,6. То есть $p = 0{,}6$, $q = 1 - p = 0{,}4$.

а) Для вычисления вероятности события A = {ровно 80 вагонов будут сданы с первого предъявления} воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P(A) = P_{100}(80) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}6}{\sqrt{100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \approx 4{,}08.$$

По таблицам значений функции стандартного нормального распределения

$$\varphi(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}$$

находим, что $\varphi(x) \approx 0$. Следовательно, вероятность интересующего нас события $P(A) = P_{100}(80) \approx 0$.

б) Для вычисления вероятности события B = {от 40 до 60 вагонов будут сданы с первого предъявления} воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P(B) = P_{100}(40 \le m \le 60) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{60 - 100 \cdot 0{,}6}{\sqrt{100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = 0, \quad x_2 = \frac{40 - 100 \cdot 0{,}6}{\sqrt{100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -4{,}08.$$

По таблицам значений функции Лапласа

$$\Phi(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_i} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

находим, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(-4{,}08) = -0{,}49997$.

Отсюда $P(B) = P_{100}(40 \le m \le 60) = \Phi(0) - \Phi(-4{,}08) = 0 + 0{,}49997$.

2 ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Понятие случайной величины

Случайной величиной называется функция $\xi = \xi(\omega)$, которая каждому элементарному исходу ω пространства элементарных событий Ω вероятностного эксперимента E ставит в соответствие некоторое действительное число x.

Таким образом, областью определения случайной величины ξ является пространство элементарных исходов Ω, а областью значений – множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ (рисунок 9).

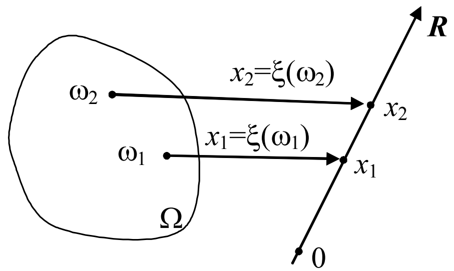


Рисунок 9 – Схема случайных величин

Пусть, например, в эксперименте с подбрасыванием монеты определена функция

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если выпал герб}, \\ 1, & \text{если – решка}. \end{cases}$$

Тогда $\xi = \xi(\omega)$ является случайной величиной.

Пример 27

Функция $\xi = \xi(\omega)$, определяющая число очков на верхней грани игральной кости, также является случайной величиной. Здесь элементарными исходами являются: $\omega_i = \{$выпадение на кости i числа очков$\}$, $i = \overline{1,6}$. Пространство элементарных событий данного вероятностного эксперимента: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

В данном случае случайная величина ξ – число точек на верхней грани игральной кости определяется функцией $\xi = \xi(\omega_i) = i$, $i = \overline{1,6}$.

Из приведенных выше определений следует, что *случайная величина* – величина, которая в результате эксперимента обязательно принимает некоторое единственное значение, однако, заведомо неизвестное.

Примерами случайных величин являются: число составов, прибывших в течение суток на станцию; время простоя вагонов в ожидании разгрузки; масса топлива, израсходованного в течение суток и т. д.

Замечание – Условимся обозначать случайные величины малыми греческими буквами: $\xi, \eta, \ldots$, а их значения – малыми латинскими буквами: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$.

В зависимости от количества возможных значений случайные величины разделяются на два класса: дискретные и непрерывные.

Дискретной называется случайная величина ξ, которая в результате эксперимента E может принимать только определенные изолированные друг от друга значения. Множество значений дискретной случайной величины, определяемое пространством Ω, конечно или счетно.

Примерами дискретных случайных величин являются: число вагонов, прибывших в течение суток в депо для проверки; число бракованных деталей, изготовленных в течение смены; число успешно сданных экзаменов и т. д.

Непрерывной называется случайная величина ξ, которая в результате эксперимента может принимать все значения из некоторого промежутка или всей числовой оси. Множество значений непрерывной случайной величины, определяемое пространством Ω, несчетно.

Примерами непрерывных случайных величин являются: время простоя вагонов в ожидании разгрузки; масса топлива, израсходованного в течение суток и т. д.

2.2 Закон распределения случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины ξ называется правило, которое каждому возможному значению x величины ξ ставит в соответствие вероятность появления данного значения. Закон распределения полностью характеризует случайную величину ξ с вероятностной точки зрения, т. е. определяет множество значений, которое может принимать величина, и то, с какими вероятностями величина ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots$.

Закон распределения случайной величины ξ может быть задан таблично, графически и аналитически (таблица 3).

Таблица 3 – **Способы задания законов распределения случайных величин**

Табличный	Графический		Аналитический		
Ряд распределения	Столбцовая диаграмма	Многоугольник распределения	Непосредственная формула $P(\xi = x_i)$	Функция распрделения $F(x)$	Функция плотности распределения $f(x)$
ДСВ	ДСВ	ДСВ	ДСВ	ДСВ, НСВ	НСВ

Рядом распределения называется таблица, в которой непосредственно указаны возможные значения случайной величины ξ $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ и соответствующие им вероятности p_i (таблица 4). Причем $p_i > 0, \ \sum_i p_i = 1$.

Таблица 4 – **Ряд распределения дискретных случайных величин**

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$P(\xi = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Для наглядности ряд распределения случайных величин можно представить графически. По оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности соответствующих значений (рисунок 10).

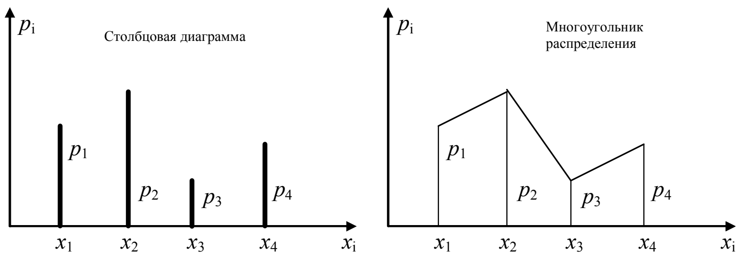


Рисунок 10 – Графические способы задания законов распределения дискретной случайной величины

2.3 Функция распределения случайной величины. Свойства функции распределения

Универсальным способом задания закона распределения произвольной случайной величины является функция распределения.

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины ξ в точке x называется вероятность того, что величина ξ примет значение м е н ь ш е x, т. е. функция распределения определяет вероятность события $\{\xi < x\}$:

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{18}$$

Функция распределения произвольной случайной величины ξ обладает следующими свойствами:

Свойство 1. $F(x) \geq 0$, т. е. функция распределения – неотрицательная функция.

Свойство 2. $F(-\infty) = 0$.

Свойство 3. $F(\infty) = 1$.

Свойство 4. Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$, т. е. функция распределения – неубывающая функция.

Свойство 5. Если $x_1 < x_2$, то $P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_1) - F(x_2)$, т. е. вероятность того, что случайная величина примет значение, принад-

лежащее полуинтервалу $[x_1, x_2)$, равна приращению функции распределения на этом полуинтервале.

Свойство 6. $F(x-0) = F(x)$, т. е. функция распределения непрерывна слева.

Замечание – У дискретных случайных величин функция распределения является разрывной ступенчатой функцией (имеет разрывы в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины); у непрерывных величин функция распределения непрерывна на всей числовой оси.

Пример 28

В депо для проверки, независимо друг от друга, поступают полувагон, платформа и крытый вагон. Вероятности поступления в течение заданного интервала времени t для них соответственно равны: 0,6, 0,7 и 0,75. Рассматривается случайная величина ξ – число вагонов, поступивших на проверку в депо в течение времни t. Построить ряд распределения и вычислить функцию распределения данной случайной величины ξ.

Решение. Возможные значения данной случайной величины ξ: 0, 1, 2, 3. Запишем их в верхней строке ряда распределения. Для определения вероятностей возможных значений данной случайной величины введём в рассмотрение события: $A_i =$ {поступление в депо в течение времени t i-го вагона}, $(i = \overline{1,3})$; $B_j =$ {поступление в депо j вагонов в течение времени t}, $(j = \overline{1,3})$. Событие B_j можно представить в виде:

$B_0 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$;

$B_1 = A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$;

$B_2 = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cup A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cup \overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3$;

$B_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий, вычисляем:

$P(\xi = 0) = P(B_0) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}03$;

$P(\xi=1)=P(B_1)=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+$
$+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)=0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}25+0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}25+0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}75=$
$=0{,}205;$
$P(\xi=2)=P(B_2)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})+P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)+$
$+P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)=0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}25+0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}75+0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}75=$
$=0{,}45;$
$P(\xi=3)=P(B_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}75=0{,}315$.

Таким образом, ряд распределения случайной величины ξ имеет вид:

x_i	0	1	2	3
$P(\xi=x_i)$	0,03	0,205	0,45	0,315

Убедимся, что $\sum\limits_{i=1}^{4}p_1=\sum\limits_{i=1}^{4}P(\xi=x_i)=1$.

Столбцовая диаграмма и многоугольник распределения, представляющие ряд распределения этой случайной величины, изображены соответственно на рисунке 11, *а*, *б*.

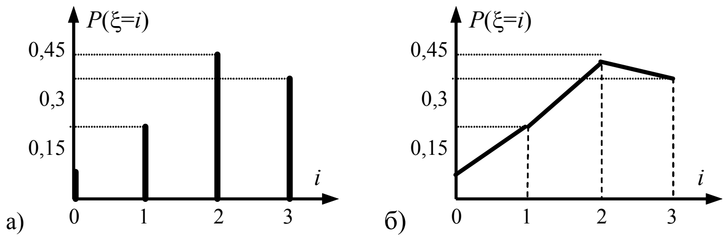


Рисунок 11 – Графические способы задания законов распределения дискретной случайной величины

Определим значение функции распределения $F(x)=P(\xi<x)$ для всех возможных значений *x*:
при $x\in(-\infty;0]$, $F(x)=P(\xi<0)=0$;
при $x\in(0;1]$, $F(x)=P(\xi=0)=0{,}03$;
при $x\in(1;2]$, $F(x)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=0{,}03+0{,}205=0{,}235$;
при $x\in(2;3]$, $F(x)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)=$

$=0{,}03+0{,}205+0{,}45=0{,}685$;
при $x\in[3;+\infty)$, $F(x)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)=$
$=0{,}03+0{,}205+0{,}45+0{,}315=1$.

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0; & \text{при } x\in(-\infty;0];\\ 0{,}03; & \text{при } x\in(0;1];\\ 0{,}235; & \text{при } x\in(1;2];\\ 0{,}685; & \text{при } x\in(2;3];\\ 1; & \text{при } x\in(3;+\infty).\end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображён на рисунке 12.

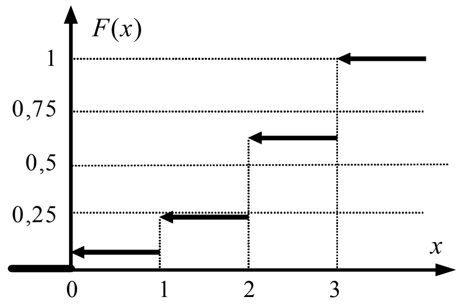


Рисунок 12 – График функции *F(x)*

2.4 Функция плотности распределения непрерывной случайной величины. Свойства функции плотности распределения

Рассмотрим непрерывную случайную величину ξ. На основании свойства 5 функции распределения (см. подразд. 2.3), найдем вероятность попадания величины ξ в полуинтервал $[x_1, x_1+\Delta x)$:

$$P(x_1\le\xi<x_1+\Delta x)=F(x_1+\Delta x)-F(x_1).$$

Разделим обе части равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x\to0$:

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{P(x_1\le\xi<x_1+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{F(x_1+\Delta x)-F(x_1)}{\Delta x}=F'(x_1)=f(x_1).$$

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю – есть производная функции распределения $F(x)$ в точке x_1. Эту производную принято называть *функцией плотности распределения* (дифференциальной функцией распределения) случайной величины ξ и обозначать $f(x)$. Таким образом, *функция плотности распределения* непрерывной величины ξ в точке x характеризует вероятность попадания значения случайной величины ξ в окрестность точки x, отнесенную к величине данной окрестности Δx:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = F'(x). \qquad (19)$$

Вероятностный смысл функции $f(x)$ заключается в том, что она указывает, насколько вероятно значения непрерывной случайной величины ξ попадут в окрестность точки x.

Функция плотности распределения произвольной случайной величины ξ обладает следующими свойствами:

Свойство 1. $f(x) \ge 0$, т. е. функция плотности распределения – неотрицательная функция.

Свойство 2. $f(x) = F'(x)$.

Свойство 3. $P(x_1 \le \xi < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Свойство 4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Свойство 5. $\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = F(x_1)$.

Замечание 1 – Вероятность того, что *непрерывная* случайная величина примет значение x_1, равна нулю, т. е. $P(\xi = x_1) = 0$. Вместе с тем, событие $\{\xi = x_i\}$ не является невозможным. Данное замечание может быть объяснено тем, что множество возможных значений непрерывной случайной величины несчетно, следовательно, принятие одного из них – есть практически невозможное событие.

Замечание 2 – На основании предыдущего замечания, для непрерывной величины ξ события $\{\xi \le x_1\}$ и $\{\xi < x_1\}$, а также их вероятности будем отождествлять. Аналогично для событий $\{\xi \ge x_1\}$ и $\{\xi > x_1\}$.

Замечание 3 – Приведем еще одно определение понятия непрерывной случайной величины. *Непрерывной* называется случайная величина, функция распределения которой непрерывна и определяется выражением $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Замечание 4 – Функция плотности распределения определена только для непрерывных случайных величин.

2.5 Числовые характеристики случайных величин

2.5.1 Характеристики положения

Случайные величины в вероятностном смысле полностью характеризуются законами распределения. Однако на практике знание закона распределения случайной величины часто оказывается излишним. Иногда бывает достаточным знать лишь отдельные числовые параметры, характеризующие существенные черты закона распределения исследуемой случайной величины или некоторые ее характерные значения.

Характеристики, выражающие в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайной величины, называются *числовыми характеристиками* случайной величины. Все числовые характеристики случайных величин разделяют на характеристики положения, рассеяния, характеристики асимметрии и эксцесса (таблица 5).

Таблица 5 – **Числовые характеристики случайных величин**

Характеристика			
положения	рассеяния	асимметрии	эксцесса
▪ математическое ожидание ▪ мода ▪ медиана ▪ квантили	▪ среднее квадратическое отклонение ▪ дисперсия ▪ коэффициент вариации	▪ коэффициент асимметрии	▪ коэффициент эксцесса

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число $M[\xi]$, характеризующее среднее значение случайной величины с учётом вероятностей её значений. Математическое ожидание дискретной случайной величины ξ вычисляется по формуле

$$M[\xi]=\sum_{i=1}^{n}x_iP(=x_i), \tag{20}$$

а непрерывной случайной величины ξ – по формуле

$$M[\xi]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx, \tag{21}$$

если соответствующая сумма или интеграл сходятся абсолютно. В противном случае говорят, что математическое ожидание у случайной величины ξ отсутствует.

Геометрический смысл математического ожидания заключается в том, что $M[\xi]$ «уравновешивает» систему «балок», соответствующую столбцовой диаграмме дискретной случайной величины (рисунок 13, *а*), или криволинейную трапецию, образованную функцией плотности распределения непрерывной случайной величины (рисунок 13, *б*), поэтому математическое ожидание называют также средневзвешенным (взвешенным по вероятностям) значением случайной величины ξ.

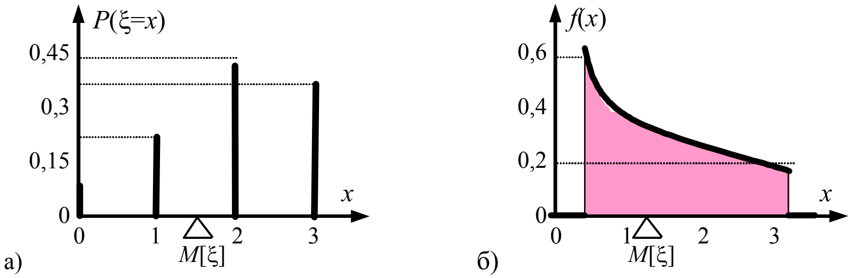


Рисунок 13 – Геометрический смысл математического ожидания

Математическое ожидание произвольной случайной величины обладает следующими свойствами.

Свойство 1. $M[\alpha]=\alpha$, где $\alpha-$const.

Свойство 2. $M[\alpha\xi]=\alpha M[\xi]$, где $\alpha-$ const, ξ – произвольная случайная величина.

Свойство 3. $M[\xi+\eta]=M[\xi]+M[\eta]$, где ξ и η – произвольные случайные величины.

Свойство 4. $M[\xi-\eta]=M[\xi]-M[\eta]$, где ξ и η – произвольные случайные величины.

Свойство 5. $M[\xi\eta]=M[\xi]M[\eta]+M[(\xi-M[\xi])(\eta-M[\eta])]=$ $=M[\xi]M[\eta]+\mu_{\xi\eta}$, где ξ и η – произвольные случайные величины, $\mu_{\xi\eta}$ – *корреляционный момент* случайных величин ξ и η.

Свойство 6. $M[\xi\eta]=M[\xi]M[\eta]$, где ξ и η – независимые случайные величины.

Свойство 7. Если $P(\alpha\le\xi\le\beta)=1$, то $M[\xi]\in[\alpha,\beta]$, т. е. математическое ожидание произвольной случайной величины ξ принадлежит интервалу между минимальным и максимальным возможными значениями случайной величины ξ.

Мода – наиболее вероятное значение случайной величины ξ, обозначаемое $Mod[\xi]$. Моду дискретной случайной величины ξ определяют графически по столбцовой диаграмме, как абсциссу столбца, имеющего наибольшую высоту (рисунок 14, *а*). В примере 28 наиболее вероятным числом вагонов, поступивших на проверку в депо, является число 2, следовательно, $Mod[\xi]=2$. Моду непрерывной величины определяют как значение величины, в котором функция плотности распределения $f(x)$ имеет максимум (рисунок 14, *б*).

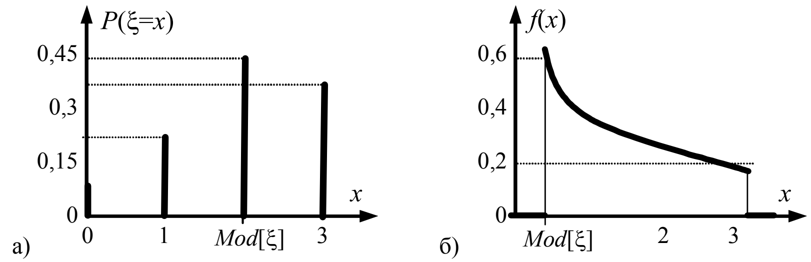


Рисунок 14 – Определение моды случайных величин

Замечание 1 – Некоторые случайные величины могут не иметь моды (все значения равновероятны) или иметь несколько мод. В этом случае распределение случайной величины называют полимодальным.

Медианой называется значение случайной величины ξ, обозначаемое $Med[\xi]$ и для которого $P(\xi < Med[\xi]) = P(\xi > Med[\xi]) = 0{,}5$, т. е. величина ξ одинаково вероятно примет значение, меньшее или большее медианы, поэтому медиану называют средневероятным значением случайной величины ξ. Учитывая определение функции распределения (18), $F(Med[\xi]) = P(\xi < Med[\xi]) = 0{,}5$.

Замечание 2 – Медиана определена лишь для непрерывных случайных величин. Для дискретных случайных величин множество значений *x*, удовлетворяющих свойству медианы $F(Med[\xi]) = 0{,}5$, либо бесконечно, либо является пустым.

Геометрический смысл медианы заключается в том, что прямая $x = Med[\xi]$ делит площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции плотности непрерывной случайной величины ξ и осью абсцисс, пополам (рисунок 15). Учитывая, что площадь указанной криволинейной трапеции равна единице (см. свойство 4. $f(x)$), $S_1 = S_2 = 0{,}5$.

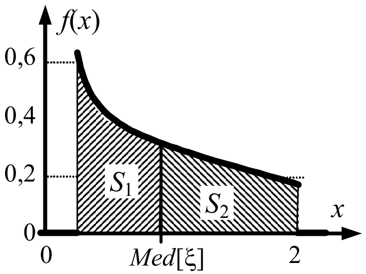


Рисунок 15 – Геометрический смысл медианы

Квантилью распределения случайной величины ξ уровня α называется значение *x* величины ξ, для которого выполняется равенство $F(x) = 1 - \alpha$, т. е. вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее, чем *x*, равна $1 - \alpha$. Квантили распределения случайной величины ξ уровней 0,25 и 0,75 называются *квартилями*. Квантиль распределения непрерывной случайной величины ξ уровня 0,5 является медианой данной величины.

2.5.2 Характеристики рассеяния

Дисперсией случайной величины ξ называется число $D[\xi]$, характеризующее меру рассеяния значений случайной величины вокруг ее математического ожидания и равное математическому ожиданию квадрата отклонения значений случайной величины ξ от $M[\xi]$:

$$D(\xi) = M[(\xi - M[\xi])^2] = M[\xi^2] - M^2[\xi]. \tag{22}$$

Дисперсия дискретной случайной величины определяется по формуле (23), а непрерывной – по формуле (24):

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P(\xi = x_i) - M^2[\xi], \tag{23}$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2[\xi]. \tag{24}$$

Дисперсия произвольной случайной величины обладает следующими свойствами.

Свойство 1. $D(\xi) \ge 0$, т. е. дисперсия произвольной случайной величины ξ – неотрицательна.

Свойство 2. $D(\alpha) = 0$, где $\alpha -$ const. То есть дисперсия неслучайной величины равна нулю.

Свойство 3. $D[\alpha\xi] = \alpha^2 D[\xi]$, где $\alpha -$ const, ξ – произвольная случайная величина.

Свойство 4. $D[\xi \pm \eta] = D[\xi] + D[\eta] \pm 2\mu_{\xi\eta}$, где ξ и η – произвольные случайные величины, $\mu_{\xi\eta} = M[(\xi - M[\xi])(\eta - M[\eta])]$ – *корреляционный момент* случайных величин ξ и η.

Свойство 5. $D[\xi \pm \eta] = D[\xi] + D[\eta]$, где ξ и η – независимые случайные величины.

Свойство 6. $D[\alpha \pm \xi] = D[\xi]$, где $\alpha -$ const, ξ – произвольная случайная величина.

Свойство 7. $D[\xi\eta] = D[\xi]D[\eta] + M^2[\xi]D[\eta] + D[\xi]M^2[\eta]$, где ξ и η – независимые случайные величины.

Свойство 8. Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата размерности случайной величины. Так, если случайная величина имеет размерность “час”, то дисперсия данной величины – “час^2”.

Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называется число $\sigma[\xi]$, равное положительному значению квадратного корня из дисперсии, т. е. $\sigma[\xi] = +\sqrt{D[\xi]}$. Таким образом, среднее квадратическое отклонение $\sigma[\xi]$ имеет размерность, равную размерности случайной величины ξ. Среднее квадратическое отклонение $\sigma[\xi]$, как и дисперсия, характеризует степень разброса значений случайной величины ξ вокруг $M[\xi]$; чем больше разброс, тем больше $D[\xi]$ и $\sigma[\xi]$ (рисунок 16).

Коэффициентом вариации случайной величины ξ называется число $V[\xi]$, определяемое выражением $V[\xi] = \dfrac{\sigma[\xi]}{M[\xi]}$, характеризующее, насколько хорошо математическое ожидание $M[\xi]$ представляет ряд возможных значений случайной величины ξ.

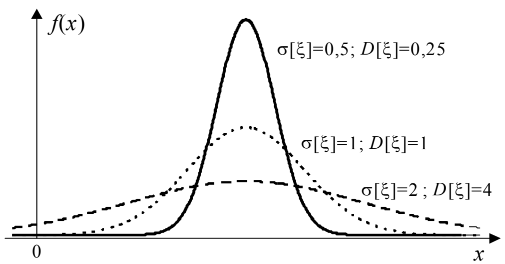


Рисунок 16 – Иллюстрация значений средних квадратических отклонений и дисперсии различных случайных величин

2.5.3 Моменты случайных величин.
Характеристики асимметрии и эксцесса

Моментом случайной величины ξ k-го порядка называется число $M[(\xi - a)^k]$, где a – произвольное число. Если $a = 0$, то момент случайной величины называется *начальным* $(\nu_k = M[\xi^k])$, если $a = M[\xi]$, то момент случайной величины ξ называется *центральным* моментом k-го порядка $(\mu_k = M[(\xi - M[\xi])^k])$.

Очевидно, что $\nu_0 = M[\xi^0] = 1$; $\nu_1 = M[\xi]$; $\nu_2 = M[\xi^2]$; $\mu_0 = M[(\xi - M[\xi])^0] = 1$; $\mu_1 = M[\xi - M[\xi]] = M[\xi] - M[M[\xi]] = = M[\xi] - M[\xi] = 0$; $\mu_2 = M[(\xi - M[\xi])^2] = D[\xi]$.

При этом центральные и начальные моменты связаны между собой следующими соотношениями:

$\mu_0 = 1$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2$; $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1{}^2$; $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1{}^2 - 3_1^4$. Рассмотрим несколько важных особенностей центральных моментов старших порядков.

Коэффициентом асимметрии (скошенности) распределения случайной величины ξ называется число, вычисляемое по формуле

$$\beta_1[\xi] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{M[(\xi - M[\xi])^3]}{\sigma^3}. \qquad (25)$$

Если распределение вероятностей случайной величины скошено влево, то $\beta_1[\xi] > 0$ (рисунок 17, *а*); если вправо, то $\beta_1[\xi] < 0$ (рисунок 17, *б*), если же распределение вероятностей случайной величины ξ симметрично относительно математического ожидания $M[\xi]$, то $\beta_1[\xi] = 0$.

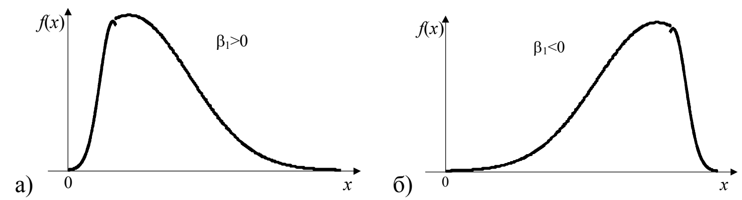


Рисунок 17 – Иллюстрация значений коэффициента асимметрии различных случайных величин

Коэффициентом эксцесса случайной величины ξ называется число $\beta_2[\xi]$, характеризующее островершинность распределения случайной величины ξ по сравнению с нормальным распределением и определяемое по формуле

$$\beta_2[\xi] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (26)$$

У случайной величины ξ, имеющей нормальный закон распределения коэффициент эксцесса равен нулю, т. е. $\beta_2[\xi] = 0$. У случайных величин с более островершинным распределением $\beta_2[\xi] > 0$, а у величин с менее островершинным – $\beta_2[\xi] < 0$ (рисунок 18).

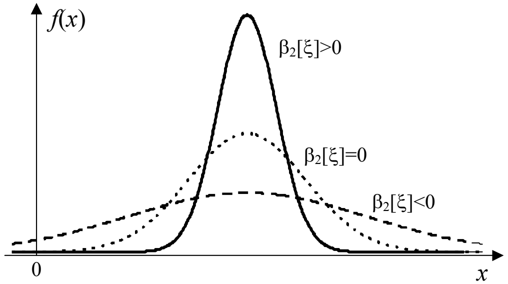


Рисунок 18 – Иллюстрация значений коэффициента эксцесса различных случайных величин

2.6 Законы распределения дискретных случайных величин

2.6.1 Биномиальный закон распределения

Говорят, что случайная величина ξ имеет биномиальный закон распределения (обозначается: $\xi \sim Bi(n, p)$), если данная величина дискретна и определяет число успехов *k* в схеме *n* испытаний Бернулли. Очевидно, что случайная величина ξ, имеющая биномиальное распределение, принимает только целые значения на отрезке $[0; n]$ с вероятностями, определяемыми формулой Бернулли

$$P(\xi = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (k = \overline{0, n}). \qquad (27)$$

Биномиальное распределение характеризуется двумя параметрами: числом проводимых экспериментов *n* и вероятностью успеха *p* в каждом испытании.

Примерами случайных величин, имеющих биномиальное распределение, являются: число гербов, выпавших при *n* подбрасываниях монеты; количество бракованных деталей в партии из *n* штук; количество автобусов, вышедших на линию, и др.

На рисунке 19 представлены столбцовые диаграммы случайных величин, имеющих биномиальный закон распределения с различными значениями параметров *n* и *p*. Основные числовые характеристики случайных величин, распределенных по биномиальному закону, определяются следующими выражениями:

$$M[\xi] = np; \quad D[\xi] = np(1-p);$$
$$Mod[\xi] - \text{ближайшее целое к } (n+1)p - 0{,}5. \qquad (28)$$

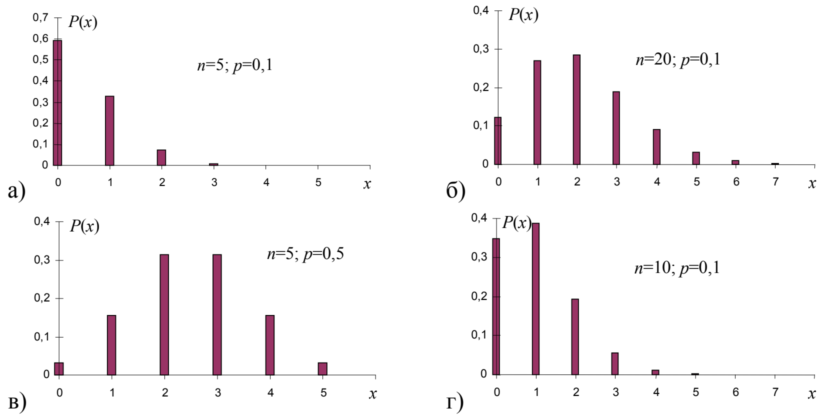


Рисунок 19 – Столбцовые диаграммы случайных величин, которые имеют биномиальное распределение с различными значениями параметров

Пример 29

В автобусном парке имеется пять автобусов. Вероятность выхода на линию каждого из них равна 0,8. Случайная величина ξ – число вышедших на линию машин. Построить ряд распределения и вычислить функцию распределения данной случайной величины. Вычислить её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непосредственно по ряду распределения и сравнить со значениями, которые получаются при использовании формул (28). Найти вероятность того, что в определенный день на линию выйдут не менее четырёх автобусов.

Решение. Предполагая, что выходы автобусов на линию осуществляются независимо друг от друга, условие задачи можно рассматривать как серию из $n=5$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события $A=\{$выход автобуса на линию$\}$ равна 0,8. Случайная величина ξ, обозначающая число вышедших на линию машин, распределена по биномиальному закону. Возможные значения случайной величины ξ: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вероятности значений определяются по формуле Бернулли:

$P(\xi=0)=C_5^0 p^0 q^5=1\cdot 1\cdot 0{,}2^5=0{,}00032$;

$P(\xi=1)=C_5^1 p^1 q^4=5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^4=0{,}0064$;

$P(\xi=2)=C_5^2 p^2 q^3=10\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^3=0{,}0512$;

$P(\xi=3)=C_5^3 p^3 q^2=10\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2=0{,}2048$;

$P(\xi=4)=C_5^4 p^4 q^1=5\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^1=0{,}4096$;

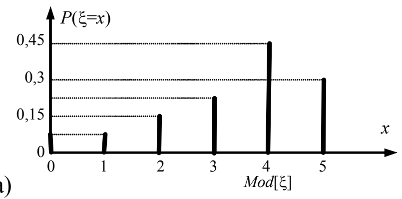
$P(\xi=5)=C_5^5 p^5 q^0=1\cdot 0{,}8^5\cdot 1=0{,}32768$.

Ряд распределения имеет вид:

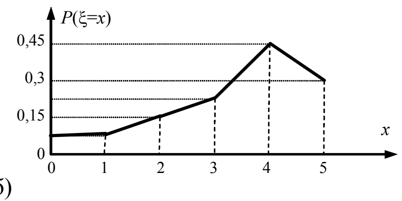
x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Убедимся, что $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

Столбцовая диаграмма и многоугольник распределения, представляющие ряд распределения этой случайной величины, изображены на рисунке 20, *а, б*.



а)



б)

Рисунок 20 – Графические способы задания законов распределения дискретной случайной величины

Определим значение функции распределения $F(x)=P(\xi<x)$ для всех возможных значений x:

при $x\in(-\infty;0]$, $F(x)=P(\xi<0)=0$;

при $x\in(0;1]$, $F(x)=P(\xi=0)=0{,}00032$;

при $x\in(1;2]$, $F(x)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=0{,}00032+0{,}0064=0{,}00672$;

при $x\in(2;3]$, $F(x)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)=$
$=0{,}00672+0{,}0512=0{,}05792$;

при $x\in[3;4)$, $F(x)=P(\xi=0)+\ldots+P(\xi=3)=$
$=0{,}05792+0{,}2048=0{,}26272$;

при $x\in[4;5)$, $F(x)=P(\xi=0)+\ldots+P(\xi=4)=$
$=0{,}26272+0{,}4096=0{,}67232$;

при $x\in[5;+\infty)$, $F(x)=P(\xi=0)+\ldots+P(\xi=5)=$
$=0{,}67232+0{,}32768=1$.

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\in(-\infty;0];\\ 0{,}00032, & \text{при } x\in(0;1];\\ 0{,}00672, & \text{при } x\in(1;2];\\ 0{,}05792, & \text{при } x\in(2;3];\\ 0{,}26272, & \text{при } x\in(3;4];\\ 0{,}67232, & \text{при } x\in(4;5];\\ 1, & \text{при } x\in[5;+\infty).\end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображён на рисунке 21.

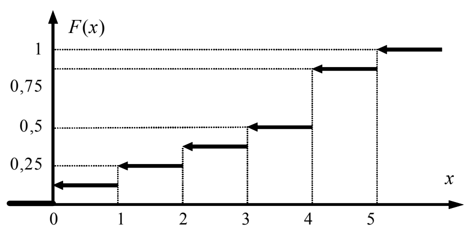


Рисунок 21 – График функции *F(x)*

Вычислим числовые характеристики данной случайной величины:

а) математическое ожидание

$$M[\xi]=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i = 0\cdot 0{,}00032+1\cdot 0{,}0064+2\cdot 0{,}0512+3\cdot 0{,}2048+$$
$$+4\cdot 0{,}4096+5\cdot 0{,}32768=4 \text{ (автобуса)};$$

б) дисперсия

$$D[\xi]=\sum_{i=1}^{6}x_i^2 p_i-(M[\xi])^2 = 0\cdot 0{,}00032+1\cdot 0{,}0064+4\cdot 0{,}0512+$$
$$+9\cdot 0{,}2048+16\cdot 0{,}4096+25\cdot 0{,}32768-4^2 = 0{,}8 \text{ (автобуса}^2\text{)};$$

в) среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[\xi]=\sqrt{D[\xi]}=\sqrt{0{,}8}\approx 0{,}894 \text{ (автобуса)};$$

г) мода

$$Mod[\xi]=4 \text{ (автобуса)}.$$

Вычислим числовые характеристики данной случайной величины по формулам (28):

$$M[\xi]=np=5\cdot 0{,}8=4;\quad D[\xi]=np(1-p)=0{,}8\,.$$

Как и следовало ожидать, получены точно такие же значения.

Вероятность того, что в определенный день на линию выйдут не менее четырёх автобусов,

$$P(\xi\ge 4)=P(\xi=4)+P(\xi=5)=0{,}4096+0{,}32768=0{,}73728\,.$$

2.6.2 Закон распределения Пуассона

Если в схеме Бернулли число испытаний бесконечно велико $(n\to\infty)$, а вероятность успеха в каждом испытании стремится к нулю $(p\to 0)$ таким образом, что $np=\lambda=\text{const}$, то вероятность появления в схеме *n* испытаний Бернулли ровно *k* успехов определяется предельной теоремой Пуассона (15). В данном случае говорят, что случайная величина ξ, определяющая число успехов *k* в схеме *n* испытаний Бернулли, имеет пуассоновский закон распределения, т. е. $\xi\sim\Pi(\lambda)$.

Таким образом, закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона распределения, при $n\to\infty$, $p\to 0$, $np=\lambda=\text{const}$.

Очевидно, что распределение Пуассона характеризуется единственным параметром $\lambda=np$; а случайная величина ξ, имеющая пуассоновское распределение, принимает только целые значения на полуинтервале $[0,+\infty)$ с вероятностями, определяемыми предельной теоремой Пуассона (15):

$$P(\xi=k)=P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=\overline{0,\infty}. \tag{29}$$

Примерами случайных величин, имеющих пуассоновское распределение, являются: число железнодорожных составов, поступающих на сортировочную горку в течение суток; число заявок, поступающих на АТС в течение часа, и др.

На рисунке 22 представлены столбцовые диаграммы случайных величин, имеющих пуассоновский закон распределения с различными значениями параметра λ. Основные числовые характеристики случайных величин, которые имеют пуассоновский закон распределения, определяются следующими выражениями:

$$M[\xi]=\lambda;\ D[\xi]=\lambda;\ Mod[\xi] \text{ – ближайшее целое к } \lambda-0{,}5\,. \tag{30}$$

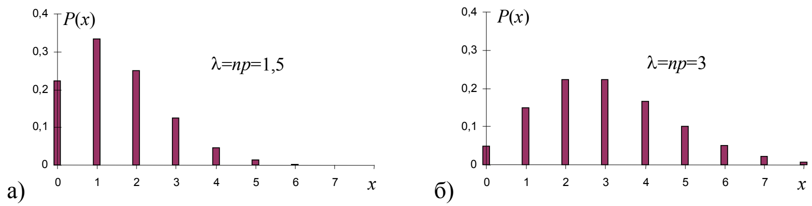


Рисунок 22 – Столбцовые диаграммы случайных величин, которые имеют распределение Пуассона с различными значениями параметров

Замечание – По закону Пуассона распределена случайная величина, описывающая число событий простейшего потока, произошедших в течение промежутка времени *t*.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

Интенсивностью потока α называется среднее число событий, происходящих за единицу времени.

Если $\alpha=\text{const}$, то поток называется *стационарным*. Это свойство означает, что вероятность наступления того или иного числа событий в течение отрезка времени длиной t не зависит от расположения на оси времени этого отрезка, а зависит только от его длины.

Поток называется *ординарным*, если вероятность попадания на малый участок Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него одного события.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если вероятность попадания того или иного числа событий на какой-то отрезок времени не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним участок, то есть предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем. Эта независимость физически сводится к тому, что события появляются на оси времени в силу случайных причин, индивидуальных для каждого из них.

Поток, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется *простейшим*.

Доказано, что для простейшего потока число событий, попадающих на каждый отрезок времени длиной t, распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = \alpha t$, где α – интенсивность потока.

Пример 30

На сортировочную горку поступает поток железнодорожных составов с интенсивностью 4 состава в час. Поток составов является простейшим. Найти вероятность того, что в течение 30 минут на горку поступит хотя бы один состав.

Решение. Случайная величина ξ, определяющая число составов, поступивших в течение получаса, может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4 и, согласно условию, распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = \alpha t = 4 \cdot 0{,}5 = 2$ (так как интенсивность потока $\alpha = 4$; $t = 0{,}5\,[\text{ч}]$). Обозначим событие: $A = \{$в течение получаса поступит хотя бы один состав$\}$. Тогда

$$P(A) = P(\xi \geq 0) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} = 0{,}865.$$

Пример 31

В железнодорожное депо на ремонт поступают вагоны. На основании статистических данных известно, что для некоторого промежутка времени рабочего дня среднее число вагонов, поступающих в течение 1 часа, равно 10. Поток поступлений является простейшим. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что: а) в течение часа поступит хотя бы один вагон; б) в течение трех часов произойдет не менее четырех поступлений.

Решение. а) Случайная величина ξ, определяющая число вагонов, поступивших в течение часа, может принимать значения 0, 1, 2, 3, … и, согласно условию, распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = \alpha t = 10 \cdot 1 = 10$ (так как интенсивность потока $\alpha = 10$; $t = 1\,[\text{ч}]$). Обозначим событие: $A = \{$в течение часа поступит хотя бы один вагон$\}$. Тогда

$$P(A) = P(\xi \geq 0) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \frac{10^0}{0!}e^{-10} = 1 - e^{-10} = 0{,}99999546.$$

б) Для определения вероятности события $B = \{$в течение трех часов поступит не менее четырех вагонов$\}$ введем в рассмотрение случайную величину η, определяющую число вагонов, поступивших в течение трех часов. Эта случайная величина распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = \alpha t = 10 \cdot 3 = 30$.

$$P(B) = P(\eta \geq 4) = 1 - P(\eta < 4) = 1 - \big[P(\eta = 0) + P(\eta = 1) + P(\eta = 2) +$$

$$+ P(\eta = 3)\big] = 1 - \left[\frac{30^0}{0!}e^{-30} + \frac{30^1}{1!}e^{-30} + \frac{30^2}{2!}e^{-30} + \frac{30^3}{3!}e^{-30}\right] \approx 0{,}99999.$$

2.6.3 Геометрический закон распределения

Говорят, что случайная величина ξ имеет геометрический закон распределения (обозначается: $\xi \sim \mathrm{G}(p)$), если данная величина дискретна и определяет число независимых испытаний Бернулли, предшествующих первому появлению успеха. Множество значений случайной величины, имеющей геометрический закон распределения, – это множество неотрицательных целых чисел 0, 1, 2, … . Геометрическое распределение характеризуется одним параметром – вероятностью успеха p в испытаниях Бернулли.

Пусть случайная величина ξ имеет геометрический закон распределения с параметром p, т. е. $\xi \sim \mathrm{G}(p)$. Тогда, вероятности значений случайной величины ξ, имеющей геометрическое распределение, определяются выражением:

$$P(\xi = k) = (1-p)^k p, \quad (k = \overline{0,n}). \tag{31}$$

Примерами случайных величин, имеющих геометрическое распределение, являются: количество безуспешных попыток установки модемного соединения, число безуспешных попыток спортсмена поразить мишень и некоторые другие.

На рисунке 23 представлены столбцовые диаграммы случайных величин, имеющих геометрическое распределение с различными значениями параметра p. Основные числовые характеристики случайных величин, которые имеют геометрический закон распределения, определяются выражениями:

$$M[\xi] = \frac{1}{p-1}; \quad D[\xi] = \frac{1-p}{p^2}; \quad Mod[\xi] = 0. \tag{32}$$

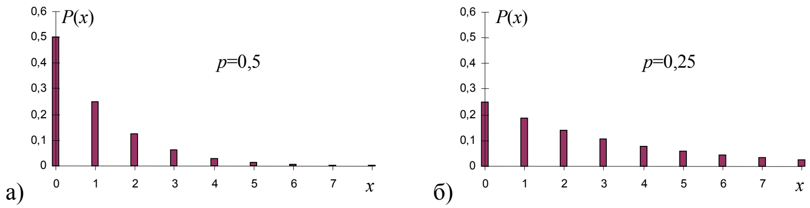


Рисунок 23 – Столбцовые диаграммы случайных величин, которые имеют геометрическое распределение с различными значениями параметров

Замечание – В некоторой литературе указывается, что геометрическое распределение имеет случайная величина η, определяющая номер испытания Бернулли, в котором впервые произошел успех. Очевидно, что указанная величина η может принимать значения из множества натуральных чисел 1, 2, ... , при этом $\eta = \xi + 1$, где $\xi \sim \mathrm{G}(p)$, поэтому будем обозначать такую величину $\eta \sim G^{+1}(p)$.

2.7 Законы распределения непрерывных случайных величин

2.7.1 Равномерный закон распределения

Говорят, что непрерывная случайная величина ξ имеет равномерный (прямоугольный) закон распределения, т. е. $\xi \sim R(a,b)$, если

она может принимать значения только на отрезке $[a;b]$, причём равновозможно. Таким образом, плотность распределения случайной величины ξ, имеющей равномерное распределение, постоянна на указанном отрезке (рисунок 24, *б*), т. е. вероятность попасть в окрестность любой точки от a до b одинакова.

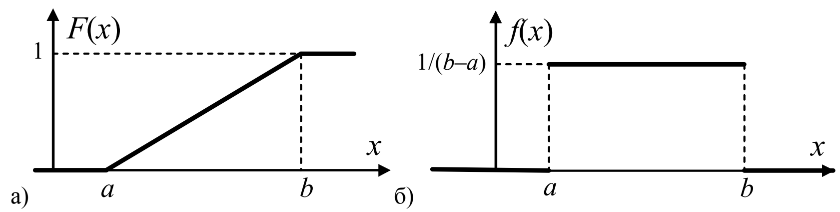


Рисунок 24 – Равномерный закон распределения:
а – функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ;
б – функция плотности распределения $f(x)$ случайной величины ξ

Равномерный закон распределения характеризуется двумя параметрами: минимальным a и максимальным b возможными значениями случайной величины ξ. Функция распределения $F(x)$ и функция плотности распределения $f(x)$ случайной величины ξ определяются выражениями (33) и (34), а их графики представлены на рисунке 24.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < \mathrm{a}; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если} \quad \mathrm{a} \le x \le \mathrm{b}; \\ 1, & \text{если} \quad x > \mathrm{b}; \end{cases} \tag{33}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\mathrm{a},\mathrm{b}]. \end{cases} \tag{34}$$

Примером случайной величины, которая имеет равномерный закон распределения, является время ожидания регулярных событий, например, время ожидания поезда в метрополитене. Другим примером являются ошибки округления чисел при арифметических вычислениях.

Основные числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины ξ определяются следующими выражениями:

$$M[\xi] = Med[\xi] = \frac{a+b}{2}; \quad D[\xi] = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \beta_1[\xi] = 0;$$

$Mod[\xi]$ – отсутствует (т. к. значения равновероятны). (35)

Пример 32

Интервал движения поездов в метрополитене составляет 3 мин. Определить вероятность, с которой пассажир, подошедший на платформу в случайный момент времени, будет ждать поезда более двух минут, а также среднее время ожидания поезда пассажиром.

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ, равную времени ожидания поезда пассажиром. Очевидно, что время ожидания поезда – неотрицательная величина, не превышающая 3 минут, т. е. $\xi \in [0; 3)$. Предполагая, что время прихода пассажира равновозможно в интервале между прибытием поездов, будем считать, что $\xi \sim R(0, 3)$.

По существу, необходимо определить вероятность события $\{\xi > 2\}$, а также математическое ожидание величины ξ, т. е. $M[\xi]$.

Заметим, что $P(\xi > 2) = P(2 < \xi \le 3) = P(2 \le \xi < 3)$, т. к. ξ – непрерывная величина. Для определения указанной вероятности воспользуемся свойством 5 функции распределения и выражением функции распределения $F(x)$ случайной величины, имеющей равномерное распределение (33):

$$P(2 \le \xi < 3) = F(3) - F(2) = \frac{3-0}{3-0} - \frac{2-0}{3-0} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Математическое ожидание величины ξ определим по формуле (35):

$$M[\xi] = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3}{2} = 1{,}5 \text{ мин.}$$

О т в е т: вероятность, с которой пассажир будет ожидать поезда более 2 минут, равна $\frac{1}{3}$; среднее время ожидания поезда составляет 1,5 минуты.

2.7.2 Показательный закон распределения

Говорят, что случайная величина ξ имеет показательное (экспоненциальное) распределение, т. е. $\xi \sim E(\lambda)$, если она непрерывна, принимает только положительные значения и имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0, \end{cases} \quad (36)$$

и, следовательно, функцию плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0, \end{cases} \quad (37)$$

где λ – единственный параметр показательного распределения, $\lambda > 0$.

Из графика функции плотности распределения $f(x)$ видно (рисунок 25, *б*), что случайная величина ξ, имеющая показательное распределение, наиболее вероятно принимает малые положительные значения, менее вероятно – большие положительные значения.

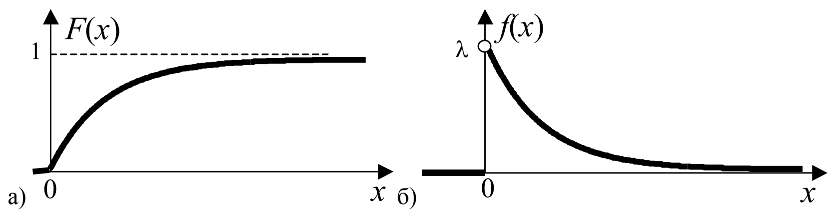


Рисунок 25 – Показательный закон распределения:
а – функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ;
б – функция плотности распределения $f(x)$ случайной величины ξ

Основные числовые характеристики случайной величины ξ, имеющей показательный закон распределения, определяются следующими выражениями:

$$M[\xi] = \sigma[\xi] = \frac{1}{\lambda}; \quad D[\xi] = \frac{1}{\lambda^2}; \quad Mod[\xi] = 0; \quad Med[\xi] = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (38)$$

Примерами случайных величин, имеющих показательный закон распределения, являются: время простоя вагона в ожидании ремонта, интервалы времени между поездами, прибывающими на станцию, время наработки на отказ электронных систем тепловоза и другие, поэтому показательное распределение имеет важное значение в теории надежности и теории массового обслуживания.

Случайная величина, распределенная по показательному закону, обладает важным свойством, называемым «отсутствием памяти».

Лемма об «отсутствии памяти» у показательного распределения. Пусть ξ имеет показательное распределение с параметром λ (т. е. $\xi \sim E(\lambda)$). Тогда для любых $t > 0$ и $\tau > 0$ вероятность того, что величина ξ примет значение меньше, чем $(\tau + t)$ при условии, что ξ приняла значение не меньше, чем τ, равна безусловной вероятности того, что случайная величина ξ примет значение меньшее, чем t:

$$P(\xi < \tau + t \mid \xi \geq \tau) = P(\xi < t)\,. \tag{39}$$

Замечание – Если случайная величина ξ – время до наступления некоторого события – имеет показательное распределение, то информация о том, что к моменту времени τ событие еще не наступило, не изменяет шансы на его наступление в дальнейшем. Этим свойством, называемым также отсутствием последействия, обладает только показательное распределение.

Пример 33

Время простоя вагона в ожидании ремонта является случайной величиной, распределенной по показательному закону с математическим ожиданием, равным 1,5 часа. Определить вероятность того, что в ожидании ремонта вагон простоит три часа.

Решение. Согласно условию, математическое ожидание случайной величины ξ, обозначающей время простоя вагона в ожидании ремонта, равно 1,5. Учитывая, что для случайной величины, распределенной по показательному закону, $M[\xi] = \dfrac{1}{\lambda}$, определяем значение параметра: $\lambda = \dfrac{1}{M[\xi]} = \dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{2}{3}$. Функция плотности распределения данной случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ \dfrac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Определим вероятность простоя вагона в ожидании ремонта три часа:

$$P(\xi \geq 3) = \int_3^{\infty} f(x)dx = \int_3^{\infty} \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}x} dx = -e^{-\frac{2}{3}x}\Big|_3^{\infty} = 0 + e^{-\frac{2}{3}} = 0{,}135.$$

Пример 34

Время безотказной работы электронного оборудования тепловоза является случайной величиной, распределенной по показательному закону. Определить вероятность безотказной работы оборудования в течение десяти часов эксплуатации, если среднее время безотказной работы по статистическим данным составляет 200 часов.

Решение. Согласно условию, математическое ожидание случайной величины ξ, обозначающей время безотказной работы оборудования, равно 200. Учитывая, что для случайной величины, распределенной по показательному закону, $M[\xi] = \dfrac{1}{\lambda}$, определяем значение параметра: $\lambda = \dfrac{1}{M[\xi]} = \dfrac{1}{200} = 0{,}005$. Функция плотности распределения данной случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ 0{,}005e^{-0{,}005x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Определим вероятность безотказной работы оборудования в течение десяти часов эксплуатации:

$$P(\xi \geq 10) = \int_{10}^{\infty} f(x)dx = \int_{10}^{\infty} 0{,}005e^{-0{,}005x}dx = -e^{-0{,}005x}\Big|_{10}^{\infty} = 0 + e^{-0{,}005} =$$
$$= 0{,}95123.$$

Пример 35

Известно, что для некоторой сортировочной станции интервалы времени между поездами, прибывающими в разборку, представляют собой случайную величину ξ, имеющую усечённое в точке x_0 показательное распределение:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<x_0;\\ A\lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x>x_0.\end{cases}$$

Требуется: 1) вычислить параметр A и построить график функции плотности распределения $f(x)$; 2) вычислить функцию распределения и построить её график; 3) вычислить числовые характеристики случайной величины ξ (математическое ожидание, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение); 4) вычислить вероятность того, что случайная величина ξ примет значение в интервале (1; 2).

Решение. 1) Неизвестный параметр A плотности распределения вероятностей найдём из соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 .$$

Поскольку в данном примере плотность $f(x)$ на $(-\infty;\ x_0)$ равна нулю, то можно записать:

$$\int_{x_0}^{+\infty} A\lambda e^{-\lambda x}dx=1;\quad A\int_{x_0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1;\quad A\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_{x_0}^{+\infty}=Ae^{-\lambda x_0}=1,$$

отсюда $A=e^{\lambda x_0}$.

Следовательно, плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<x_0;\\ \lambda e^{-\lambda(x-x_0)}, & \text{если } x>x_0.\end{cases}$$

Параметры распределения λ и x_0 имеют следующий смысл: λ – среднее число поездов, прибывающих на станцию в единицу времени; x_0 – минимальный допустимый интервал между последовательно

прибывающими поездами.

Допустим $\lambda=2$ поезда/ч, $x_0=0{,}017$ ч, тогда

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0{,}017;\\ 2e^{-2(x-0{,}017)}, & \text{если } x>0{,}017.\end{cases}$$

График функции $f(x)$ изображён на рисунке 26, *а*.

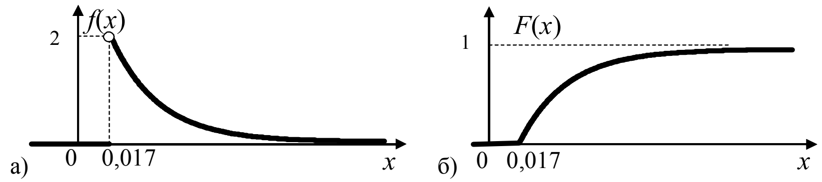


Рисунок 26 – Графики функций *f(x)* и *F(x)*

2) Вычислим функцию распределения $F(x)$:

при $x\in(-\infty;0{,}017]$, $F(x)=P(\xi<x)=0$;

при $x\in(0{,}017;+\infty)$, $F(x)=P(\xi<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0{,}017}0dx+$

$$+\int_{0{,}017}^{x}2e^{-2(t-0{,}017)}dt=2\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2(t-0{,}017)}\Big|_{0{,}017}^{x}=-e^{-2(x-0{,}017)}+e^{-2\cdot 0}=$$

$$=1-e^{-2(x-0{,}017)}.$$

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0{,}017;\\ 1-e^{-2(x-0{,}017)}, & \text{если } x>0{,}017.\end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображён на рисунке 26, *б*.

3) Числовые характеристики исследуемой случайной величины:
а) математическое ожидание

$$M[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0{,}017}x\cdot 0\cdot dx+\int_{0{,}017}^{+\infty}2xe^{-2(x-0{,}017)}dx=$$

$$= \begin{bmatrix} x = u; & v = -\frac{1}{2}e^{-2(x-0,017)} \\ e^{-2(x-0,017)}dx = dv; & dx = du \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2}xe^{-2(x-0,017)}\Big|_{0,017}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{0,017}^{+\infty} e^{-2(x-0,017)}dx \right] =$$

$$= 0,017 - \frac{1}{2}e^{-2(x-0,017)}\Big|_{0,017}^{+\infty} = 0,517 \text{ (ч)};$$

б) мода случайной величины ξ равна 0,017 ч;

в) медиану найдём из уравнения $F(x) = 0,5$:

$$1 - e^{-2(x-0,017)} = 0,5;$$
$$e^{-2(x-0,017)} = 0,5;$$
$$-2(x - 0,017) = \ln 0,5;$$
$$2(x - 0,017) = 0,693;$$
$$x = 0,363 \text{ ч};$$

г) дисперсия

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M[\xi])^2 = \int_{-\infty}^{0,017} x^2 \cdot 0 \cdot dx + 2\int_{0,017}^{+\infty} x^2 e^{-2(x-0,017)}dx -$$

$$-(0,517)^2 = 2e^{0,034}\int_{0,017}^{+\infty} x^2 e^{-2x}dx - (0,517)^2 =$$

$$= 2e^{0,034}\left[e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{4} - \frac{2}{8} \right) \right]\Bigg|_{0,017}^{+\infty} - (0,517)^2 =$$

$$= 0,517 + (0,017)^2 - (0,517)^2 = 0,25 \text{ ч}^2;$$

д) среднее квадратическое отклонение

$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]} = 0,5$ ч.

4) Вероятность того, что $\xi \in (1; 2)$, вычислим по формуле

$$P(1 < \xi < 2) = \int_1^2 2e^{-2(x-0,017)}dx = 2e^{0,034}\int_1^2 e^{-2x}dx =$$

$$= 2e^{0,034}\left(-\frac{1}{2} \right)e^{-2x}\Big|_1^2 = -e^{0,034}(e^{-4} - e^{-2}) = 0,121.$$

Вывод. Средний интервал времени между поездами, прибывающими на сортировочную станцию, равен 0,517 ч; наиболее вероятное значение интервала равно 0,017 ч; среднеквадратическое значение интервала между поездами равно 0,363 ч.

2.7.3 Закон распределения Эрланга

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ независимы и имеют показательный закон распределения с одинаковым параметром $\lambda_i = \lambda$, т. е. $\xi_i \sim E(\lambda)$, $i = \overline{1,k}$. Тогда случайная величина $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$ имеет закон *распределения Эрланга* k-го порядка с параметром λ, т. е. $\xi \sim ER(\lambda, k)$. Очевидно, что величина ξ непрерывна и принимает лишь положительные значения.

Функция плотности распределения случайной величины $\xi \sim ER(\lambda, k)$ определяется выражением (40), а ее графики (для различных значений параметра k) представлены на рисунке 27.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \dfrac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0,\ \lambda > 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases} \quad (40)$$

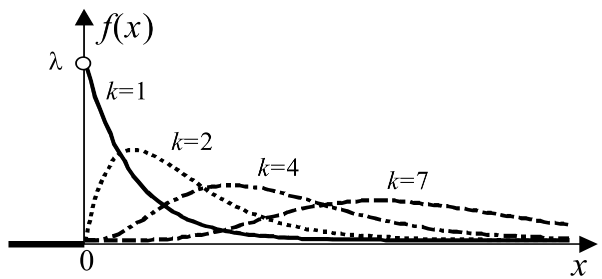


Рисунок 27 – Функция плотности распределения Эрланга для различных значений параметров

Очевидно, что при $k=1$ распределение Эрланга совпадает с показательным распределением. Основные числовые характеристики случайной величины ξ, имеющей закон распределения Эрланга, определяются следующими выражениями:

$$M[\xi]=\frac{k}{\lambda};\quad D[\xi]=\frac{k}{\lambda^2};\quad Mod[\xi]=\frac{k-1}{\lambda}. \qquad (41)$$

2.7.4 Нормальный закон распределения

Говорят, что случайная величина ξ имеет нормальный (гауссовский) закон распределения, т. е. $\xi \sim N(m,\sigma)$, если она непрерывна, имеет функцию

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt \qquad (42)$$

и, следовательно, имеет функцию плотности распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (43)$$

где параметр m численно равен математическому ожиданию величины ξ, а параметр $\sigma>0$ – среднеквадратическому отклонению (т. е. $m=M[\xi],\ \sigma=\sigma[\xi]$).

Максимальная ордината $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ функции плотности распределения (рисунок 31, *б*) достигается в точке $x=m=M[\xi]$; при $x\to\pm\infty$ кривая плотности нормального распределения асимптотически стремится к нулю. Следовательно, наиболее вероятно, что нормально распределенная случайная величина примет значение близкое к m и практически никогда не будет принимать бесконечно больших значений.

Из графиков функции $F(x)$ и функции плотности распределения $f(x)$ (рисунок 28) видно, что коэффициент асимметрии случайной величины ξ, имеющей нормальный закон распределения, равен нулю (т. е. $\beta_1[\xi]=0$); а математическое ожидание, медиана и мода случайной величины ξ совпадают. Основные числовые характеристики случайной величины ξ, имеющей нормальный закон распределения, определяются выражениями:

$$M[\xi]=Med[\xi]=Mod[\xi]=m;\ D[\xi]=\sigma^2;\ \beta_1[\xi]=\beta_2[\xi]=0. \qquad (44)$$

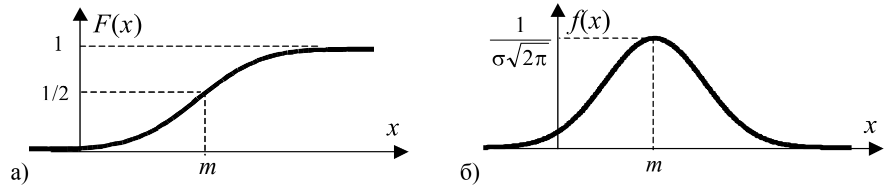


Рисунок 28 – Нормальный закон распределения:
а – функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ;
б – функция плотности распределения $f(x)$ случайной величины ξ

Случайная величина, которая имеет нормальный закон распределения с параметрами $m=0$ и $\sigma=1$, называется *стандартной нормальной случайной величиной*. Функция распределения стандартной нормальной случайной величины имеет вид:

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}+\Phi(x), \qquad (45)$$

где $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}$ (интеграл Пуассона), $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа (см. рисунок 8), значения которой табулированы и представлены в приложении Б.

Вычисление значения функции распределения случайной величины, имеющей нормальный закон распределения, затруднено тем, что интеграл в выражении (45) не выражается через элементарные функции. Для выполнения указанной задачи функцию распределения случайной величины ξ, имеющей нормальный закон распределения с параметрами m и σ, выражают через функцию Лапласа следующим образом. Сделаем в выражении (45) замену переменной $z = \dfrac{t-m}{\sigma}$, следовательно,

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \left| \begin{matrix} \dfrac{t-m}{\sigma} = z \\ dt = \sigma \cdot dz \end{matrix} \right| = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \qquad (46)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-m}{\sigma}).$$

Для **определения вероятности попадания** случайной величины, подчиненной нормальному закону, **в интервал** воспользуемся свойством 5 функции распределения $F(x)$ и выражением функции нормального распределения через функцию Лапласа (46):

$$P(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) + F(\alpha) =$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right)\right] - \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)\right] = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right). \qquad (47)$$

Примерами случайных величин, имеющих нормальный закон распределения, являются измерение длины, массы, времени, ошибки измерения т. д.

Пример 36

Известно, что для некоторого измерительного устройства систематическая ошибка измерения дальности до объекта равна +20 м. Ошибки измерения распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 75 м. Найти вероятность того, что полученное в результате измерения значение будет отличаться от истинного значения не более чем на 100 м.

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ, характеризующую

ошибку измерения дальности. Согласно условию эта случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами $M[\xi] = 20, \sigma[\xi] = 75$. Определим искомую вероятность с помощью формулы (47):

$$P(|\xi| \le 100) = P(-100 < \xi < 100) = \Phi\left(\frac{100 - 20}{75}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{-100 - 20}{75}\right) = \Phi(1{,}071) - \Phi(-1{,}6) = 0{,}3577 + 0{,}4452 =$$

$$= 0{,}8029.$$

Пример 37

Случайное отклонение размера детали от номинала при изготовлении ее на данном станке является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 5 мк. Систематические отклонения размера изготовленной детали от номинала отсутствуют. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение от номинала не более чем на 2 мк?

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – отклонение размера детали от номинала. Согласно условию, $M[\xi] = 0$ [ммк $\sigma[\xi] = 5$ [ммк. Найдем вероятность события $A =$ {изготовление годной детали}:

$$P(|\xi| \le 2) = P(-2 < \xi < 2) = \Phi\left(\frac{2-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{5}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}4) = 0{,}15542 + 0{,}15542 = 0{,}31084 \approx 0{,}31.$$

Теперь условие задачи можно рассматривать как последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p = 0{,}31$ происходит событие A, и с вероятностью $q = 1 - p = 0{,}69$ событие A не происходит. Вероятность того, что среди n изготовленных деталей будет хотя бы одна годная, представляет собой вероятность наступления события A хотя бы один раз в серии из n независимых испытаний:

$$1 - q^n \geq 0{,}9; \quad q^n \leq 0{,}1; \quad n \ln q \geq \ln 0{,}1;$$

$$n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln q} = \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}69} = 6{,}2.$$

Следовательно, $n \geq 7$, т. е. необходимо изготовить не менее 7 деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была хотя бы одна годная.

Пример 38

Размер изготавливаемой на станке детали является случайной величиной, распределённой по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 15 мм. Определить среднее квадратическое отклонение размера детали, если известно, что 95,44 % деталей имеют размер от 14 до 16 мм.

Решение. Согласно условию случайная величина ξ, определяющая размер изготавливаемой на станке детали, распределена по нормальному закону, причём $M[\xi] = 15$ [мм], $P(14 \leq \xi \leq 16) = 0{,}9544$. Определим искомую вероятность с помощью формулы (47):

$$P(14 < \xi < 16) = \Phi\left(\frac{16-15}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{14-15}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Учитывая, что $\Phi(x)$ – нечётная функция, получим

$$P(14 < \xi < 16) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}9544.$$

Отсюда $\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}4772.$

По таблицам значений функции $\Phi(x)$ определяем, что $\Phi(2) = 0{,}4772.$ Следовательно, $\sigma[\xi] = 0{,}5$, т. е. среднее квадратическое отклонение размера изготавливаемых на станке деталей равно 0,5.

3 МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1 Понятие многомерной случайной величины

Результат вероятностного эксперимента может иногда характеризоваться не одним, а одновременно несколькими числами. Например, местоположение корабля в море – пара величин (ξ, η), указывающая значения широты ξ и долготы η. Если при этом учитывать время τ, тогда мы имеем дело с трехмерной случайной величиной (ξ, η, τ). Успеваемость студента в семестре – n-мерная случайная величина $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, компоненты которой – оценки по каждой из n дисциплин.

Многомерной (n-мерной) *случайной величиной* называется функция $X(\omega)$, определенная на множестве элементарных событий Ω, которая каждому элементарному исходу ω ставит в соответствие n действительных чисел. Таким образом многомерная (n-мерная) случайная величина является совокупностью n одномерных величин (компонентов).

Все компоненты многомерной *дискретной* случайной величины – одномерные *дискретные* случайные величины. Все компоненты многомерной *непрерывной* случайной величины – одномерные непрерывные случайные величины. Многомерные *смешанные* случайные величины содержат как дискретные, так и непрерывные компоненты.

Основной характеристикой многомерной случайной величины является закон распределения, который (как и для одномерных величин) может быть задан таблично, графически или аналитически (функция распределения, функция плотности распределения и т. д.).

Пример 39

В ящике находится 5 шаров, пронумерованных цифрами «1», «1», «2», «2», «2». Последовательно извлекают два шара. Пусть случайная величина ξ – число на 1-м выбранном шаре, η – число на 2-м шаре. Требуется найти табличный закон распределения (матрицу распределения) двумерной случайной величины (ξ, η). Определить вероятность того, что второй шар будет иметь метку «1».

Решение. Определим вероятности возможных значений двумерной случайной величины (ξ, η) и заполним матрицу распределения (таблица 6):

$(\xi,\ \eta) = (1; 1)$:

$$P(\xi = 1; \eta = 1) = P(\{\xi = 1\} \cap \{\eta = 1\}) = P(\xi = 1)P(\eta = 1 \mid \xi = 1) =$$
$$= \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}1$$

$(\xi,\ \eta) = (1; 2)$:

$$P(\xi = 1; \eta = 2) = P(\{\xi = 1\} \cap \{\eta = 2\}) = P(\xi = 1)P(\eta = 2 \mid \xi = 1) =$$
$$= \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 0{,}3;$$

$(\xi,\ \eta) = (2; 1)$:

$$P(\xi = 2; \eta = 1) = P(\{\xi = 2\} \cap \{\eta = 1\}) = P(\xi = 2)P(\eta = 1 \mid \xi = 2) =$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = 0{,}3;$$

$(\xi,\ \eta) = (2; 2)$:

$$P(\xi = 2; \eta = 2) = P(\{\xi = 2\} \cap \{\eta = 2\}) = P(\xi = 2)P(\eta = 2 \mid \xi = 2) =$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = 0{,}3.$$

Таблица 6 – **Матрица распределения двумерной случайной величины**

$(\xi,\ \eta)$	$\eta = 1$	$\eta = 2$
$\xi = 1$	0,1	0,3
$\xi = 2$	0,3	0,3

Очевидно, что сумма вероятностей всех значений многомерной случайной величины равна единице.

Вероятность того, что второй шар будет иметь метку «1», определим как сумму вероятностей в столбце «$\eta = 1$» матрицы распределения. Таким образом, $P(\eta = 1) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$.

3.2 Функция распределения двумерной случайной величины

Функцией распределения двумерной случайной величины $(\xi,\ \eta)$ или совместной функцией распределения случайных величин ξ и η называется функция $F_{\xi\,\eta}(x,\ y)$, равная вероятности того, что компонент ξ примет значение меньшее, чем x, а компонент η – значение меньшее, чем y,

$$F_{\xi\,\eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y) = P(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}). \qquad (48)$$

Таким образом, функция распределения двумерной случайной величины $F_{\xi\,\eta}(x, y)$ в точке (x, y) определяет вероятность, с которой двумерная случайная величина примет значение в нижнем левом квадранте относительно точки (x, y) (рисунок 29).

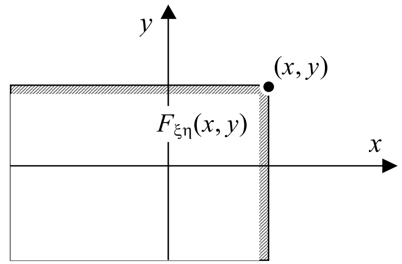


Рисунок 29 – Иллюстрация вероятностного смысла функции распределения двумерной случайной величины

Функция распределения двумерной случайной величины (ξ, η) обладает следующими свойствами (рисунок 30).

Свойство 1. $F_{\xi\,\eta}(x, y) \ge 0$, т. е. функция распределения двумерной случайной величины (ξ, η) – неотрицательная функция.

Свойство 2. Если $x_1 < x_2$, то $F_{\xi\,\eta}(x_1,\ y_1) \le F_{\xi\,\eta}(x_2,\ y_1)$; если $y_1 < y_2$, то $F_{\xi\,\eta}(x_1,\ y_1) \le F_{\xi\,\eta}(x_1,\ y_2)$.

Таким образом, функция $F_{\xi\,\eta}(x, y)$ – неубывающая функция каждого аргумента при условии, что другие аргументы фиксированы.

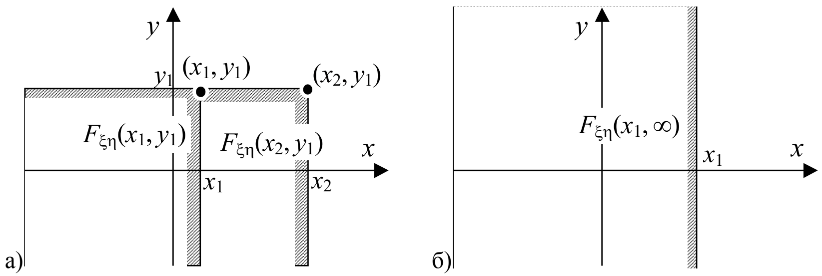


Рисунок 30 – Иллюстрация свойств
функции распределения двумерной случайной величины

Свойство 3. $F_{\xi\eta}(x,+\infty)=F_{\xi}(x)$; $F_{\xi\eta}(+\infty, y)=F_{\eta}(y)$.

Таким образом, если один из аргументов функции распределения двумерной случайной величины (ξ, η) равен $+\infty$ (см. рисунок 30, *б*), то $F_{\xi\eta}(x,y)$ становится равной функции распределения одномерной случайной величины, соответствующей другому аргументу.

Свойство 4. $F_{\xi\eta}(-\infty, y)=0$; $F_{\xi\eta}(x,-\infty)=0$.

Таким образом, если хоть один из аргументов функции $F_{\xi\eta}(x,y)$ равен $-\infty$, то $F_{\xi\eta}(x,y)=0$.

Свойство 5. $F_{\xi\eta}(+\infty,+\infty)=1$

Таким образом, если все аргументы функции $F_{\xi\eta}(x,y)$ равны $+\infty$, то $F_{\xi\eta}(x,y)=1$.

Свойство 6. По каждому из аргументов функция $F_{\xi\eta}(x,y)$ непрерывна слева.

Таким образом,

$$F_{\xi\eta}(x-0,y)=F_{\xi\eta}(x,y);\ F_{\xi\eta}(x,y-0)=F_{\xi\eta}(x,y).$$

Замечание 1 – Функция распределения двумерной случайной величины представляет собой поверхность в пространстве. Причем в точке $(-\infty; -\infty)$ она равна нулю, а в точке $(\infty; \infty)$ – равна единице.

Замечание 2 – Функция распределения дискретной двумерной случайной величины – разрывная ступенчатая функция. Функция распределения непрерывной двумерной случайной величины непрерывна на всей числовой оси.

3.3 Функция плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины

Функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ – наиболее универсальная форма закона распределения многомерных случайных величин как дискретных, так непрерывных и смешанных. Кроме этого, закон распределения непрерывных многомерных случайных величин может быть задан с помощью функции плотности распределения.

Двумерная случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ – непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная $\dfrac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x \partial y}$.

Аналогично тому, как была определена функция плотности распределения одномерной случайной величины, определим *функцию плотности распределения* $F_{\xi\eta}(x,y)$ *непрерывной двумерной случайной величины* как предел отношения вероятности попадания значения случайной величины (ξ, η) в элементарный прямоугольник, примыкающий к точке (x, y), к площади этого прямоугольника, когда оба его размера стремятся к нулю:

$$f_{\xi\mu}(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(\{x<\xi<x+\Delta x\}\cap\{y<\eta<y+\Delta y\})}{\Delta x\cdot\Delta y}=$$

$$=\frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}. \tag{49}$$

При этом данный предел есть не что иное, как вторая смешанная производная функции распределения двумерной случайной величины (ξ, η).

Функция плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η) обладает следующими свойствами.

Свойство 1. $f_{\xi\eta}(x,y) \ge 0$, т. е. функция плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η) – неотрицательная функция.

Свойство 2. $P(\{x_1 \le \xi < x_2\} \cap \{y_1 \le \eta < y_2\}) = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy$.

Таким образом, вероятность попадания непрерывной двумерной случайной величины в произвольный прямоугольник, ограниченный точками (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) и (x_2, y_2), определяется двойным интегралом функции плотности распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$ по каждой из переменных на интервалах (x_1, y_2) и (x_2, y_1) соответственно.

Свойство 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1$.

Свойство 4. $\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = F_{\xi\eta}(x,y)$.

Свойство 5. $P(\{\xi = x\} \cap \{\eta = y\}) = 0$.

Таким образом, вероятность того, что непрерывная двумерная случайная величина (ξ, η) попадёт в точку (x, y), равна нулю.

3.4 Понятие независимости случайных величин

При рассмотрении нескольких случайных величин (компонентов многомерной случайной величины) часто встречается задача установления факта зависимости величин. Например, влияет ли величина ξ – «масса поезда» – на величину η – «расход топлива локомотивом».

Независимыми называются случайные величины, закон распределения каждой из которых не зависит (не изменяется) от того, какое значение приняла другая случайная величина.

Зная совместный закон распределения многомерной случайной величины (в частности $F_{\xi\eta}(x,y)$), можно найти законы распределения ее компонентов. Однако совместный закон распределения многомерной случайной величины можно определить через законы распределения компонентов (т. е. одномерных случайных величин), только если эти компоненты независимы.

Рассмотрим определение функции распределения двумерной случайной величины (48)

$$F_{\xi\eta}(x,y) = P(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}).$$

Если величины ξ и η независимы, то независимыми являются события $\{\xi < x\}$ и $\{\eta < y\}$. Следовательно, по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$F_{\xi\eta}(x,y) = P(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}) = P(\xi < x)P(\eta < y) = F_\xi(x)F_\eta(y),$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y). \qquad (50)$$

Тождество (50) является необходимым и достаточным *условием независимости двух случайных величин* и называется *теоремой умножения функций распределения независимых случайных величин*.

Если ξ и η – непрерывные независимые случайные величины, то, дифференцируя левую и правую части равенства (50) по x и по y, получим

$$\frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_\xi(x)}{\partial x}\frac{\partial F_\eta(y)}{\partial y}.$$

Учитывая определения функции плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины (49) и функции плотности распределения непрерывной одномерной величины (19), получаем равенство, называемое *теоремой умножения функций плотности распределения независимых величин* (необходимое и достаточное условие независимости непрерывных случайных величин):

$$f_{\xi\eta}(x,y) = f_\xi(x)f_\eta(y). \qquad (51)$$

Если компоненты двумерной случайной величины (ξ, η) зависимы, то для нахождения совместного закона распределения недостаточно знать законы распределения компонентов: требуется знать так называемый условный закон распределения одной из них.

Условным законом распределения величины ξ называется закон ее распределения, вычисленный в предположении, что другая случайная величина (η) приняла определенное значение.

Функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ системы зависимых случайных величин может быть записана в виде, называемом *теоремой умножения функций распределения величин*:

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(x,y) &= P(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}) = \\ &= P(\xi < x)P(\eta < y \mid \xi < x) = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y \mid \xi < x), \end{aligned} \tag{52}$$

где $F_{\eta}(y \mid \xi < x) = P(\eta < y \mid \xi < x)$ – условная функция распределения величины η при условии наступления события $\{\xi < x\}$.

На практике чаще используют другую форму условного закона распределения $F_{\eta}(y \mid \xi = x)$ или $f_{\eta}(y \mid \xi = x)$, т. е. когда величина ξ принимает фиксированное значение x. Тем более, что для непрерывных случайных величин справедлива следующая *теорема умножения плотностей*:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y \mid \xi = x), \tag{53}$$

т. е. функция плотности распределения непрерывной двумерной величины равна произведению функции плотности распределения одной из них на условную плотность распределения другой при заданном значении первой.

3.5 Числовые характеристики двумерной случайной величины

Случайные величины полностью характеризуются законами распределения, но часто достаточным бывает знать лишь некоторые характерные значения, которые может принимать случайная величина, т. е. ее числовые характеристики. Для описания многомерных случайных величин используются числовые характеристики ее составляющих, а также параметры, характеризующие зависимость между компонентами многомерной величины. Одна из таких характеристик – корреляционный момент (ковариация).

Корреляционным моментом η двух случайных величин ξ и η называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий:

$$\mu_{\xi\eta} = M[(\xi - M[\xi])(\eta - M[\eta])]. \tag{54}$$

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей величин ξ и η. Часто пользуются безразмерной характеристикой – *коэффициентом корреляции* случайных величин, который определяется по формуле

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mu_{\xi\eta}}{\sigma[\xi]\sigma[\eta]}. \tag{55}$$

Коэффициент корреляции может принимать значения из отрезка $[-1;1]$. Корреляционный момент и коэффициент корреляции характеризуют степень линейной зависимости между двумя величинами. Нулевое значение данных характеристик указывает на *отсутствие линейной зависимости* между исследуемыми величинами (при этом может существовать *нелинейная зависимость*). Равенство коэффициента корреляции $r_{\xi\eta}$ единице указывает на наличие *положительной линейной функциональной зависимости* между величинами ξ и η (с увеличением ξ величина η также увеличивается). Если же $r_{\xi\eta} = -1$, то между величинами ξ и η существует *отрицательная* (с увеличением ξ величина η уменьшается) *линейная функциональная зависимость*. Промежуточные значения коэффициента корреляции ($r_{\xi\eta} \in (-1;0)$ или $r_{\xi\eta} \in (0;1)$) указывают на тенденцию к наличию линейной зависимости между величинами ξ и η.

Пример 40

Рассмотрим систему двух дискретных случайных величин (ξ,η), где случайная величина ξ – число поездов (в сутки), задержанных станцией *А*, случайная величина η – число поездов (в сутки), задержанных станцией *Б*. Известна матрица распределения системы случайных величин (ξ,η) (таблица 7).

Таблица 7 – **Матрица распределения двумерной случайной величины** (ξ, η)

(ξ, η)	$\eta = 0$	$\eta = 1$	$\eta = 2$
$\xi = 0$	0,4	0,05	0,05
$\xi = 1$	0,2	0,02	0,03
$\xi = 2$	0,05	0,2	0

Требуется: 1) найти законы распределения случайных величин ξ и η; 2) вычислить числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин ξ и η, математическое ожидание произведения $\xi\eta$, корреляционный момент η и коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$); 3) выяснить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми.

Решение. 1) Найдём законы распределения случайных величин.

а) Вероятности значений случайной величины ξ найдём по формуле $P(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{3} p_{ij},\ i = \overline{1,3}$.

$P(\xi = 0) = 0{,}4 + 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}5$;

$P(\xi = 1) = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}03 = 0{,}25$;

$P(\xi = 2) = 0{,}05 + 0{,}2 + 0 = 0{,}25$.

Следовательно, ряд распределения случайной величины ξ можем записать в виде таблицы 8.

Таблица 8 – **Матрица распределения случайной величины** ξ

x_i	0	1	2
$P(\xi = x_i)$	0,5	0,25	0,25

б) Вероятности значений случайной величины η найдём по формуле

$$P(\eta = y_i) = \sum_{i=1}^{3} p_{ij},\ j = \overline{1,3}.$$

$P(\eta = 0) = 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}65$;

$P(\eta = 1) = 0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}02 = 0{,}27$;

$P(\eta = 2) = 0{,}05 + 0{,}03 + 0 = 0{,}08$.

Следовательно, ряд распределения случайной величины η можем записать в виде таблицы 9.

Таблица 9 – **Матрица распределения случайной величины** η

y_j	0	1	2
$P(\eta = y_i)$	0,65	0,27	0,08

2) Вычислим числовые характеристики:

а) вычислим математическое ожидание случайной величины ξ, используя ряд распределения из таблицы 8:

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}75 \text{ поездов/сут};$$

б) вычислим математическое ожидание случайной величины η, используя ряд распределения из таблицы 9:

$$M[\eta] = \sum_{j=1}^{3} y_j p_j = 0 \cdot 0{,}65 + 1 \cdot 0{,}27 + 2 \cdot 0{,}08 = 0{,}43 \text{ поездов/сут};$$

в) вычислим дисперсию случайной величины ξ, используя ряд распределения из таблицы 8:

$$D[\xi] = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - (M[\xi])^2 = 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}25 - \\ - (0{,}75)^2 = 0{,}6875 \ (\text{поездов/сут})^2;$$

г) вычислим дисперсию случайной величины η, используя ряд распределения из таблицы 9:

$$D[\eta] = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 p_j - (M[\eta])^2 = 0^2 \cdot 0{,}65 + 1^2 \cdot 0{,}27 + 2^2 \cdot 0{,}08 - \\ - (0{,}43)^2 = 0{,}675 \ (\text{поездов/сут})^2;$$

д) средние квадратические отклонения случайных величин ξ и η:

$$\sigma[\xi]=\sqrt{D[\xi]}=\sqrt{0{,}6875}\approx 0{,}829 \text{ поездов/сут};$$

$$\sigma[\eta]=\sqrt{D[\eta]}=\sqrt{0{,}675}\approx 0{,}822 \text{ поездов/сут};$$

е) вычислим математическое ожидание произведения случайных величин ξ и η, пользуясь заданной матрицей распределения:

$$M[\xi\,\eta]=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j p_{ij}=0\cdot 0\cdot 0{,}4+0\cdot 1\cdot 0{,}05+0\cdot 2\cdot 0{,}05+$$
$$+1\cdot 0\cdot 0{,}2+1\cdot 1\cdot 0{,}02+1\cdot 2\cdot 0{,}03+2\cdot 0\cdot 0{,}05+2\cdot 1\cdot 0{,}2+$$
$$+2\cdot 2\cdot 0=0{,}48 \text{ (поездов/сут)}^2;$$

ж) корреляционный момент двух случайных величин ξ и η

$$\mu_{\xi\,\eta}=M[\xi\,\eta]-M[\xi]M[\eta],$$

следовательно,

$$\mu_{\xi\,\eta}=0{,}48-0{,}75\cdot 0{,}43=0{,}1575 \text{ (поездов/сут)}^2;$$

з) коэффициент корреляции двух случайных величин ξ и η

$$r_{\xi\,\eta}=\frac{\mu_{\xi\,\eta}}{\sigma[\xi]\sigma[\eta]}=\frac{0{,}1575}{0{,}829\cdot 0{,}822}\approx 0{,}231.$$

3) Поскольку коэффициент корреляции $r_{\xi\,\eta}\neq 0$, то случайные величины ξ и η зависимы.

Наличие зависимости между случайными величинами ξ и η можно проверить и на основании определения независимости: если $P(\xi=x_i,\eta=y_{\mathrm{j}})=P(\xi=x_i)P(\eta=y_{\mathrm{j}})$, то случайные величины ξ и η независимы. Если данное равенство нарушается, то случайные величины ξ и η зависимы.

Проверим выполнение нескольких неравенств для заданной матрицы распределения:

$P(\xi=0,\eta=0)=0{,}43;\quad P(\xi=0)=0{,}5;\quad P(\eta=0)=0{,}65;$
$0{,}43\neq 0{,}5\cdot 0{,}65;$

$P(\xi=0,\eta=1)=0{,}05;\quad P(\xi=0)=0{,}5;\quad P(\eta=1)=0{,}27;$
$0{,}05\neq 0{,}5\cdot 0{,}27;$

$P(\xi=0,\eta=2)=0{,}05;\quad P(\xi=0)=0{,}5;\quad P(\eta=2)=0{,}08;$
$0{,}05\neq 0{,}5\cdot 0{,}08;$

$P(\xi=1,\eta=0)=0{,}2;\quad P(\xi=1)=0{,}25;\quad P(\eta=0)=0{,}65;$
$0{,}2\neq 0{,}25\cdot 0{,}65;$

и т. д.

Выполненные вычисления подтверждают наличие зависимости между случайными величинами ξ и η.

Вывод. Среднее число поездов в сутки, задержанных станцией *А*, равно 0,75; среднее число поездов в сутки, задержанных станцией *В*, равно 0,43; корреляционный момент, характеризующий разброс точек (ξ,η) вокруг точки $(M[\xi],M[\eta])$, равен 0,1575; коэффициент корреляции равен 0,231, что говорит об очень слабой линейной зависимости между случайными величинами ξ и η.

4 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Номера задач, которые необходимо выполнить, определяются с помощью приведённой ниже таблицы:

Номер варианта	Номера разделов											
	РГР № 1								РГР № 2			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
01	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
02	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
03	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
04	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
05	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
06	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
07	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
08	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
09	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10	10	11	12	113	14	15	16	17	18	19	20	1
11	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1	2
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1	2	3
13	13	14	15	16	17	18	19	20	1	2	3	4
14	14	15	16	17	18	19	20	1	2	3	4	5
15	15	16	17	18	19	20	1	2	3	4	5	7
16	16	17	18	19	20	1	2	3	4	5	6	7
17	17	18	19	20	1	2	3	4	5	6	7	8
18	18	19	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9
19	19	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
21	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
22	8	9	10	11	12	13	2	3	4	5	6	7
23	9	10	11	12	13	14	3	4	5	6	7	8
24	10	11	12	13	14	15	4	5	6	7	8	9
25	11	12	13	14	15	16	5	6	7	8	9	10
26	12	13	14	15	16	17	6	7	8	9	10	11
27	13	14	15	16	17	18	7	8	9	10	11	12
28	14	15	16	17	18	19	8	9	10	11	12	13
29	15	16	17	18	19	20	9	10	11	12	13	14
30	16	17	18	19	20	1	10	11	12	113	14	15
31	17	18	19	20	1	2	11	12	13	14	15	16
32	18	19	20	1	2	3	12	13	14	15	16	17
33	19	20	1	2	3	4	13	14	15	16	17	18
34	20	1	2	3	4	5	14	15	16	17	18	19
35	1	2	3	4	5	7	15	16	17	18	19	20

Номер варианта	Номера разделов											
	РГР № 1								РГР № 2			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
36	1	5	6	7	5	6	7	8	9	10	11	12
37	2	6	7	8	6	7	8	9	10	11	12	13
38	3	7	8	9	7	8	9	10	11	12	13	14
39	4	8	9	10	8	9	10	11	12	13	14	15
40	5	9	10	11	9	10	11	12	13	14	15	16
41	6	10	11	12	10	11	12	13	14	15	16	17
42	7	11	12	13	11	12	13	14	15	16	17	18
43	8	12	13	14	12	13	14	15	16	5	6	19
44	9	13	14	15	13	14	15	16	17	6	7	20
45	10	14	15	16	14	15	16	17	18	7	8	1
46	11	15	16	17	15	16	17	18	19	8	9	2
47	12	16	17	18	16	17	18	19	20	9	10	3
48	13	17	18	19	17	18	19	20	1	10	11	4
49	14	18	19	20	18	19	20	1	2	11	12	5
50	15	19	20	1	19	20	1	2	3	12	13	7
51	16	20	1	2	20	1	2	3	4	13	14	7
52	17	1	2	3	1	2	3	4	5	14	15	8
53	18	2	3	4	2	3	4	5	6	15	16	9
54	19	3	4	5	3	4	5	6	7	16	17	10
55	20	4	5	6	4	5	6	7	8	17	18	11
56	7	11	12	1	11	12	1	2	3	18	19	6
57	8	12	13	2	12	13	2	3	4	19	20	7
58	9	13	14	3	13	14	3	4	5	20	1	8
59	10	14	15	4	14	15	4	5	6	1	2	9
60	11	15	16	5	15	16	5	6	7	2	3	10
61	12	16	17	6	16	17	6	7	8	3	4	11
62	13	17	18	7	17	18	7	8	9	4	5	12
63	14	18	19	8	18	19	8	9	10	11	12	13
64	15	19	20	9	19	20	9	10	11	12	13	14
65	16	20	1	10	20	1	10	11	12	13	14	15
66	17	1	2	11	1	2	11	12	13	14	15	16
67	18	2	3	12	2	3	12	13	14	15	16	17
68	19	3	4	13	3	4	13	14	15	16	17	18
69	20	4	5	14	4	5	14	15	16	17	18	19
70	15	16	17	18	19	20	1	2	3	4	5	7
71	16	17	18	19	20	1	12	13	14	15	16	7
72	17	3	4	5	3	4	13	14	15	16	17	8
73	18	4	5	6	4	5	14	15	16	5	6	9
74	19	11	12	1	11	12	15	16	17	6	7	10
75	20	12	13	2	12	13	16	17	18	7	8	11
76	7	13	14	3	13	14	17	18	19	8	9	6
77	8	14	15	4	14	15	18	19	20	9	10	7
78	9	15	16	5	15	16	19	20	1	10	11	8
79	10	16	17	6	16	17	4	5	6	7	8	9
80	11	12	13	14	15	16	5	6	7	8	9	10

Задание 1

Вероятностный эксперимент состоит в том, что внутри прямоугольника Ω, изображённого на рисунке 34, случайным образом выбирается точка.

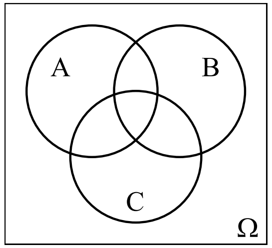


Рисунок 31 – Диаграмма Венна-Эйлера

Рассмотрим три события: $A = \{$выбранная точка лежит внутри круга $A\}$, $B = \{$выбранная точка лежит внутри круга $B\}$, $C = \{$выбранная точка лежит внутри круга $C\}$. Изобразим области, попадание в которые соответствует осуществлению следующих событий:

1.1 $A \cap \overline{B} \setminus C, \quad \overline{A \cap (B \cup C)}, \quad A \cup \overline{B} \cup \overline{C}, \quad \overline{A} \cap (B \cup \overline{C}).$

1.2 $\overline{A} \setminus B \cap C, \quad \overline{(A \cup B) \cap C}, \quad (A \cup \overline{B}) \cap C, \quad A \cap B \cap \overline{C}.$

1.3 $\overline{A} \cup \overline{B \cap C}, \quad \overline{A \cap B} \cap C, \quad B \setminus (A \setminus \overline{C}), \quad B \cap \overline{(A \cup C)}.$

1.4 $B \cup \overline{A \cap C}, \quad \overline{(A \setminus B)} \cap C, \quad (A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}, \quad (C \setminus \overline{A}) \cup B.$

1.5 $(B \setminus A) \cap \overline{C}, \quad (A \cup B) \cap C, \quad \overline{(A \cup B \setminus C)}, \quad A \cap \overline{(C \setminus B)}.$

1.6 $A \setminus (C \cup \overline{B}), \quad A \setminus \overline{B \cap C}, \quad C \cap (A \setminus \overline{B}), \quad C \cap (\overline{A} \setminus \overline{B}).$

1.7 $C \setminus A \setminus B, \quad \overline{A \cap B} \cup C, \quad (A \setminus \overline{C}) \cap B, \quad (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C.$

1.8 $A \cap B \setminus C, \quad \overline{A} \cup (\overline{B} \setminus \overline{C}), \quad \overline{(A \cup B)} \setminus C, \quad B \cap \overline{C \cap A}.$

1.9 $A \cap (\overline{B} \setminus C), \quad \overline{A} \setminus \overline{B} \setminus C, \quad \overline{(A \cup B)} \cap \overline{C}, \quad (\overline{A} \setminus \overline{B}) \cap C.$

1.10 $C \setminus B \cap A, \quad \overline{(B \setminus C)} \cap A, \quad (B \cup C) \setminus \overline{A}, \quad \overline{A} \setminus \overline{B} \setminus \overline{C}.$

1.11 $A \setminus (C \cup B), \quad \overline{A \cup B \cup C}, \quad \overline{C} \cap (\overline{A} \setminus B), \quad C \cap (A \cup B).$

1.12 $(A \cup B) \setminus C, \quad \overline{(A \cup C)} \cap \overline{B}, \quad \overline{(A \setminus B) \cap C}, \quad A \cup \overline{B} \cup C.$

1.13 $A \cap B \setminus C, \quad C \setminus \overline{(A \setminus B)}, \quad C \cap \overline{(A \cup B)}, \quad (A \setminus B) \cup \overline{C}.$

1.14 $(C \setminus B) \cup A, \quad A \setminus \overline{(C \cup B)}, \quad (A \setminus \overline{B}) \cup \overline{C}, \quad (A \setminus B) \cap \overline{C}.$

1.15 $B \setminus (\overline{C} \setminus A), \quad \overline{A} \cap B \cap \overline{C}, \quad C \setminus \overline{(A \cup B)}, \quad C \cup \overline{(A \setminus B)}.$

1.16 $(A \cup B) \setminus C, \quad \overline{(A \setminus C)} \cap B, \quad \overline{B} \cap (A \cup \overline{C}), \quad \overline{A \cap B} \setminus \overline{C}.$

1.17 $C \setminus B \setminus A, \quad (C \setminus \overline{B}) \cap \overline{A}, \quad \overline{(C \cup B)} \cap A, \quad A \cap B \setminus \overline{C}.$

1.18 $A \cup B \cap \overline{C}, \quad \overline{A \cap B} \setminus C, \quad \overline{A} \cap (B \cup \overline{C}), \quad \overline{A \cap B} \cap C.$

1.19 $A \cap \overline{C} \setminus B, \quad \overline{A \cap C} \cup B, \quad (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus C, \quad (C \setminus A) \cap \overline{B}.$

1.20 $A \setminus (C \cup B), \quad (A \cup \overline{C}) \setminus B, \quad (\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup C, \quad C \cap \overline{(B \setminus A)}.$

Задание 2

2.1 Десять пассажиров наугад рассаживаются в трёх вагонах. Найти вероятность того, что в один вагон сядут 5, другой – 4 и в третий – 2 пассажира.

2.2 В вагон электрички, делающей 10 остановок, на первой остановке вошли три пассажира. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любой из остановок, начиная со второй. Найти вероятность того, что все трое пассажиров выйдут на одной остановке.

2.3 В автобус, делающий 9 остановок, на первой остановке вошли два пассажира. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любой из остановок, начиная со второй. Найти вероятность того, что оба пассажира выйдут на разных остановках.

2.4 В вагон трамвая, делающего 8 остановок, на первой остановке вошли два пассажира. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любой из остановок, начиная со второй. Найти вероятность того, что один из них выйдет на третьей остановке, а другой – на пятой.

2.5 Сколькими способами можно расположить в составе грузового поезда 7 шестиосных полувагонов и 8 четырёхосных платформ так, чтобы платформы не стояли рядом?

2.6 В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 6 человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на одном этаже.

2.7 Депо принимает партию из 20 вагонов, если при проверке четырёх из них, выбранных наугад, все четыре окажутся исправными.

Какова вероятность того, что депо примет партию, содержащую пять неисправных вогонов?

2.8 Среди 35 вагонов состава – три неисправных. Наугад отцепляют два вагона. Какова вероятность того, что среди них нет неисправных?

2.9 В депо для ремонта поступило 20 вагонов. Известно, что 7 из них нуждаются в замене рессор. Бригада ремонтников выбирает любые 7 вагонов. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в замене рессор?

2.10 В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на пятом этаже.

2.11 Десять студентов условились ехать определённым рейсом электрички с 10 вагонами, но не договорились о номере вагона. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если возможности в размещении студентов по вагонам равновероятны?

2.12 Студенты данного курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включаются по четыре предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?

2.13 В ремонтном депо работают 15 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам, наудачу, отобраны 8 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

2.14 В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах.

2.15 На сортировочном пути без подборки в ожидании подачи стоят 8 вагонов. Определить вероятность того, что вагоны стоят в нужном для подачи порядке.

2.16 Камера хранения железнодорожного вокзала открывается при верном наборе кода из четырех символов. Первый символ – одна из 10 букв; оставшиеся символы кода – цифры: $0, \ldots, 9$. С какой вероятностью злоумышленник в течение часа откроет камеру хранения, если на набор каждой комбинации он тратит в среднем 4 секунды?

2.17 Десять студентов условились ехать определённым рейсом электрички с 10 вагонами, но не договорились о номере вагона. Какова вероятность того, что все они сядут в один вагон, если возможности в размещении студентов по вагонам равновероятны?

2.18 В троллейбус, делающий 12 остановок, на первой остановке вошли четыре пассажира. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любой из остановок, начиная со второй. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных остановках.

2.19 Автобусное депо принимает партию из 25 автобусов, если при проверке трёх из них, выбранных наугад, все три окажутся исправными. Какова вероятность того, что депо примет партию, содержащую шесть неисправных автобусов?

2.20 Двенадцать пассажиров наугад рассаживаются в четырёх вагонах. Найти вероятность того, что в один вагон сядут 6, другой – 3 и в третий – 3 пассажира.

Задание 3

3.1 После бури на участке между 50 и 90 километрами железнодорожного пути, по которому движется электричка, произошёл обрыв проводов. Какова вероятность того, что он произошёл между 70-м и 75-м километрами пути?

3.2 Простой состава в ожидании осмотра бригадой пункта технического осмотра (ПТО) в парке прибытия сортировочной станции равновозможен в интервале [10; 60 мин]. Простой в ожидании расформирования состава также равновозможен в интервале [20; 70 мин]. Какова вероятность того, что нерегламентированный простой состава в парке прибытия не привысит 30 минут?

3.3 Два теплохода должны подойти к одному причалу. Моменты прихода обоих теплоходов независимы и равновозможны в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из теплоходов придётся ожидать, пока причал не освободится, если время стоянки первого теплохода один час, а второго – два часа.

3.4 Посадочная система аэродрома обеспечивает заход самолёта на посадку в сложных метеоусловиях с интервалом не менее 10 минут. Два самолёта должны прибыть на аэродром по расписанию: один в 12 часов, другой в 13 часов. Какова вероятность того, что второму самолёту придётся уходить в зону ожидания, если первый самолёт может выйти на аэродром с отклонением от расписания в пределах 15 минут, а второй в пределах 10 минут, при условии, что величины отклонения от расписания в указанных пределах равновозможны.

3.5 Паром перевозит груз с одного берега пролива на другой, пересекая пролив за один час. Какова вероятность того, что идущее вдоль пролива судно будет замечено, если с парома обнаруживают судно в случае, когда пересекают его курс не ранее, чем за 20 минут до пересечения судном курса парома, и не позднее, чем через 20 минут после пересечения судном курса парома? Любой момент и любое место пересечения судном курса парома равновозможны. Курс судна перпендикулярен курсу парома.

3.6 К автобусной остановке через каждые четыре минуты подходит автобус линии *A* и через каждые шесть минут – автобус линии *B*. Интервал времени между моментами прихода автобуса линии *A* и ближайшего автобуса линии *B* равновозможен в пределах от нуля до четырёх минут. Определить вероятность того, что первый подошедший автобус окажется автобусом линии *A*.

3.7 Два судна в тумане: одно идёт вдоль пролива шириной *L*, а другое курсирует без остановок поперёк пролива перпендикулярно курсу первого. Скорости движения судов соответственно равны v_1 и v_2. Второе судно подаёт звуковые сигналы, которые слышны на расстоянии $d < L$. Определить вероятность того, что на первом судне услышат сигналы, если пересечение курсов судов равновозможно в любом месте пролива.

3.8 На перегоне между станциями *A* и *B* длиной *l* одновременно оказались два состава S_1 и S_2. Найти вероятность того, что состав S_1 будет ближе к составу S_2, чем к станции *A*.

3.9 К автобусной остановке через каждые пять минут подходит автобус линии *A* и через каждые семь минут – автобус линии *B*. Интервал времени между моментами прихода автобуса линии *A* и ближайшего автобуса линии *B* равновозможен в пределах от нуля до семи минут. Определить вероятность того, что автобус какой-либо линии подойдёт в течение двух минут.

3.10 Железный лом длиной 150 см, которым пользовались для ремонта пути, случайно ломается на три части. Определить вероятность того, что одна часть лома между точками излома будет не более 50 см, причём излом лома равновозможен в любом месте.

3.11 Спутник Земли движется по орбите, которая заключена между 60° северной и 60° южной широты. Считая падение спутника в

любую точку поверхности Земли между указанными параллелями равновозможным, найти вероятность того, что спутник упадёт выше 30° северной широты.

3.12 Расстояние от пункта *A* до пункта *B* автобус проходит за 10 мин, а пешеход – за 40 мин. Интервал движения автобусов 15 мин. Пешеход выходит из пункта *A* в пункт *B* в случайный момент времени. Найти вероятность того, что в пути его догонит автобус.

3.13 Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии *L*. Найти вероятность того, что наудачу брошенная игла длиной l $(l < L)$ пересечёт какую-нибудь прямую (задача Бюффона).

3.14 Для некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Найти вероятность того, что эта хорда длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность (парадокс Бертрана).

3.15 Двое студентов приходят в столовую в произвольный (равномерно распределенный) момент времени между 13^{00} и 13^{45} часами. Найти вероятность того, что эти студенты встретятся, если каждый из них будет находиться в столовой ровно 15 мин.

3.16 а) В квадрат вписан круг. Определить вероятность того, что точка, взятая наудачу внутри квадрата, окажется внутри круга; б) в куб вписан шар. Определить вероятность того, что точка, взятая наудачу внутри куба, окажется внутри шара.

3.17 Два состава должны подойти к одной узловой станции для переформирования. Моменты прихода обоих составов независимы и равновозможны в течение часа. Определить вероятность того, что одному из составов придётся ожидать своей очереди, если время переформирования первого состава 15 минут, а второго – 20 минут.

3.18 В прямоугольную решетку, образованную прутьями толщиной в 2 см, расстояния между осями которых равны соответственно 12 и 17 см, без прицеливания (случайным образом, перпендикулярно плоскости решетки) бросается мяч диаметром 8 см. Найти вероятность того, что этот мяч пролетит сквозь решетку, не задев прутья.

3.19 Посадочная система аэропорта обеспечивает заход самолёта на посадку в сложных метеоусловиях с интервалом не менее 5 минут. Два аэробуса должны прибыть в аэропорт по расписанию: один в 8 часов, другой в 8^{30} часов. Какова вероятность того, что второму самолёту придётся уходить в зону ожидания, если первый самолёт может выйти на аэропорт с отклонением от расписания в пределах 8 минут, а второй в пределах 16 минут, при условии, что величины отклонения от расписания в указанных пределах равновозможны.

3.20 Лодка перевозит груз с одного берега залива на другой, пересекая залив за два часа. Какова вероятность того, что идущее вдоль залива судно будет замечено, если с лодки обнаруживают судно в случае, когда пересекают его курс не ранее, чем за 15 минут до пересечения судном курса лодки, и не позднее, чем через 15 минут после пересечения судном курса лодки? Любой момент и любое место пересечения судном курса лодки равновозможны. Курс судна перпендикулярен курсу лодки.

Задание 4

4.1 На участке *AB* движения поезда имеется 14 светофоров. Вероятность остановки перед каждым из них равна 0,1. Вероятность того, что от пункта *B* до конечного пункта *C* поезд пройдёт без остановки, равна 0,75. Определить вероятность того, что участок *AC* поезд пройдёт без остановки.

4.2 На вагоностроительном заводе производятся пассажирские вагоны, 97 % из которых не имеют производственного брака. Какова вероятность того, что из трёх наугад выбранных вагонов хотя бы один будет изготовлен без брака?

4.3 В подаче вагонов на контейнерную площадку могут находиться четырёхосная платформа с вероятностью 0,4, четырёхосный полувагон с вероятностью 0,4 и шестиосный полувагон с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что выбранный наудачу вагон окажется полувагоном.

4.4 При приёмки партии изделий половина партии подвергается проверке. По условиям допускается наличие не более 1 % брака. Найти вероятность того, что будет принята партия из 150 деталей, среди которых пять бракованных.

4.5 Автомобили собираются на одной производственной линии. В среднем у одного из 100 обнаруживается производственный брак. Чему равна вероятность того, что два взятых наугад автомобиля окажутся без брака?

4.6 Вероятность появления в поезде вагонов на контейнерную

площадку – 0,25, на грузовой двор – 0,35, на промышленное предприятие – 0,4. Определить вероятность появления в поезде вагонов на все три направления.

4.7 При каждом включении двигатель автомобиля начинает работать с вероятностью 0,85. Какова вероятность того, что для запуска двигателя автомобиля понадобится ровно два включения?

4.8 При некоторых определённых условиях вероятность обнаружить одним радаром аэропорта подлетающий самолёт равна 0,98, а другим – 0,99. Найти вероятность того, что подлетающий самолёт удалось обнаружить обоим радарам.

4.9 На пути движения локомотива пять светофоров. Каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение локомотива с вероятностью 0,65. Какова вероятность того, что локомотив сделает пять остановок?

4.10 На участке движения теплохода по каналу имеется три шлюза. Вероятность прохождения их без задержки для первого шлюза составляет 0,45, второго – 0,65, третьего – 0,5. Найти вероятность того, что теплоход преодолеет без задержек не менее двух шлюзов.

4.11 Студент пришел на зачет, зная из 50 вопросов только 30. Какова вероятность сдать зачет, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса из трех, содержащихся в билете?

4.12 Вероятность прибытия поезда на станцию без опоздания равна 0,89. Найти вероятность того, что шесть последовательно прибывших на станцию поезда опоздали.

4.13 Вероятность опоздания поезда по причине неисправностей оборудования (пути, подвижного состава, автоматики и телемеханики) – 0,007; вследствие диспетчерских ошибок – 0,015; по другим причинам (таможенный осмотр, несчастные случаи и т. п.) – 0,25. Определить вероятность опоздания поезда.

4.14 Студенту необходимо сдать три экзамена. Вероятность сдать первый из них равна 0,95, второй – 0,8, третий – 0,9. Сколько экзаменов он вероятнее всего сдаст в сессию?

4.15 При хороших метеоусловиях вероятность благополучной посадки самолёта равна 0,999, при плохих – 0,998. Для данного аэропорта в 80 % случаев погода считается лётной. Найти вероятность благополучного приземления самолёта.

4.16 Вероятность получения проездного талона, у которого равны сумма трёх первых и трёх последних цифр шестизначного номера (т.н. “счастливый” билет), равна 0,05525. Какова вероятность иметь такой талон среди взятых наудачу, если оба талона получены независимо один отдругого?

4.17 В ремонтном депо работают 16 мужчин и 7 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 5 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся трое мужчин.

4.18 На пути движения троллейбуса три светофора. Вероятность прохождения их без остановки для первого светофора составляет 0,5, второго – 0,65, третьего – 0,35. Найти вероятность того, что троллейбус проедет без остановок мимо всех трёх светофоров.

4.19 На участке *MN* движения автобуса имеется 10 светофоров. Вероятность остановки перед каждым из них равна 0,2. Вероятность того, что от пункта *N* до конечного пункта *K* автобус пройдёт без остановки, равна 0,8. Определить вероятность того, что участок *NK* автобус пройдёт без остановки.

4.20 Вероятность опоздания теплохода по причине неисправностей оборудования (винторулевой установки, двигателя) – 0,03; вследствие штурманских ошибок – 0,01; по другим причинам (погодные условия, несчастные случаи) – 0,4. Определить вероятность опоздания теплохода.

Задание 5

5.1 У остановочной платформы на привокзальной площади останавливаются автобусы 8 маршрутов с одинаковой частотой движения. Определить вероятность того, что из трёх первых автобусов один окажется нужного маршрута.

5.2 Для производственной практики на 35 студентов представлено 19 мест в Минске, 9 мест в Гомеле и 7 мест в Витебске. Какова вероятность того, что три определённых студента попадут на практику в один город.

5.3 Через точку пересечения маршрутов в горловине станции проходит 25 поездов в сутки. Каждый поезд занимает маршрут 5 минут. Определить вероятность занятия маршрута.

5.4 Игра между студентами *A* и *B* ведётся на следующих условиях: в результате первого хода, который всегда делает *A*, он может выиграть с вероятностью 0,35. Если первым ходом *A* не выигрывает, то ход делает *B* и может выиграть с вероятностью 0,5. Если в этом ходу *B* не выигрывает, то *A* делает второй ход, который может привести его к выигрышу с вероятностью 0,45. Определить вероятность выигрыша *B*.

5.5 На сборку тепловозов поступают детали с трёх предприятий. Первое предприятие выпускает 20 %, второе – 30 %, третье – 50 % однотипных деталей, поступающих на сборку. Найти вероятность того, что из трёх наугад взятых деталей, все три с разных предприятий.

5.6 Определить вероятность того, что партия из 100 изделий, среди которых 5 бракованных будет принята при испытании наугад выбранной половины всей партии, если условиями приёма допускается не более одного бракованного изделия из пятидесяти.

5.7 Вагоностроительный завод производит вагоны трёх типов, при этом вагонов первого типа – 60 %, второго – 25 %. Найти вероятность того, что наугад взятый вагон будет второго или третьего типа.

5.8 Автомобили при своей сборке проходят пять последовательных операций, при каждой из которых вероятность получения бракованного автомобиля равна 0,01. Определить вероятность получения бракованного автомобиля.

5.9 Вероятность того, что при одном определении координат судна будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,1. Произведены три независимых определения. Найти вероятность того, что только в одном из них ошибка превысит заданную точность.

5.10 В результате опыта с вероятностями 0,05, 0,1 и 0,2 может произойти одно из трёх событий. Определить вероятность того, что произойдёт любое из этих событий.

5.11 Игра между студентами *A* и *B* ведётся на следующих условиях: в результате первого хода, который всегда делает *A*, он может выиграть с вероятностью 0,35. Если первым ходом *A* не выигрывает, то ход делает *B* и может выиграть с вероятностью 0,5. Если в этом ходу *B* не выигрывает, то *A* делает второй ход, который может привести его к выигрышу с вероятностью 0,45. Определить вероятность выигрыша *A*.

5.12 Вероятность того, что вагон, отремонтированный в первом ремонтном депо, будет отремонтирован без дефектов, равна 0,9. При ремонте такого же вагона во втором ремонтном депо эта вероятность равна 0,85. В первом депо отремонтировано три вагона, а во втором – четыре. Найти вероятность того, что все вагоны будут отремонтированы без дефектов.

5.13 В группе 30 студентов, из них отлично учатся 4 человека, хорошо – 16, удовлетворительно – 6 и неудовлетворительно – 4. Преподаватель вызывает по списку одного из студентов. Определить вероятность того, что вызванный студент или отличник, или хорошист.

5.14 На автобазе 45 автомобилей с пробегом более 10000 км и 15 автомобилей с пробегом менее 10000 км. Найти вероятность того, что три взятых наугад автомобиля имеют пробег более 10000 км, если производится проверка пробега каждого выбранного автомобиля и его возврат на автобазу.

5.15 У остановочной платформы на привокзальной площади останавливаются автобусы 8 маршрутов с одинаковой частотой движения. Определить вероятность того, что из двух первых автобусов один окажется нужного маршрута.

5.16 На трёх судосторительных заводах строят танкеры. Вероятность того, что танкеры, построенные на первом судостроительном заводе, проработают пять лет без капремонта, равна 0,8, на втором – 0,9 и на третьем – 0,7. Для проверки взято по одному танкеру из кораблей, произведённых каждым заводом. Какова вероятность того, что все танкеры проработают пять лет без капремонта.

5.17 В электричку, состоящую из n вагонов, входят $k\,(k \ge n)$ пассажиров, которые выбирают вагоны наудачу. Определить вероятность того, что в каждый вагон войдёт хотя бы один пассажир.

5.18 На автобазе 50 автобусов, из которых 20 произведены на МАЗе. Для перевозки спортсменов на соревнования наугад выбрали три автобуса. Найти вероятность того, что хотя бы один из них произведён МАЗом.

5.19 В очереди, в кассу железнодорожного вокзала, за билетами стоимостью в 10000 руб. стоят $n+m$ человек, из которых n лиц имеют деньги 10000 руб. достоинства, а $m\,(m \le n+1)$ – 20000 руб. достоинства. Каждый покупает только один билет. В кассе до продажи билетов денег нет. Какова вероятность того, что никому из очереди не придётся ожидать сдачи?

5.20 В общий вагон, насчитывающий n пронумерованных мест, n лицам выдали n номерных билетов. Какова вероятность того, что ровно m лиц окажутся сидящими на местах, соответствующих номерам билетов, если все места занимаются наудачу?

Задание 6

6.1 Два депо производят ремонт вагонов, которые поступают в депо прописки. Производительность первого депо втрое больше производительности второго. Вероятность бездефектного ремонта для первого депо равна 0,9, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что из пяти отремонтированных вагонов, взятых из депо прописки, четыре окажутся отремонтированными без дефектов.

6.2 Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трёх билетных касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно p_1, p_2, p_3. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы P_1, для второй – P_2, для третьей – P_3. Пассажир направился в одну из касс и приобрёл билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

6.3 Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Верояность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,25, а вероятность того, будет заправляться легковая машина – 0,3. К бензоколонке подъехала машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

6.4 На пути следования электрички, вероятность повреждения электролинии на участке C_1 протяжённостью 8 км равна 0,25, на участке C_2 протяжённостью 12 км – 0,2, на участке C_3 пртяжённостью 5 км – 0,15. Найти вероятность повреждения электролинии.

6.5 Самолет может выполнять полёты на больших, средних и малых высотах. При этом, в силу сложных метеоусловий, на больших высотах предполагается совершить 15 % всех полетов, на средних – 30 % и на малых – 55 %. Вероятности выхода самолета на заданный аэродром на больших, средних и малых высотах соответственно равны 0,75; 0,85; 0,9. а) Определить вероятность выхода самолета на заданный аэродром; б) Известно, что самолет вышел на заданный аэродром. Определить вероятность того, что полет происходил на малой высоте.

6.6 Пассажир может обратиться за получением билета в одну из четырёх касс вокзала A или в одну из шести касс вокзала B. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,7, для касс вокзала B эта вероятность равна 0,65. а) Найти вероятность того, что пассажир сможет купить билет в наугад выбранной кассе. б) Пассажир приобрел билет. Какова вероятность того, что он куплен в кассе вокзала A?

6.7 Для поисков потерпевшего аварию самолёта выделено 5 вертолётов первого типа и 7 – второго. Каждый вертолёт первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска самолёт с вероятностью 0,65, вертолёт второго типа – с вероятностью 0,75. а) Найти вероятность того, что выбранный наугад вертолёт обнаружит самолёт. б) Известно, что вертолёт обнаружил самолёт. Найти вероятность того, что это был вертолёт второго типа.

6.8 В университете n студентов, из которых n_k $(k=\overline{1,5})$ человек учатся k-й год. Среди двух наудачу выбранных студентов оказалось, что один из них учится больше второго. Какова вероятность того, что этот студент учится третий год?

6.9 Из депо прописки вагон, нуждающийся в ремонте направлен в одно из трёх ремонтных депо. Производительности этих депо соотносятся как 7:5:3. Вероятности бездефектного ремонта вагонов для первого, второго и третьего депо соответственно равны 0,8, 0,85 и 0,75. а) Найти вероятность того, что направленый на ремонт из депо прописки вагон будет отремонтирован без дефектов. б) Известно, что направленый на ремонт из депо прописки вагон был отремонтирован без дефектов. Найти вероятность того, что он подвергался ремонту в первом депо.

6.10 Два из трёх независимо работающих элементов тепловоза отказали. Найти вероятность того, что отказали второй и третий элементы, если вероятность отказа первого, второго и третьего элементов соответственно 0,2, 0,35, 0,4.

6.11 В ремонтном депо к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами изготовителями. На складе имеются электродвигатели названных заводов соответственно в количестве 20, 8 и 12 штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока соответственно с вероятностями 0,85, 0,75 и 0,9. Рабочий берёт случайно один двигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен первым заводом.

6.12 Надёжность автомобиля, собранного из высококачественных деталей, равна 0,96. Если автомобиль собирают из деталей серийного производства, его надёжность равна 0,69. Высококачественные детали составляют 33 % общего числа деталей. Автомобиль безотказно проработал в течение указанного времени. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

6.13 Из партии в 10 троллейбусов наугад взяли один троллейбус, оказавшийся с браком. Количество бракованных троллейбусов равновозможно любое. Какова вероятность того, что в партии все 10 троллейбусов имеют брак.

6.14 Прибор управления трамвая включает два узла, каждый из которых необходим для работы прибора в целом. Вероятность безотказной работы в течение времени t первого узла 0,8, второго – 0,9. Прибор испытывался в течение времени t и в результате было обнаружено, что он вышел из строя. Найти вероятность того, что отказал первый узел, а второй остался исправным.

6.15 На сортировочную станцию прибывают полувагоны, платформы и крытые вагоны с вероятностями, соответственно, 0,25, 0,3, 0,45. Вероятность неисправности полувагона равна 0,02, платформы – 0,05, крытого вагона – 0,01. а) Найти вероятность того, что поступивший на осмотр в парк приёма вагон окажется неисправным. б) Поступивший на осмотр в парк приёма вагон оказался неисправным. Найти вероятность того, что этот вагон является крытым вагоном.

6.16 Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейр. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит 65 % деталей отличного качества, а второй – 85 %. Наугад взятая деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь была произведена первым автоматом.

6.17 Среди продукции, используемой вагоноремонтным заводом, 56 % производится заводом-поставщиком № 1, 28 % – заводом-поставщиком № 2, а остальная часть продукции – заводом-поставщиком № 3. На заводе № 1 в брак идёт 1 % всей производимой им продукции, на заводе № 2 – 1,5 %, на заводе № 3 – 2 %. Купленная вагоноремонтным заводом единица продукции оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она произведена заводом № 1?

6.18 Автомобиль на автобазе подвергся ремонту тремя механиками одновременно (первый ремонтировал двигатель, второй – рулевое управление, третий – менял колёса). После ремонта в автомобиле обнаружился брак. Определить вероятность того, что брак образовался в результате ремонта вторым или третьи механиком. Вероятности брака для всех трёх механиков соответственно равны 0,2, 0,3 и 0,4.

6.19 Трое рабочих на своих станках производят изделия только отличного и хорошего качества, причём первый и второй из них производят изделия отличного качества с вероятностью 0,9, а второй – с вероятностью 0,85. Один из этих рабочих изготовил 10 изделий, среди которых 2 хороших. Какова вероятность того, что среди следующих 10 изделий, изготовленных тем же рабочим, будут 2 хороших и 8 отличных?

6.20 Для поиска определенного объекта выделено 10 вертолетов, каждый из которых может быть использован для поисков в одном из двух возможных районов, где объект может находиться с вероятностями 0,8 и 0,2. Как следует распределить вертолеты по районам поисков, чтобы вероятность обнаружения объекта была наибольшей, если каждый вертолет обнаруживает находящийся в районе поиска искомый объект с вероятностью 0,2, а поиски осуществляются каждым вертолетом независимо от других? Найти вероятность обнаружения объекта при оптимальной процедуре поисков.

Задание 7

7.1 Вероятность прибытия каждого поезда на станцию без опоздания равна 0,96. Найти вероятность того, что из 6 последовательно прибывающих поездов четыре прибудут без опоздания.

7.2 При осмотре в парке отправления составов в каждом из них с вероятностью 0,25 обнаруживаются вагоны, требующие ремонта. Определить наивероятнейшее число составов, в которых есть такие вагоны, если в сутки со станции отправляется 120 поездов и соответствующую этому числу вероятность.

7.3 Вероятность отказа локомотива на линии за время полного оборота равна 0,01. Найти вероятность того, что в десяти поездах произойдут два отказа локомотива на линии.

7.4 На автобазе имеется девять автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,85. Найти вероятность того, что в определенный день на линию выйдут 7 автомашин.

7.5 Для данного прибора вероятность того, что он неисправен, равна 0,45. На складе автобазы имеется 14 таких приборов. Найти наивероятнейшее число неисправных приборов на складе и соответствующую этому числу вероятность.

7.6 Прибор состоит из 12 узлов. Вероятность безотказной работы в течение времени t каждого узла равна 0,95. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t откажут не более трёх узлов.

7.7 Найти наивероятнейшее число положительных ошибок при шести измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна 0,66.

7.8 В бригаде ПТО 11 человек. Вероятность невыхода на работу одного человека в случае болезни равна 0,11. Найти наиболее вероятное число “работающих” и вычислить соответствующую этому числу вероятность.

7.9 В приёмнике радиосвязи с маневровым локомотивом имеется 7 ламп первого типа и 8 ламп второго типа. Вероятность выхода из строя в течение времени t ламп первого типа 0,002, второго – 0,003. Определить вероятность выхода из строя приёмника в результате выхода за время t из строя хотя бы одной лампы.

7.10 На автобазе имеется двенадцать автобусов. Вероятность выхода на линию каждого из них равна 0,9. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее девяти автобусов.

7.11 В ремонтном депо на станке-автомате изготовили 95 деталей. Чему равна вероятность изготовления на этом станке деталей первого сорта, если наивероятнейшее число таких деталей в данной партии равно 84?

7.12 Вероятность хотя бы одного появления события A при проведении четырёх независимых опытов равна 0,59. Какова вероятность появления события A в каждом опыте, если для всех опытов эта вероятность одинакова?

7.13 Вероятность отказа локомотива на линии за время полного оборота равна 0,03. Найти вероятность того, что в девяти поездах произойдут не более трёх отказов локомотива на линии.

7.14 При штамповке изделий бывает в среднем 15 % брака. Для контроля отобрано 10 изделий. Найти вероятность того, что не менее двух изделий окажутся бракованными.

7.15 На автобазе имеется пятнадцать троллейбусов. Вероятность выхода на линию каждого из них равна 0,89. Найти наивероятнейшее число вышедших на линию троллейбусов и соответствующую этому числу вероятность.

7.16 Вероятность изготовления дефектной детали для некоторого станка равна 0,03. Сколько деталей, изготовленных на данном станке необходимо проверить, чтобы с вероятностью не менее чем 0,99 среди них встретилась хотя бы одна дефектная деталь?

7.17 При изготовлении изделий бывает в среднем 17 % брака. Для контроля отобрано 12 изделий. Найти наивероятнейшее число бракованных изделий и вероятность получения наивероятнейшего числа бракованных изделий.

7.18 Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 5 % не удовлетворяют требованиям стандарта. Найти вероятность того, что среди семи заготовок, взятых для контроля, требованиям стандарта не удовлетворяют: а) не более двух заготовок; б) ровно три заготовки.

7.19 При осмотре в парке отправления составов в каждом из них с вероятностью 0,2 обнаруживаются вагоны, требующие ремонта. Определить наивероятнейшее число составов, в которых есть такие вагоны, если в сутки со станции отправляется 100 поездов и соответствующую этому числу вероятность.

7.20 Вероятность того, что изделие успешно пройдет контроль, равна 0,84. Найти вероятность того, что из восьми выбранных наугад изделий контроль успешно пройдут: а) не менее пяти изделий; б) не более шести изделий.

Задание 8

Депо производит ремонт вагонов. Вероятность того, что ремонт будет произведён со сдачей с первого предъявления, равна p. Найти вероятность того, что из n вагонов, отремонтированных в депо:

а) ровно k вагонов будут сданы с первого предъявления;

б) от k_1 до k_2 вагонов будут сданы с первого предъявления.

Данные взять из таблицы:

Номер варианта	p	n	k	k_1	k_2
1	0,7	200	100	120	150
2	0,75	100	60	40	70
3	0,45	200	130	80	120
4	0,65	100	90	40	70
5	0,6	200	90	100	140
6	0,55	200	70	130	190
7	0,45	200	140	140	190
8	0,6	200	100	150	200
9	0,7	100	85	45	65
10	0,8	200	80	120	180
11	0,55	200	90	60	100
12	0,6	100	70	80	90
13	0,85	200	35	50	65
14	0,56	200	95	145	160
15	0,69	100	85	40	75
16	0,6	200	170	100	165
17	0,6	100	80	40	60
18	0,35	100	20	20	40
19	0,45	200	130	80	125
20	0,58	100	150	100	170

Задание 9

Задан закон распределения дискретой случайной величины ξ:

1) Построить столбцовую диаграмму и многоугольник распределения.

2) Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ и построить её график.

3) Вычислить числовые характеристики случайной величины ξ (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду).

9.1

x_i	1	2	3	4
$P(\xi = x_i)$	0,6	0,2	0,1	0,1

9.2

x_i	100	120	80	60
$P(\xi = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

9.3

x_i	–40	–20	0	20
$P(\xi = x_i)$	0,6	0,1	0,1	0,2

9.4

x_i	–7,5	–5,3	3,1	8,7
$P(\xi = x_i)$	0,5	0,1	0,3	0,1

9.5

x_i	2,1	3,5	12,6	44,8
$P(\xi = x_i)$	0,2	0,3	0,3	0,2

9.6

x_i	–8,4	–5,2	0,7	8,9
$P(\xi = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

9.7

x_i	1,5	2,5	3,5	4,5
$P(\xi = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

9.8

x_i	–3,2	–2,6	0,4	5,9
$P(\xi = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

9.9

x_i	–4	–3	–2	–1
$P(\xi = x_i)$	0,6	0,1	0,1	0,2

9.10

x_i	2	4	8	16
$P(\xi = x_i)$	0,2	0,2	0,4	0,2

9.11

x_i	–27	–17	–7	0
$P(\xi = x_i)$	0,6	0,1	0,2	0,1

9.12

x_i	3	5	7	9
$P(\xi = x_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1

9.13

x_i	0,5	0,25	0,125	0,6
$P(\xi = x_i)$	0,7	0,1	0,1	0,1

9.14

x_i	–10	–8	–6	–4
$P(\xi = x_i)$	0,15	0,25	0,35	0,25

9.15

x_i	–4	0	12	16
$P(\xi = x_i)$	0,3	0,1	0,4	0,2

9.16

x_i	1,2	2,4	4,6	6,8
$P(\xi = x_i)$	0,25	0,25	0,15	0,35

9.17

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4
$P(\xi = x_i)$	0,6	0,1	0,2	0,1

9.18

x_i	0,5	1	1,5	2
$P(\xi = x_i)$	0,1	0,8	0,05	0,05

9.19

x_i	1	3	34	88
$P(\xi = x_i)$	0,01	0,01	0,62	0,36

9.20

x_i	–23	–18	–11	–4
$P(\xi = x_i)$	0,65	0,15	0,15	0,05

Задание 10

Задана плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины ξ:

1) Вычислить параметр A и построить график функции плотности распределения $f(x)$.

2) Вычислить интегральную функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

3) Вычислить числовые характеристики случайной величины ξ (математическое ожидание, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение).

4) Найти верятность попадания случайной величины ξ в интервал $(\alpha;\beta)$.

10.1

$$f(x)=\begin{cases} A\cos^2 x, & x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]; \\ 0, & x\notin\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \qquad \alpha=\frac{\pi}{4},\quad \beta=\frac{\pi}{3}.$$

10.2

$$f(x)=\begin{cases} A(5-x^3), & x\in[0;5]; \\ 0, & x\notin[0;5]; \end{cases} \qquad \alpha=2,\quad \beta=3.$$

10.3

$$f(x)=\begin{cases} Ax^3, & x\in[0;2]; \\ 0, & x\notin[0;2]; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}5,\quad \beta=2.$$

10.4

$$f(x)=\begin{cases} A\ln(1+x), & x\in[0;1]; \\ 0, & x\notin[0;1]; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}3,\quad \beta=0{,}6.$$

10.5

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & x\in[0;3]; \\ 0, & x\notin[0;3]; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}5,\quad \beta=2.$$

10.6

$$f(x)=\begin{cases} A(e^x+e^{-x}), & x\in[0;2]; \\ 0, & x\notin[0;2]; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}5,\quad \beta=1{,}5.$$

10.7

$$f(x)=\begin{cases} A(x^2+8), & x\in[0;4]; \\ 0, & x\notin[0;4]; \end{cases} \qquad \alpha=2,\quad \beta=3.$$

10.8

$$f(x)=\begin{cases} A\ln(3+x), & x\in[-1;1]; \\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases} \qquad \alpha=0,\quad \beta=1.$$

10.9

$$f(x)=\begin{cases} A|\sin x|, & x\in[-1;1]; \\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases} \qquad \alpha=-0{,}2,\quad \beta=0{,}3.$$

10.10

$$f(x)=\begin{cases} A\sqrt{1-x^2}, & x\in[0;2]; \\ 0, & x\notin[0;2]; \end{cases} \qquad \alpha=0,\quad \beta=0{,}7.$$

10.11

$$f(x)=\begin{cases} x^2+A|x|, & x\in[-2;\,2];\\ 0, & x\notin[-2;\,2]; \end{cases} \qquad \alpha=0,\quad \beta=1.$$

10.12

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{1+x^2}}, & x\in[-1{,}5;\,2{,}5];\\ 0, & x\notin[-1{,}5;\,2{,}5]; \end{cases} \qquad \alpha=0,\quad \beta=1{,}5.$$

10.13

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{-x}, & x\in[0;\,1];\\ 0, & x\notin[0;\,1]; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}5,\quad \beta=0{,}9.$$

10.14

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{Ax}{1-x^2}, & x\in[0;\,3];\\ 0, & x\notin[0;\,3]; \end{cases} \qquad \alpha=1,\quad \beta=2.$$

10.15

$$f(x)=\begin{cases} A\sin 2x, & x\in\left[\dfrac{3\pi}{4};\,\pi\right];\\ 0, & x\notin\left[\dfrac{3\pi}{4};\,\pi\right]; \end{cases} \qquad \alpha=\frac{3\pi}{4},\quad \beta=\frac{3\pi}{2}.$$

10.16

$$f(x)=\begin{cases} A\cos 3x, & x\in[-\pi;\,\pi];\\ 0, & x\notin[-\pi;\,\pi]; \end{cases} \qquad \alpha=-\frac{\pi}{2},\quad \beta=\frac{\pi}{2}.$$

10.17

$$f(x)=\begin{cases} Ax^3, & x\in[-2;\,5];\\ 0, & x\notin[-2;\,5]; \end{cases} \qquad \alpha=0,\quad \beta=3.$$

10.18

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & x\in[0;\,4];\\ 0, & x\notin[0;\,4]; \end{cases} \qquad \alpha=2,\quad \beta=3.$$

10.19

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{-2x}, & x\in[0;\,8];\\ 0, & x\notin[0;\,8]; \end{cases} \qquad \alpha=0,\quad \beta=4.$$

10.20

$$f(x)=\begin{cases} Ax^5, & x\in[-1;\,5];\\ 0, & x\notin[-1;\,5]; \end{cases} \qquad \alpha=2,\quad \beta=5.$$

Задание 11

11.1 На основании статистических данных, сотрудники транспортной компании знают, что 5 % клиентов, делающих предварительный заказ на транспортные услуги, не будут его использовать. На ближайший день компания получила 150 заказов. Какова вероятность того, что для их осуществления понадобится: а) ровно 150 транспортных средств; б) не более 120 транспортных средств?

11.2 Вал, изготовленный автоматом, считается стандартным, если отклонение его диаметра от проектного размера не превышает 1,8 мм. Случайные отклонения диаметра валов подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением 1,2 мм и математическим ожиданием, равным 0. Сколько стандартных валов (в процентах) изготовляет автомат?

11.3 Время безотказной работы самолетного радиоэлектронного оборудования в полёте является случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону. Определить вероятность безотказной работы оборудования в течение десятичасового полёта, если среднее время безотказной работы по статистическим данным составляет 250 часов.

11.4 Случайное отклонение размера детали от номинала при изготовлении её на данном станке имеет нулевое математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, равное 5 мк. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,95 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение от номинала не более чем на 2 мк?

11.5 Известно, что еженедельный выпуск продукции на заводе может рассматриваться как случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием 125500 ед. Определить среднее квадратическое отклонение этой величины, если известно, что с вероятностью 0,96 величина еженедельного выпуска продукции находится в диапазоне от 130000, до 140000.

11.6 Срок службы технического устройства является случайной величиной, подчиняющейся нормальному закону распределения с математическим ожиданием 115 месяцев и средним квадратическим отклонением 32 месяца. На сколько месяцев можно дать гарантию, чтобы число бесплатных ремонтов не превышало: а) 16,87 %; б) 2,78 %?

11.7 Размер деталей подчинен закону нормального распределения с математическим ожиданием 15 мм и дисперсией 0,25 $мм^2$. Определить ожидаемый процент брака, если допустимые размеры деталей находятся в пределах от 14 до17 мм.

11.8 Найти среднее время безотказной работы электронного устройства, если известно, что для данного устройства вероятность работы без сбоев в течение 500 часов равна 0,75. Предполагается, что время безотказной работы распределено по экспоненциальному закону.

11.9 Цена деления шкалы вольтметра равна 0,2 В. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) не превышающая 0,03 В; б) положительная ошибка, превышающая 0,02 В.

11.10 Коммутатор учреждения обеспечивает соединение абонентов по внутренней связи. Известно, что для некоторого промежутка времени рабочего дня среднее число вызовов, поступающих в течение 1 минуты, равно 1,5. Поток вызовов можно считать простейшим. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что: а) в течение минуты поступит хотя бы один вызов; б) в течение трех минут произойдет не менее пяти вызовов.

11.11 Рабочий обслуживает 800 станков. Для каждого станка вероятность отказа в течение смены равна 0,005. Найти вероятность того, что в течение смены произойдет не более трёх отказов.

11.12 По данным длительной проверки качества изделий определенного вида, известно, что 95 % изделий данного вида выдерживают

гарантийный срок эксплуатации. Определить математическое ожидание и дисперсию числа изделий, не выдержавших гарантийный срок эксплуатации среди 750 изготовленных изделий.

11.13 Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения – 7 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

11.14 Трамваи данного маршрута идут с интервалом в 6 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее, чем через 1 мин после ухода предыдущего трамвая, но не позднее, чем за 2 мин до отхода следующего трамвая?

11.15 Предполагая, что время, необходимое для ремонта поступившего вагона, распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0{,}25\,(ч^{-1})$, найти вероятность того, что для ремонта одного вагона понадобится не более пяти часов.

11.16 Поток грузовых железнодорожных составов, прибывающих на сортировочную горку, можно считать простейшим с интенсивностью 5 составов/ч. Найти вероятность того, что в течение 50 минут на горку прибудет хотя бы один состав.

11.17 Считается, что изделие – высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине 3,7 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинального подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 150 изготовленных.

11.18 Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандартной является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Систематические отклонения размера детали от номинала отсутствуют. Зная, что длина стандартной детали 45 см, а среднее квадратичное отклонение равно 0,4 см, определить, какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,9.

11.19 Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 55 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Найти вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м.

11.20 Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 60 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 120 м. Найти вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

Задание 12

Закон распределения системы двух дискретных случайных величин (ξ, η) задан матрицей распределения:

1) Найти законы распределения случайных величин ξ и η.

2) Вычислить числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин ξ и η, математическое ожидание произведения $\xi\eta$, корреляционный момент η и коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$).

3) Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми.

12.1

(ξ, η)	$\eta = -2$	$\eta = 0$	$\eta = 4$
$\xi = -1$	0,1	0,25	0,15
$\xi = 1$	0,2	0,1	0,2

12.2

(ξ, η)	$\eta = 1$	$\eta = 10$	$\eta = 100$
$\xi = 1$	0,12	0,18	0,2
$\xi = 2$	0,4	0,05	0,05

12.3

(ξ, η)	$\eta = -1$	$\eta = -10$	$\eta = -100$
$\xi = 0$	0,2	0,4	0,1
$\xi = -1$	0,15	0,05	0,1

12.4

(ξ, η)	$\eta = 25$	$\eta = 50$	$\eta = 75$
$\xi = -5$	0,1	0,25	0,05
$\xi = 0$	0,02	0,42	0,16

12.5

(ξ, η)	$\eta = -3$	$\eta = -2$	$\eta = -1$
$\xi = 10$	0,1	0,4	0,5
$\xi = 100$	0,25	0,01	0,01

12.6

(ξ, η)	$\eta = -7{,}2$	$\eta = -6$	$\eta = -4{,}8$
$\xi = 6$	0,2	0,1	0,25
$\xi = 12$	0,2	0,05	0,2

12.7

(ξ, η)	$\eta = -1$	$\eta = 2$	$\eta = 5$
$\xi = 1{,}2$	0,17	0,2	0,25
$\xi = 2{,}4$	0,11	0,14	0,2

12.8

(ξ, η)	$\eta = 4$	$\eta = 16$	$\eta = 64$
$\xi = -9$	0,1	0,1	0,35
$\xi = -3$	0,05	0,1	0,3

12.9

(ξ, η)	$\eta = 10$	$\eta = 20$	$\eta = 100$
$\xi = -3$	0,14	0,12	0,24
$\xi = 3$	0,25	0,05	0,2

12.10

(ξ, η)	$\eta = 3$	$\eta = 9$	$\eta = 27$
$\xi = 1{,}4$	0,05	0,1	0,6
$\xi = 4{,}8$	0,02	0,05	0,18

12.11

(ξ, η)	$\eta = -8$	$\eta = 2$	$\eta = 36$
$\xi = 2{,}5$	0,11	0,37	0,2
$\xi = 7$	0,04	0,12	0,16

12.12

(ξ, η)	$\eta = 4$	$\eta = 9$	$\eta = 16$
$\xi = 2$	0,1	0,2	0,06
$\xi = 3$	0,32	0,1	0,22

12.13

(ξ, η)	$\eta = 2{,}4$	$\eta = 3{,}6$	$\eta = 4{,}8$
$\xi = -1$	0,1	0,3	0,2
$\xi = 1$	0,1	0,1	0,2

12.14

(ξ, η)	$\eta = -1{,}4$	$\eta = 1{,}2$	$\eta = 4{,}4$
$\xi = 0{,}5$	0,2	0,1	0,1
$\xi = 2{,}5$	0,3	0,2	0,1

12.15

(ξ, η)	$\eta = 0{,}1$	$\eta = 0{,}6$	$\eta = 3{,}6$
$\xi = 1$	0,05	0,07	0,36
$\xi = 2$	0,27	0,2	0,05

12.16

(ξ, η)	$\eta = 1$	$\eta = 5$	$\eta = 25$
$\xi = -10$	0,5	0,1	0,1
$\xi = -1$	0,15	0,1	0,05

12.17

(ξ, η)	$\eta = 10$	$\eta = 20$	$\eta = 30$
$\xi = 2{,}5$	0,32	0,1	0,23
$\xi = 5$	0,1	0,03	0,22

12.18

(ξ, η)	$\eta = 14$	$\eta = 17$	$\eta = 35$
$\xi = -20$	0,15	0,05	0,35
$\xi = -10$	0,25	0,05	0,15

12.19.

(ξ, η)	$\eta = -3{,}5$	$\eta = 3{,}5$	$\eta = 10{,}5$
$\xi = -3{,}2$	0,5	0,06	0,02
$\xi = 1{,}4$	0,04	0,28	0,1

12.20

(ξ, η)	$\eta = 50$	$\eta = 100$	$\eta = 200$
$\xi = -1{,}2$	0,2	0,25	0,1
$\xi = 2{,}4$	0,1	0,1	0,25

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(справочное)

Таблица значений функции плотности стандартного нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
∞	0,0000									

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(справочное)

Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	0,3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	0,4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	0,49865									
3,1	0,49903									
3,2	0,49931									
3,3	0,49952									
3,4	0,49966									
3,6	0,499841									
3,8	0,499928									
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,4999997									
∞	0,5									

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Андронов, А. М.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. для вузов / А. М. Андронов, Е. А. Копытов, Л. Я. Гринглаз. – СПб. : Питер, 2004. – 461 с.

2 **Бородин, А. Н.** Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А. Н. Бородин. – СПб. : Лань, 1998. – 224 с.

3 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей : учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – 5-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 576 с.

4 **Герасимович, А. И.** Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск : Выш. шк., 1983. – 275 с.

5 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.

6 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 400 с.

7 **Малинковский, Ю. В.** Теория вероятностей и математическая статистика (часть 1. Теория вероятностей) : учеб. пособие / Ю. В. Малинковский. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2004. – 355 с.

8 **Пугачёв, В. С.** Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Пугачёв. – М. : Наука, 1979. – 496 с.

9 **Шевченко, Д. Н.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб.-метод. пособие / Д. Н. Шевченко.– Гомель : УО «БелГУТ», 2006.– 318 с.

10 **Лагойкин, А. Н.** Теория вероятностей (сборник заданий и методические указания по РГР) / А. Н. Лагойкин, В. С. Серёгина, А. Ю. Сокольский. – Гомель : БелГУТ, 1994. – 52 с.

11 **Сазонова, Е. Л.** Теория вероятностей : пособие для студентов ФБО. Ч.1. Теория вероятностей / Е. Л. Сазонова; под ред. В. С. Серёгиной. – Гомель : БелГУТ, 2000. – 95 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Евдокимович Владислав Евгеньевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие
для студентов всех специальностей факультета УПП

Редактор М. П. Дежко
Технический редактор В. Н. Кучерова
Корректор Т. М. Ризевская

Подписано в печать 08.10.2007 г. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 5,65. Тираж 250 экз.
Зак. № Изд. № 70.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта
ЛИ № 02330/0133394 от 19.07.2007 г.
ЛП № 02330/0148780 от 30.04.2004 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.