МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА

Кафедра «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Е. Л. САЗОНОВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Часть 1

Теория вероятностей

Пособие для студентов факультета безотрывного обучения

Гомель 2000

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА

Кафедра «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Е. Л. САЗОНОВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Часть 1

Теория вероятностей

Пособие для студентов факультета безотрывного обучения

Под редакцией канд. физ.-мат. наук, доцента **В. С. Серёгиной**

Одобрено методической комиссией
факультета безотрывного обучения

Гомель 2000

УДК 519.2
С 148

Е. Л. Сазонова
С 148 Теория вероятностей и математическая статистика. Ч. 1. Теория вероятностей: Пособие для студентов факультета безотрывного обучения/ Под ред. В. С. Серёгиной. – Гомель: БелГУТ, 2000. – 95 с.

Содержатся основные сведения курса теории вероятностей для технических вузов, примеры решения задач, задания для контрольной работы № 1 и пример её выполнения.

Предназначено для студентов факультета безотрывного обучения всех специальностей.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» БелГУТа **А. М. Щербо**;
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математических проблем управления ГГУ им. Ф. Скорины **С. П. Жогаль**.

Учебное издание

Елена Леонидовна Сазонова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
Часть 1. Теория вероятностей

Пособие для студентов факультета безотрывного обучения

Редактор И. И. Эвентов
Корректор Н. А. Дашкевич
Технический редактор В. Н. Кучерова
Компьютерный набор и вёрстка кафедры «Прикладная математика» БелГУТа

Подписано в печать 02.06.2000. Формат бумаги 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Бумага газетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,58. Уч.-изд. л. 5,85. Тираж 600 экз.
Зак. № 1314. Изд. № 3172.

Редакционно-издательский отдел БелГУТа, 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
Лицензия ЛВ № 57 от 22.10.1997.

Типография БелГУТа, 246022, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
Лицензия ЛП № 360 от 26.07.1999.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении явлений окружающего мира, в научных и технических исследованиях часто встречаемся с так называемыми вероятностными (случайными) экспериментами. **Вероятностными экспериментами** называются испытания, которые могут быть многократно воспроизведены при соблюдении одних и тех же фиксированных условий, результат которых не удается заранее однозначно предсказать. Приведем несколько примеров случайных экспериментов:

– подбрасывание монеты;
– подбрасывание игральной кости;
– подсчет числа сбоев оборудования в течение смены;
– измерение времени работы прибора до первого отказа;
– измерение массы прореагировавшего в течение времени t вещества;
– измерение отклонения размера детали от номинала, и т. д.

Наблюдаемое различие в результатах экспериментов обусловлено воздействием большого числа неконтролируемых факторов, не заданных в числе основных условий испытаний и вносящих различия в его результаты. И хотя при наличии случайных факторов результат каждого отдельного наблюдения предсказать невозможно, практика показывает, что, наблюдая в совокупности результаты большого числа случайных экспериментов, в них обнаруживают своего рода *устойчивости* (*закономерности*). Причем эти закономерности проявляются тем значительнее, чем обширнее массив наблюдаемых данных.

Изучение таких закономерностей, возникающих при взаимодействии большого числа случайных факторов, и разработка математических моделей случайных экспериментов являются предметом **теории вероятностей**. Знание методов теории вероятностей позволяет инженеру использовать математические модели для решения практических задач. Однако, как правило, теория вероятностей не занимается вопросами, насколько хорошо построена математическая модель и хорошо ли она согласуется с практикой. Для исследования этих вопросов применяются методы **математической статистики**.

Подчеркнем еще раз, что необходимыми условиями применения вероятностно-статистических методов являются:

1) возможность (хотя бы мысленно реально представимая) многократного повторения интересующих нас наблюдений в одних и тех же условиях;

2) наличие большого числа случайных факторов, вносящих элемент неопределенности в результаты наблюдений;

3) наличие определенных количественных закономерностей, проявляющихся при многократном повторении вероятностных экспериментов в одних и тех же условиях.

Результаты экспериментов можно охарактеризовать *качественно* и *количественно*.

Качественная характеристика заключается в регистрации какого-либо явления, которое может наблюдаться или не наблюдаться при данном испытании. Любое из таких явлений называется **случайным событием**.

Количественная характеристика испытания состоит в определении значений некоторых величин, которыми интересуются при данном испытании. В силу действия большого числа неконтролируемых факторов эти величины могут принимать различные значения в результате испытания. До проведения эксперимента невозможно предсказать значение интересующей нас величины, поэтому она называется **случайной величиной**.

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1 Пространство элементарных событий. Операции над событиями

1.1.1 Пространство элементарных событий

Для построения математической модели исследуемого вероятностного эксперимента необходимо сначала выяснить, что представляют собой возможные исходы этого эксперимента.

Случайным событием (или просто **событием**) называется любой факт, который в результате эксперимента со случайным исходом может произойти или не произойти.

Различают *составные* (или разложимые) события и *элементарные* (или неразложимые) события.

Каждое составное событие может быть представлено в виде совокупности элементарных событий (т. е. может быть разложено на составляющие его элементарные события). По определению, каждый неразложимый исход опыта представляется одним и только одним элементарным событием.

Совокупность всех возможных в данном вероятностном эксперименте элементарных событий называется **пространством элементарных событий** этого эксперимента и обозначается Ω.

В результате испытания происходит одно и только одно из элементарных событий. Если наступление этого элементарного события влечет за собой появление события A, то говорят, что данное элементарное *событие благоприятно событию* A. Таким образом, любое событие, связанное с данным испытанием, можно описать в виде совокупности благоприятных ему элементарных событий.

Пример 1. Испытание состоит в подбрасывании игральной кости (шестигранного кубика, на сторонах которого нанесены цифры от 1 до 6). Пространство элементарных событий этого эксперимента можно представить в виде $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где каждый из исходов соответствует числу очков, выпавших на верхней грани.

Рассмотрим события: A – {выпадение четного числа очков}; B – {выпадение числа очков, не большего двух}; C – {выпадение числа очков, кратного трем}.

Эти события легко представить в виде совокупности благоприятных им элементарных исходов: $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$; $B = \{\omega_1, \omega_2\}$; $C = \{\omega_3, \omega_6\}$.

Пространство элементарных событий называется *дискретным*, если оно состоит из конечного или счетного числа элементов.

Пространство элементарных событий, состоящее из несчетного числа элементов, называется *непрерывным*.

В общем случае пространство элементарных событий Ω может быть любой природы, как конечным, так и бесконечным, как дискретным, так и непрерывным.

Например, пусть опыт состоит в произведении выстрела по мишени. Если нас интересует только сам факт попадания в мишень, то элементарными исходами служат $\omega_1 = $ {попадание в мишень} и $\omega_0 = $ {непопадание в мишень}. Если важно зафиксировать попадание в отдельные области мишени, то элементарными событиями могут быть $\omega_{10} = \{10\}$, $\omega_9 = \{9\}$, … $\omega_1 = \{1\}$ (эти элементарные исходы соответствуют числу очков, приписанных попаданию в определенную область) и $\omega_0 = \{0\}$ (непопадание в мишень). Наконец, если существенно важной является информация о том, в какую именно точку щита произошло попадание, то произвольный элементарный исход $\omega = \{x, y\}$ представляет собой координаты точки попадания, а пространство элементарных исходов – это множество всех точек щита.

1.1.2 Операции над событиями

Пусть имеется пространство элементарных событий произвольной природы. Будем рассматривать в качестве событий подмножества A, B, C, ... этого пространства.

Событие, благоприятными которому являются все возможные элементарные исходы, называется **достоверным событием**. Это событие происходит при любом исходе эксперимента.

Ко всему пространству элементарных событий Ω добавляется еще пустое множество $\varnothing$, которое тоже рассматривается как событие и называется **невозможным событием**. В результате эксперимента оно не может произойти.

Суммой (объединением) событий A и B (обозначается $A \cup B$ или $A + B$) называется событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий A или B. Благоприятными событию $A \cup B$ являются все исходы, благоприятные хотя бы одному из событий A или B.

Аналогично определяется **сумма любого числа событий** $A_1 \cup A_2 \cup \cup A_3 \cup \ldots$ Это событие состоит в осуществлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3,… Благоприятными этому событию являются все элементарные исходы, благоприятные хотя бы одному из событий A_1, A_2, A_3 , …

Произведением (пересечением) событий A и B (обозначается $A \cap B$ или AB) называется событие, состоящее в одновременном осуществлении событий A и B. Событию $A \cap B$ благоприятны исходы, благоприятные и событию A и событию B.

Согласно определению, **произведение любого числа событий** $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$ состоит в одновременном осуществлении событий A_1, A_2, A_3,… Благоприятными этому событию являются исходы, благоприятные всем рассматриваемым событиям A_1, A_2, A_3, …

Разностью событий A и B (обозначается $A \setminus B$, или $A - B$) называется событие, состоящее в осуществлении события A без осуществления события B. Событие $A \setminus B$ состоит из всех элементарных исходов, благоприятных событию A, за исключением исходов, благоприятных событию B.

Противоположным событию *A* называется событие $\overline{A}$, состоящее в ненаступлении события A. Событию $\overline{A}$ благоприятны все возможные исходы пространства элементарных событий, кроме тех, которые благоприятны событию A. То есть $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

События *A* и *B* называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно, то есть одновременное осуществление событий A и B есть событие невозможное ($A \cap B = \varnothing$).

В рассмотренном выше **примере 1**:

$A \cup B$ состоит в выпадении либо четного числа очков, либо числа очков, не большего двух: $A \cup B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_6\}$;

$A \cap B$ состоит в выпадении четного числа очков, и при этом числа очков, не большего двух: $A \cap B = \{\omega_2\}$;

$A \setminus B$ состоит в выпадении четного числа очков, большего двух: $A \setminus B = \{\omega_4, \omega_6\}$;

$\overline{A}$ состоит в выпадении нечетного числа очков: $\bar{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$;

$\overline{B}$ состоит в выпадении числа очков, большего двух: $\overline{B} = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

События B и C являются несовместными. То есть ни одно элементарное событие не является одновременно благоприятным и событию B, и событию C, так как на игральной кости не может выпасть число очков, не большее двух, и при этом кратное трем.

Пример 2. Производится испытание: два стрелка производят по одному выстрелу (каждый по своей мишени). Рассмотрим события: A – {попадание в мишень первого стрелка}; B – {попадание в мишень второго стрелка}. Тогда:

$A \cup B$ – {попадание в мишень хотя бы одного из стрелков};

$A \cap B$ – {попадание в мишень обоих стрелков};

$A \setminus B$ – {попадание в мишень первого стрелка и непопадание второго};

$\overline{A}$ – {промах первого стрелка}; $\overline{B}$ – {промах второго стрелка}.

Пример 3. Производится испытание: в прямоугольнике, изображенном на рисунке 1, выбирается наугад точка. Пространством элементарных исходов Ω данного эксперимента является множество всех точек данного прямоугольника. (Это пространство элементарных исходов является непрерывным.) Рассмотрим события: A – {выбранная точка попала в область A}; B – {выбранная точка попала в область B}. Области, попадание в которые благоприятно событиям A, $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, изображены на следующих рисунках:

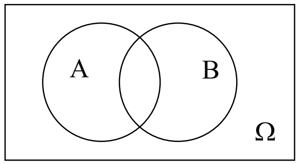
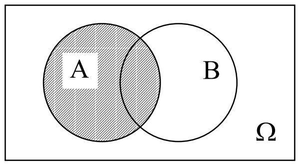
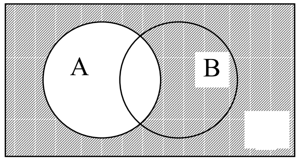


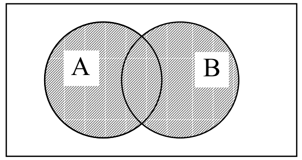
Рисунок 1



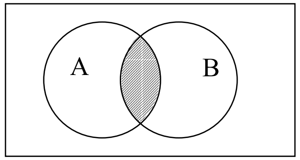
A



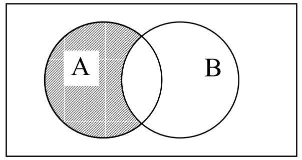
$\overline{A}$



$A \cup B$



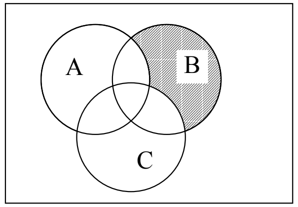
$A \cap B$



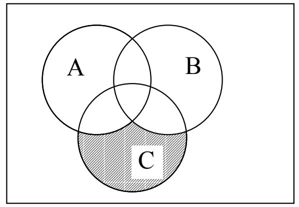
$A \setminus B$

Пусть рассматриваются три события: A, B, C. На приведенных ниже рисунках изображены области, попадание в которые благоприятно событиям:

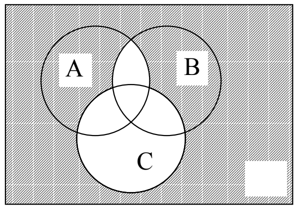
$$\overline{A} \cap (B \setminus C),\ (\overline{A \cup B}) \cap C,\ \overline{A \cap B} \setminus C,\ A \setminus B \cup C.$$



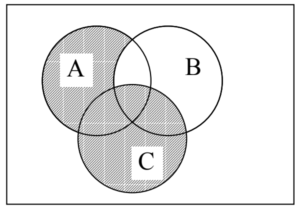
$\overline{A} \cap (B \setminus C)$



$(\overline{A \cup B}) \cap C$



$\overline{A \cap B} \setminus C$



$A \setminus B \cup C$

1.2 Вероятность

1.2.1 Аксиомы теории вероятностей

Для того чтобы сравнивать между собой события по степени их возможности, необходимо связать с каждым из них некоторое число, которое тем больше, чем более возможно наступление события. Это число называется **вероятностью** события.

Необходимо подчеркнуть, что вероятность есть объективная величина, существующая независимо от познающего и обусловливаемая всей совокупностью условий, которые способствуют появлению события.

Сформулируем **основное положение теории вероятностей**. Пусть дано *дискретное* пространство элементарных событий Ω с элементами ω_1, ω_2, ω_3,… Полагаем, что каждому из элементарных событий ω_i поставлена в соответствие некоторая неотрицательная числовая характеристика $p_i = P(\omega_i)$, называемая **вероятностью** этого события, причем

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + ... = \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1.$$

(Для определения вероятностей событий в *непрерывных* пространствах элементарных исходов необходимо привлекать более сложный математический аппарат. Этот случай здесь рассматриваться не будет.)

По определению, вероятность $P(A)$ любого события A равна сумме вероятностей всех составляющих его элементарных событий:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i).$$

Рассмотрим аксиомы, которым должны удовлетворять вероятности любых событий:

А1 (Аксиома неотрицательности). Вероятность любого события A есть неотрицательное число:

$$P(A) \geq 0, \text{ для любого события } A.$$

А2 (Аксиома нормированности). Вероятность достоверного события (всего пространства элементарных исходов Ω) равна единице:

$$P(\Omega) = 1.$$

А3 (Аксиома аддитивности). Вероятность суммы счетного числа несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

Основные следствия из аксиом теории вероятностей:

1. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.

2. Вероятность любого случайного события есть число, заключенное в отрезке от нуля до единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$.

3. Вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию A, можно определить следующим образом: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

1.2.2 Классический метод определения вероятности

Если пространство элементарных событий некоторого эксперимента состоит из конечного числа элементов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, причём все исходы являются симметричными и в силу этого равновозможными, т. е.

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n),$$

то для определения вероятности любого события A, связанного с данным экспериментом, можно воспользоваться так называемым **классическим методом определения вероятности**, согласно которому вероятность любого события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где m – число элементарных исходов, благоприятных событию A; n – общее число исходов пространства элементарных событий.

Пример 4. На сортировочную станцию прибыли вагоны из Орши, Могилева и Витебска. Предполагая равновозможными все варианты очередности разгрузки этих трех вагонов, найти вероятности событий:

A – {вагон из Орши будет разгружен первым};

C – {вагон из Могилева будет разгружен не ранее, чем вагон из Витебска}.

Р е ш е н и е. Пространство элементарных исходов в данном случае состоит из шести элементов: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ $(n = 6)$. Для удобства можно ввести условные обозначения элементарных исходов: $\Omega = \{OMB, OBM, MOB, MBO, BOM, BMO\}$, где, например, исход OMB соответствует такой последовательности разгрузки вагонов: из Орши – из Могилева – из Витебска. Таким образом:

$A = \{OMB, OBM\}$, $(m = 2)$, $P(A) = m/n = 2/6 = 1/3$.

$C = \{OBM, BOM, BMO\}$, $(m = 3)$, $P(C) = m/n = 3/6 = 0{,}5$.

Пример 5. Правильная монета подбрасывается три раза. Найти вероятности событий: A – {герб выпал только один раз}; B – {при втором подбрасывании выпал герб}; C – {в результате подбрасываний герб выпал хотя бы один раз}.

Р е ш е н и е. Пространство элементарных исходов данного эксперимента состоит из восьми элементов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8\}$ и может быть представлено в условных обозначениях следующим образом: $\Omega = \{РРР, ГРР, РГР, РРГ, ГГР, ГРГ, РГГ, ГГГ\}$, $(n = 8)$, где, например, исход $ГРР$ соответствует тому, что в результате первого подбрасывания монета упала кверху гербом, а во втором и третьем подбрасываниях – кверху решкой (цифрой).

Как будет показано в дальнейшем (см. замечание на с. 16), из предположения о правильности монеты (то есть из предположения о равновозможности выпадения герба и решки) следует равновероятность всех элементарных исходов данного пространства Ω. Таким образом, для определения вероятностей всех событий, связанных с этим опытом, можем воспользоваться классическим методом определения вероятности. Выпишем исходы, благоприятные интересующим нас событиям: $A = \{ГРР, РГР, РРГ\}$, $(m = 3)$, тогда $P(A) = m/n = 3/8 = 0{,}375$;

$B = \{РГР, ГГР, РГГ, ГГГ\}$, $(m = 4)$, $P(B) = m/n = 4/8 = 0{,}5$;

$C = \{ГРР, РГР, РРГ, ГГР, ГРГ, РГГ, ГГГ\}$, $(m = 7)$, $P(C) = m/n = 7/8 = 0{,}875$.

Согласно следствию 3 из аксиом, например, вероятность события C можно вычислить, используя противоположное событие $\overline{C}$. Событие $\overline{C}$ состоит в том, что в результате подбрасываний герб не выпадет ни разу. $\overline{C} = \{РРР\}$, $P(\overline{C}) = 1/8 = 0{,}125$. Тогда вероятность события C: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$.

1.2.3 Статистический метод определения вероятности

Очевидно, что существует большой класс событий, вероятности которых нельзя вычислить с помощью классического метода определения вероятностей.

Например:
– выпадение некоторой грани игральной кости со смещенным центром тяжести;
– попадание в цель при одном выстреле;
– выход из строя прибора в течение гарантийного срока;
– производство бракованной детали при обработке на данном станке, и т. д.

Естественно предположить, что каждое из таких событий обладает некоторой вероятностью (степенью возможности), которая при многократном повторении соответствующих опытов будет отражаться в относительной частоте событий.

Относительной частотой события *A* в некоторой серии из *N* испытаний называется отношение числа испытаний N_A, в которых событие A произошло, к общему числу произведенных испытаний N.

Замечательным экспериментальным фактом является то, что при неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота события A приближается к вероятности события A и стабилизируется около этого значения.

При **статистическом определении вероятности** в качестве вероятности события используется относительная частота этого события в большой серии испытаний.

Например, если производится опыт, состоящий в подбрасывании правильной монеты, то согласно классическому методу вероятность выпадения герба равна $P(A) = m/n = 1/2 = 0{,}5$.

На протяжении нескольких веков истории развития теории вероятностей многими учеными проводились эксперименты с целью установления зависимости между вероятностью и относительной частотой наступления события. Например, французский естествоиспытатель Бюффон произвел 4040 подбрасываний монеты, в которых

герб выпал 2048 раз. Таким образом, в данной серии испытаний относительная частота события A равна 0,5069. Английский ученый-биолог Пирсон произвел две серии подбрасываний монеты по 12000 и 24000 испытаний, в которых число появлений герба равнялось, соответственно, 6019 и 12012. Относительная частота появления герба в этих сериях: 0,5016 и 0,5005, что является несомненным подтверждением факта приближения относительной частоты к вероятности события при проведении большой серии испытаний.

1.3 Теоремы сложения и умножения вероятностей

1.3.1 Теоремы сложения вероятностей

В общем случае вероятность суммы событий A и B определяется по формуле

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\ .$$

Если события A и B – несовместны, то есть $A \cap B = \varnothing$, $P(A \cap B) = 0$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\ .$$

Теорема сложения вероятностей для трех событий A, B, C может быть записана следующим образом:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Если события A, B, C – попарно несовместны, то

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)\ .$$

Согласно аксиоме 3 для счетного числа несовместных событий $A_1, A_2, A_3, \ldots$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

1.3.2 Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Рассмотрим два произвольных события A и B, причем $P(B) \neq 0$. **Условной вероятностью события *A* при условии *B*** (обозначается $\boldsymbol{P(A|B)}$) называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. По определению

$$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B). \qquad (2)$$

Вычисление условных вероятностей – это, по существу, переход в новое, урезанное заданным условием B пространство элементарных событий. Вероятности элементарных событий $P(\omega_i)$ $(\omega_i \in B)$ пропорциональны исходным. Для соблюдения условия нормировки в новом пространстве элементарных событий они делятся на $P(B)$.

Аналогично

$$P(B\mid A)=P(A\cap B)/P(A) \qquad (3)$$

в случае, если $P(A)\neq 0$.

Формулы (2) и (3) часто записывают в виде

$$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A) \qquad (4)$$

и называют **теоремой умножения вероятностей**.

Для произвольного числа n событий $A_1, A_2,\ldots A_n$ теорема умножения вероятностей имеет вид

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}),$$

то есть вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

1.3.3 Независимые события

Два события A и B называются независимыми, если

$$P(A\cap B)=P(A)P(B). \qquad (5)$$

Для пояснения естественности такого определения вернемся к теореме умножения вероятностей (4) и установим, в каких ситуациях из нее следует (5). Очевидно, что это может быть тогда, когда условная вероятность $P(A|B)$ равна соответствующей безусловной вероятности события А: $P(A|B) = P(A)$, то есть когда вероятность события А не зависит от того, произошло событие А или нет. (Аналогично, из выполнения условия (5) следует, что $P(B|A)=P(B)$.)

В основе независимости событий лежит их физическая независимость, состоящая в том, что множества факторов, влияющих на исход эксперимента и обусловливающих появление этих событий, не пересекаются или почти не пересекаются.

События $A_1, A_2,\ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если вероятность каждого из этих событий не зависит от появления любого числа остальных событий.

Теорема умножения вероятностей для независимых в совокупности событий $A_1, A_2,\ldots, A_n$ имеет вид

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Пример 6. При производстве деталей некоторого вида вероятность получения бракованной продукции равна 0,05. Известно, что 75 % стандартных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта. Определить вероятность получения первосортного изделия при данном производстве.

Р е ш е н и е. Обозначим события: A – {производство стандартного изделия}; B – {производство изделия первого сорта}. По условию $P(B\mid A)=0{,}75$, $P(\overline{A})=0{,}05$, отсюда $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}05=0{,}95$. В данном случае событие B может осуществиться только одновременно с осуществлением события A, то есть $B=B\cap A$. По теореме умножения вероятностей: $P(B)=P(B\cap A)=P(A)P(B|A)=0{,}95\cdot 0{,}75=0{,}7125$.

Таким образом, вероятность производства изделия первого сорта равна 0,7125.

Пример 7. В урне находятся семь шаров: 4 белых и 3 черных. Последовательно (без возвращения) вынимаются три шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров окажутся один черный и два белых.

Р е ш е н и е. Обозначим события:

A_i – {появление белого шара при i-м вынимании}; $i=1, 2, 3$. Тогда

$\overline{A_i}$ – {появление черного шара при i-м вынимании}; $i=1, 2, 3$.

Событие C – {появление одного черного и двух белых шаров} может быть представлено в виде

$$C=A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3\cup A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3\cup\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\,.$$

События $A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3$, $A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3$, $\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3$ – несовместны, поэтому

$$P(C)=P(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)+(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)+P(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3)\,.$$

По теореме умножения вероятностей

$$P(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A}_3\mid A_1\cap A_2)\,.$$

Так как выбор шара из урны осуществляется случайным образом, каждый из шаров имеет равные шансы быть выбранным. Значит, в данном случае для определения вероятности появления белого или черного шаров можно воспользоваться классическим методом определения вероятности. Вероятность появления белого шара при первом вынимании: $P(A_1)=4/7$. Вероятность появления белого шара, при условии, что уже вынут один белый шар: $P(A_2\mid A_1)=3/6$. Вероятность появления черного шара при условии, что уже вынуты два белых шара: $P(\overline{A}_3\mid A_1\cap A_2)=3/5$. Таким образом

$$P(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A}_3\mid A_1\cap A_2)=4/7\cdot 3/6\cdot 3/5=36/210\,;$$

$$P(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap\overline{A}_2)=4/7\cdot 3/6\cdot 3/5=36/210\,;$$

$$P(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3)=P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\cap A_2)=3/7\cdot 4/6\cdot 3/5=36/210\,;$$

$$P(C)=36/210+36/210+36/210=108/210\approx 0{,}5143\,.$$

Пример 8. Решить предыдущую задачу в предположении, что после вынимания каждый шар возвращается в урну.

Р е ш е н и е. В этом случае состав шаров в урне после каждого вынимания остается прежним, и вероятности появления белого или черного шаров не зависят от результатов предыдущих выниманий. То есть события A_i и $\overline{A}_j$ $(i=1, 2, 3; j=1, 2, 3;)$ при $i\neq j$ являются независимыми. Причем $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=4/7$; $P(\overline{A}_1)=P(\overline{A}_2)=$

$= P(\overline{A}_3) = 3/7$. В этом случае

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) = 4/7 \cdot 4/7 \cdot 3/7 = 48/343;$$

$$P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) = 4/7 \cdot 3/7 \cdot 4/7 = 48/343;$$

$$P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) = 3/7 \cdot 4/7 \cdot 4/7 = 48/343;$$

$$P(C) = 48/343 + 48/343 + 48/343 = 144/343 \approx 0{,}4198.$$

Пример 9. Электрическая цепь на участке MN сконструирована по схеме, приведенной на рисунке 2. Вероятности безотказной работы элементов $e_1 - e_7$ в течение времени T равны соответственно: p_1 - p_7. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Предполагается, что сбой в цепи может произойти только вследствие нарушений в работе элементов e_i. Найти вероятность безотказной работы участка цепи MN в течение времени T при условии, что $p_1 = p_2 = \ldots = p_7 = 0{,}9$.

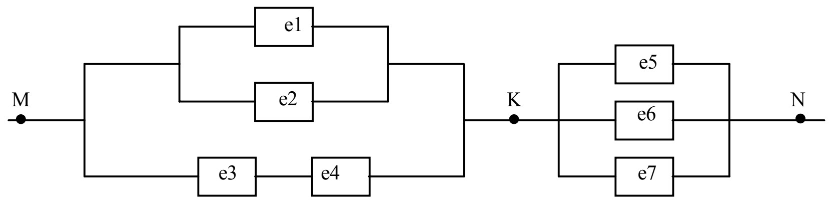


Рисунок 2

Р е ш е н и е. Обозначим события:

A_i – { безотказная работа i–ого элемента в течение времени T}; $i = 1, 2, \ldots 7$;

B_1 – {безотказная работа в течение времени T участка цепи MK};

B_2 – { безотказная работа в течение времени T участка цепи KN};

C – {безотказная работа всего участка цепи MN в течение времени T}.

Очевидно, что событие C можно представить в виде $C = B_1 \cap B_2$, то есть для функционирования участка цепи MN необходимо безотказное функционирование участков MK и KN.

Для обеспечения функционирования участка MK необходимо выполнение хотя бы одного из условий: 1) безотказная работа элемента e_1; 2) безотказная работа элемента e_2; 3) безотказная работа элементов e_3 и e_4. Таким образом, можно записать: $B_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3A_4$.

Для определения вероятности события B_1 применяем теорему сложения вероятностей совместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий:

$$P(B_1) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3A_4) - P(A_2A_3A_4) + P(A_1A_2A_3A_4) =$$
$$= p_1 + p_2 + p_3p_4 - p_1p_2 - p_1p_3p_4 - p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_4 = 0{,}9981.$$

Вероятность события B_2 можно найти аналогичным способом, но в данном случае удобнее будет рассмотреть противоположное событие $\overline{B}_2$, состоящее в отказе участка KN. Это событие произойдет в случае отказа всех трех элементов e_5, e_6, e_7. Таким

образом:

$$\overline{B}_2 = \overline{A}_5 \cap \overline{A}_6 \cap \overline{A}_7, \quad P(\overline{B}_2) = P(\overline{A}_5)P(\overline{A}_6)P(\overline{A}_7) = (1-p_5)(1-p_6)(1-p_7) = 0{,}001.$$

$$P(B_2) = 1 - P(\overline{B}_2) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999.$$

Окончательно, в силу независимости отказов элементов на каждом из участков для определения вероятности события C применяем теорему умножения вероятностей независимых событий:

$$P(C) = P(B_1)P(B_2) = 0{,}9981 \cdot 0{,}999 = 0{,}9971.$$

Замечание. Вернемся к условию примера 5.

Введем в рассмотрение события A_1 – {монета упала кверху гербом}, и A_2 – {монета упала кверху решкой}. Из предположения о правильности монеты следует, что $P(A_1) = 1/2$; $P(A_2) = 1/2$. Так как вероятности выпадения герба и решки не зависят от результатов предыдущих подбрасываний, по теореме умножения вероятностей независимых событий можно вычислить вероятности каждого из исходов пространства элементарных событий Ω, приведенного в решении примера 5, и убедиться, что все они одинаковы и равны 1/8. Например, $P(\omega_2) = P(\{ГРР\}) = P(A_1)P(A_2)P(A_2) =$ $= 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.

1.4 Формула полной вероятности. Формула Байеса

Частным случаем применения теорем сложения и умножения вероятностей являются формулы полной вероятности и Байеса. При решении многих практических задач часто встречаются с ситуацией, когда прямое вычисление вероятности события A трудно или невозможно, в то время как вполне доступно определение вероятности этого события при некоторых различных условиях H_i.

Сформулируем условия применения формул полной вероятности и Байеса.

Пусть производится испытание, об условиях которого можно сделать n взаимно исключающих предположений: $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ($H_i \cap H_j = \varnothing$, при $i \neq j$), таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$$

Поскольку заранее неизвестно, какое из событий H_i произойдет, эти события называют **гипотезами**. Предполагается, что вероятности гипотез известны и равны соответственно $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$.

Тогда любое рассматриваемое событие A может произойти только одновременно с осуществлением одной из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. То есть $A = A \cap H_1 \cup A \cap H_2 \cup \ldots \cup A \cap H_n$. Поскольку события $A \cap H_1$, $A \cap H_2, \ldots$, $A \cap H_n$ – несовместны, $P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \ldots + P(A \cap H_n)$. Применив теорему умножения вероятностей, можно записать: $P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A|H_i)$.

Таким образом, приходим к **формуле полной вероятности**, позволяющей определить «полную» вероятность события A через известные условные вероятности события A при гипотезах H_i:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n).$$

Если известно, что в результате опыта произошло событие A, то новые, апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез можно определить по **формуле Байеса**

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)H(A \mid H_j)}.$$

Пример 10. Среди изделий, поступающих на склад готовой продукции, 40 % составляют поставки первого завода, 35 % – второго и 25 % – третьего. Известно, что требованиям высшего сорта удовлетворяют 95 % продукции первого завода, 97 % – второго и 96 % – третьего. Из находящихся на складе изделий произвольным образом выбирается одно. а) Какова вероятность того, что это изделие удовлетворяет требованиям высшего качества? б) Выбранное на складе изделие оказалось высшего сорта. Какова вероятность того, что это изделие было изготовлено на первом заводе?

Решение. Определим интересующее нас событие: A – {выбранное на складе изделие удовлетворяет требованиям высшего сорта}. Относительно места производства выбранного изделия можно сформулировать три взаимоисключающие гипотезы: H_i – {выбранное изделие изготовлено на i-м заводе}, (i = 1, 2, 3).

Согласно условию задачи, вероятности гипотез известны: $P(H_1) = 0{,}4$; $P(H_2) = 0{,}35$; $P(H_3) = 0{,}25$. Условные вероятности события A при этих гипотезах: $P(A|H_1) = 0{,}95$; $P(A|H_2) = 0{,}97$; $P(A|H_3) = 0{,}96$.

а) Для определения вероятности события A воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}95 + 0{,}35 \cdot 0{,}97 + 0{,}25 \cdot 0{,}96 = 0{,}9595.$$

б) Если известно, что выбранное на складе изделие оказалось изделием высшего сорта (то есть осуществилось событие A), то условную вероятность гипотезы H_1 можно определить по формуле Байеса

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}95}{0{,}9595} = 0{,}396.$$

Пример 11. В урне находятся три шара, каждый из которых может оказаться либо белым, либо черным. Все варианты состава шаров предполагаются равновозможными. При вынимании из урны появился белый шар. Переоценить вероятности возможных распределений состава шаров с учетом этого события.

Решение. О возможном составе шаров в урне можно выдвинуть четыре взаимно исключающих гипотезы: H_1 – {в урне все шары – белые}; H_2 – {в урне один черный и два белых шара}; H_3 – {в урне один белый и два черных шара}; H_4 – {в урне все шары – черные}; По условию, все эти гипотезы равновероятны, то есть $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4)$. Поскольку рассматриваются все возможные в данном случае несовместные гипотезы, можно записать: $P(H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = P(\Omega) = 1$. Следовательно, $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = 1/4$.

Определим событие A – {при вынимании из урны появился белый шар}. Так как шар из урны вынимается случайным образом, вероятность события A при условии H_i можно определить с помощью классического метода определения вероятности: $P(A|H_i) = m/n$, где m – число белых шаров в урне; n – общее число шаров в урне. Таким образом, $P(A|H_1) = 3/3 = 1$; $P(A|H_2) = 2/3$; $P(A|H_3) = 1/3$; $P(A|H_4) = 0$.

Вероятности гипотез H_i при условии, что событие A произошло, можно переоценить по формуле Байеса. Вычислим вероятность события A, использующуюся в знаменателе формулы Байеса:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4) =$$
$$= (1/4) \cdot 1 + (1/4) \cdot (2/3) + (1/4) \cdot (1/3) + (1/4) \cdot 0 = 1/2.$$

Таким образом, вероятность вынуть белый шар из урны равна 1/2. Послеопытные вероятности гипотез о составе шаров в урне при условии, что при вынимании появился белый шар, равны:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{(1/4) \cdot 1}{1/2} = \frac{1}{2};$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{(1/4) \cdot (2/3)}{1/2} = \frac{1}{3};$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{P(H_3)P(A \mid H_3)}{P(A)} = \frac{(1/4) \cdot (1/3)}{1/2} = \frac{1}{6};$$

$$P(H_4 \mid A) = \frac{P(H_4)P(A \mid H_4)}{P(A)} = \frac{(1/4) \cdot 0}{1/2} = 0.$$

1.5 Последовательности независимых испытаний

Если производится несколько испытаний, таких, что вероятность рассматриваемого события A в каждом из испытаний не зависит от исходов других испытаний, то такие **испытания** называют **независимыми относительно события *A***.

1.5.1 Формула Бернулли

Если производится n независимых испытаний в одинаковых условиях, в каждом из которых с одной и той же вероятностью p может произойти событие A, то вероятность $P_n(m)$ того, что в этих n испытаниях событие A произойдет ровно m раз, определяется по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, ..., n).$$

Здесь $q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в каждом из испытаний; C_n^m – число сочетаний из n элементов по m, вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ где } k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k.$$

Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A появится не менее k раз, можно определить по формуле

$$P_n(m \ge k) = \sum_{i=k}^{n} P_n(i) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P_n(i).$$

Наивероятнейшее число m_0 наступлений события A в серии из n испытаний, в каждом из которых оно может наступить с вероятностью p, определяется из двойного неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

1.5.2 Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Очевидно, что при больших значениях n пользоваться формулой Бернулли затруднительно. В этом случае можно использовать асимптотические формулы Лапласа, дающее тем лучшее приближенное значение $P_n(m)$ и $P_n(k_1 \le m \le k_2)$, чем больше n.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A появится в серии из n испытаний ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции:

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

(В приложении А приведена таблица значений функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

соответствующих положительным значениям аргумента.)

Функция $\varphi(x)$ является четной функцией, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$. График функции $\varphi(x)$ изображен на рисунке 20 (с. 47).

Таким образом, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно m раз, приближенно равна

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A появится в серии из n испытаний от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

В приложении Б приведены таблицы значений **функции Лапласа:**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Функция $\Phi(x)$ нечетна, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. При $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$.

Пример 12. На автобазе имеется десять автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. а) Найти вероятность того, что в определенный день на линию выйдут 9 автомашин; б) Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее восьми автомашин; в) Найти наивероятнейшее число вышедших на линию автомашин и соответствующую этому числу вероятность.

Решение. Предполагая, что выходы машин на линию осуществляются независимо друг от друга, условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 10$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события A – {выход автомашины на линию} равна 0,8. То есть $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$.

а) Для определения вероятности того, что в определенный день на линию выйдут 9 из 10 машин автобазы, воспользуемся формулой Бернулли

$$P_{10}(9) = C_{10}^9 p^9 q^1 = \frac{10!}{9!\cdot 1!}0{,}8^9\cdot 0{,}2^1 = 10\cdot 0{,}8^9\cdot 0{,}2 \approx 0{,}2684.$$

б) Введем в рассмотрение событие B – {нормальная работы автобазы}. Тогда

$$P(B) = P_{10}(m \ge 8) = P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) \approx 0{,}2718 + 0{,}2684 + 0{,}1074 = 0{,}6476;$$

$$P_{10}(8) = C_{10}^8 p^8 q^2 = \frac{10!}{8!\cdot 2!}0{,}8^8\cdot 0{,}2^2 = 45\cdot 0{,}8^8\cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}2718;$$

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10} p^{10} q^0 = \frac{10!}{10!\cdot 0!}0{,}8^{10}\cdot 0{,}2^0 = 1\cdot 0{,}8^{10}\cdot 1 \approx 0{,}1074.$$

в) Наивероятнейшее число m_0 вышедших на линию автомашин найдем по формуле $np - q \le m_0 \le np + p$. Отсюда $7{,}8 \le m_0 \le 8{,}8$. Единственное целое число m, удовлетворяющее этому двойному неравенству $m_0=8$, $P_{10}(8)\approx 0{,}2718$. Этому значению m соответствует наибольшее значение вероятности $P_{10}(m)$.

Пример 13. Статистическая вероятность рождения мальчика равна 0,515. В первые классы должно быть принято 200 детей. а) Найти наивероятнейшее число мальчиков, принимаемых школой в первый класс, и соответствующую этому событию вероятность; б) Найти вероятность того, что будет принято не более 100 мальчиков.

Решение. Условие задачи можно рассматривать как последовательность $n=200$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события A – {принятый в школу ребенок является мальчиком} постоянна и равна 0,515. То есть $p=0{,}515$, $q=0{,}485$.

а) Наивероятнейшее число наступлений события A в серии из n испытаний определяем по формуле $np-q\le m_0\le np+p$: $102{,}515\le m_0\le 103{,}515$, значит, $m_0=103$. Так как число испытаний $n=200$ очень велико, то для определения $P_{200}(103)$, то есть вероятности того, что среди принимаемых школой детей окажется ровно 103 мальчика, можно воспользоваться локальной теоремой Лапласа, где

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{103-200\cdot 0{,}515}{\sqrt{200\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}}=0\,.$$

По таблице значений функции

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

находим: $\varphi(0)=0{,}3989$. Таким образом,

$$P_{200}(103)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{200\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}}\cdot 0{,}3989\approx 0{,}056.$$

б) Вероятность события B – {в первые классы будет принято не более 100 мальчиков} можно определить с помощью интегральной теоремы Лапласа

$$P(B)=P_{200}(0\le m\le 100)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)\,,$$

где $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{0-200\cdot 0{,}515}{\sqrt{200\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}}=\dfrac{-103}{7{,}068}\approx -14{,}5727$;

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-200\cdot 0{,}515}{\sqrt{200\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}}=\frac{-3}{7{,}068}\approx -0{,}4244\,.$$

Учитывая, что функция $\Phi(x)$ – нечетная, по таблицам значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим: $\Phi(-0{,}4244)=-0{,}1628$; $\Phi(-14{,}5727)=-0{,}5$. Таким образом,

$$P(B)=P(0\le m\le 100)=-0{,}1628+0{,}5=0{,}3372.$$

2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Дискретные и непрерывные случайные величины

Как показывает практика, результаты вероятностного эксперимента в общем случае могут быть описаны одним или несколькими числами. То, какие именно числовые значения будут получены в результате эксперимента, зависит от большого числа не поддающихся учету случайных факторов и определяется реализовавшимся в результате вероятностного эксперимента элементарным исходом ω_i.

Случайной величиной называется величина определенного физического смысла, значения которой подвержены некоторому неконтролируемому разбросу при повторениях исследуемого вероятностного эксперимента. Можно также сказать, что случайная величина – это функция, определенная на данном пространстве элементарных событий и ставящая в соответствие каждому элементарному событию $\omega_i\in\Omega$ некоторое вещественное число x.

Пример. Пусть производится подбрасывание монеты. Для описания результатов этого эксперимента можно рассмотреть элементарные события: ω_1 – {выпадение цифры} и ω_2 – {выпадение герба}, $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$. Поставив в соответствие исходу ω_1 значение 0, а исходу ω_2 – значение 1, получим описание результатов данного опыта с помощью случайной величины X, характеризующей число выпавших гербов, и принимающей в зависимости от исхода испытания одно из двух значений: 0 или 1.

В **примере 1** (п. 1.1.1) рассматривался эксперимент, состоящий в подбрасывании игральной кости. Было построено пространство элементарных исходов, соответствующее этому испытанию: $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Каждому исходу ω_i поставим в соответствие значение $x_i=i$, $(i=1, 2,\ldots, 6)$. Таким образом, ввели в рассмотрение случайную величину X, задающую число очков, выпавших на верхней грани, и принимающую в результате опыта одно из шести возможных значений.

Пример 5 (п. 1.1.2) Испытание состоит в трехкратном подбрасывании монеты. Результаты данного эксперимента могут быть описаны с помощью случайной величины X, определяющей число выпавших гербов. Возможные значения этой случайной величины: 0, 1, 2, 3.

Случайные величины принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z,…, либо буквами греческого алфавита: ξ, η, θ,…, а их значения – строчными буквами латинского алфавита: x, y, z.

Случайные величины, принимающие отдельные друг от друга значения с определенными вероятностями, называются **дискретными**. Множество возможных значений дискретных случайных величин является конечным или счетным множеством.

Примеры дискретных случайных величин: число успешно сданных экзаменов; число бракованных деталей, изготовленных в течение смены; число вагонов, прибывших в течение суток в депо для проверки; число звонков, поступивших на АТС в течение некоторого промежутка времени, и т. д.

Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый (конечный или бесконечный) промежуток числовой оси, называются **непрерывными**. (В дальнейшем будет дано более строгое определение непрерывных случайных величин.) Множество возможных значений непрерывных случайных величин является несчетным множеством. Например, время безотказной работы оборудования после очередного ремонта; время простоя вагона в ожидании разгрузки; масса израсходованного в течение суток топлива; отклонение размера изделия от номинала, – являются непрерывными случайными величинами.

2.2 Закон распределения случайной величины

Очевидно, что для полного описания исследуемого вероятностного эксперимента (то есть для исчерпывающего задания характеризующей его случайной величины) недостаточно задать только пространство элементарных событий Ω. К этому необходимо добавить также:

а) для *дискретной* случайной величины - правило, сопоставляющее каждому возможному значению случайной величины x_i вероятность того, что случайная величина X примет в результате эксперимента это значение:

$$x_i \to P(X = x_i)\,;$$

б) для *непрерывной* случайной величины – правило, позволяющее поставить в соответствие любой измеримой области ΔX возможных значений случайной величины X вероятность попадания значения случайной величины в эту область:

$$\Delta X \to P(x \in \Delta X)\,.$$

Дадим общее определение: **законом распределения** случайной величины X называется любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями этой случайной величины и соответствующими им вероятностями.

2.2.1 Ряд распределения

Пусть X – дискретная случайная величина, а $x_1, x_2, x_3, \ldots$ – ее значения. Совокупность всех элементарных событий, на которых X принимает фиксированное значение x_i, образует событие $X=x_i$.

Простейшим способом задания закона распределения дискретной случайной величины является **ряд распределения**. Это таблица, в первой строке которой указаны возможные значения случайной величины $x_1, x_2, x_3, \ldots$, а во второй – соответствующие им вероятности $p_1, p_2, p_3, \ldots$, где $p_i = P(X=x_i)$ – вероятность того, что в результате эксперимента случайная величина X примет значение x_i:

x_i	x_1	x_2	x_3	…
p_i	p_1	p_2	p_3	…

Так как события $(X=x_1)$, $(X=x_2), \ldots$ – несовместны, и их объединение представляет собой все пространство элементарных событий, то сумма вероятностей p_i равна 1:

$$\sum_i P(X = x_i) = \sum_i p_i = 1\,.$$

Эта единица как-то *распределена* между различными значениями случайной величины. Отсюда и термин «распределение».

Графическое изображение ряда распределения может быть представлено одним из двух способов: в виде столбцовой диаграммы и в виде многоугольника распределения.

Столбцовая диаграмма строится следующим образом: для каждого возможного значения случайной величины восстанавливается перпендикуляр к оси абсцисс, на котором откладывается вероятность данного значения.

При построении **многоугольника распределения** по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, по оси ординат – соответствующие им вероятности, и полученные соседние точки соединяются отрезками.

Пример 14. Рассматривается работа трех функционирующих независимо друг от друга технических устройств (ТУ). Вероятности безотказной работы в течение заданного интервала времени t для каждого из ТУ соответственно равны: 0,6, 0,7 и 0,75. Рассматривается случайная величина X – число ТУ, проработавших безотказно в течение времени t. Построить ряд распределения этой случайной величины.

Решение. Возможные значения данной случайной величины: 0, 1, 2, 3. Запишем их в верхней строке ряда распределения. Для определения вероятностей возможных значений данной случайной величины введем в рассмотрение события: A_i – {безотказная работа в течение времени t i-го устройства}, $i = 1, 2, 3$. B_j – {безотказная работа j устройств в течение времени t}, $j = 0, 1, 2, 3$. События B_j можно представить в виде

$$B_0 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3;$$
$$B_1 = A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3;$$
$$B_2 = A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cup \bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3;$$
$$B_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий, вычисляем:

$$P(X=0) = P(B_0) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}03;$$

$P(X=1)=P(B_1)=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=$
$=0,6\cdot 0,3\cdot 0,25+0,4\cdot 0,7\cdot 0,25+0,4\cdot 0,3\cdot 0,75=0,205;$

$P(X=2)=P(B_2)=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)=$
$=0,6\cdot 0,7\cdot 0,25+0,6\cdot 0,3\cdot 0,75+0,4\cdot 0,7\cdot 0,75=0,45;$

$P(X=3)=P(B_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,75=0,315.$

Таким образом, ряд распределения случайной величины X имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,03	0,205	0,45	0,315

Убедимся, что $\sum_{i=1}^{4} p_i = \sum_{i=1}^{4} P(X=x_i) = 1$.

Столбцовая диаграмма и многоугольник распределения, представляющие ряд распределения этой случайной величины, изображены, соответственно, на рисунках 3 и 4.

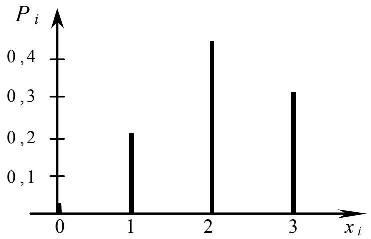


Рисунок 3

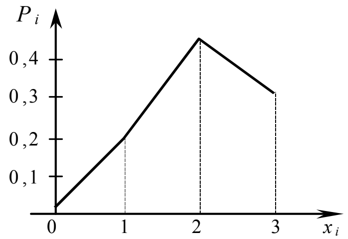


Рисунок 4

2.2.2 Функция распределения

Универсальным способом задания закона распределения, пригодным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является функция распределения.

Функцией распределения случайной величины *X* называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x, то есть

$$F(x)=P(X<x).$$

Основные свойства функции распределения *F*(*x*):

1. Так как по определению $F(x)$ равна вероятности события, все возможные значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]:

$$0\le F(x)\le 1.$$

2. $F(x)$ – неубывающая функция своего аргумента.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[a,\ b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a).$$

4. Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a,\ b]$, то

$$F(x)=0,\ \text{при}\ x\le a;\ F(x)=1,\ \text{при}\ x>b.$$

Функция распределения дискретных случайных величин может быть определена по формуле

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i)\,. \qquad (6)$$

Если известен ряд распределения дискретной случайной величины, легко построить ее функцию распределения. Продемонстрируем, как это делается на примере 14.

Пример 14. Ряд распределения случайной величины X, обозначающей число устройств, проработавших безотказно в течение времени t, имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,03	0,205	0,45	0,315

Определим значения функции $F(x)=P(X<x)$ для всех возможных значений x:

при $x\in(-\infty,\ 0]$ нет ни одного значения случайной величины X, меньшего данных значений x, то есть нет ни одного слагаемого в сумме (6): $F(x)=0$;

при $x\in(0;\ 1]$ только одно возможное значение ($X=0$) меньше рассматриваемых значений x. То есть при $x\in(0;\ 1]$ $F(x)=P(X=0)=0,03$;

при $x\in(1,\ 2]$ два значения ($X=0$ и $X=1$) меньше данных значений x, следовательно, $F(x)=P(X=0)+P(X=1)=0,03+0,205=0,235$;

при $x\in(2,\ 3]$ $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0,03+0,205+0,45=0,685$;

при $x\in(3,\ \infty)$ все возможные значения случайной величины X будут меньше данных значений x, и $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0,03+0,205+$ $+0,45+0,315=1$.

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in(-\infty,\ 0];\\ 0,03 & \text{при } x\in(0,\ 1];\\ 0,235 & \text{при } x\in(1,\ 2];\\ 0,685 & \text{при } x\in(2,\ 3];\\ 1 & \text{при } x\in(3,\ \infty).\end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рисунке 5.

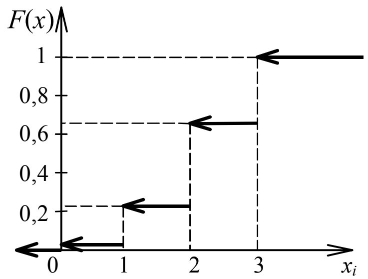


Рисунок 5

В общем случае, функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X есть разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям x_1, x_2, … случайной величины X и равны вероятностям $p_1, p_2, \ldots$ этих значений.

Функция распределения непрерывных случайных величин. Теперь можно дать более точное определение непрерывных случайных величин: случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F(x)$ при всех значениях x непрерывна и, кроме того, имеет производную $F'(x)$ всюду, за исключением, может быть, отдельных точек.

(На рисунках 13, 15 и 17 (разд. 2.4) изображены графики функций распределения непрерывных случайных величин, подчиняющихся равномерному, показательному и нормальному законам).

Из непрерывности функции $F(x)$ следует, что *вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю*.

Из равенства нулю вероятности $P(X=x_1)$ не следует, что событие $(X=x_1)$ невозможно. В результате испытания случайная величина обязательно примет одно из своих возможных значений. В частности, это значение может оказаться равным x_1.

Аксиому сложения вероятностей несовместных событий ввели только для конечного и счетного множеств событий; для несчетного множества она попросту несправедлива. Вероятность попадания случайной величины на участок от a до b равна сумме вероятностей попадания на элементарные участки, образующие его, как бы малы эти участки ни были, но не равна сумме вероятностей попадания в отдельные точки.

Представление о событии, имеющем отличную от нуля вероятность, но складывающемся из событий с нулевой вероятностью, не более парадоксально, чем, например, представление о фигуре, имеющей определенную площадь, в то время как ни одна точка внутри фигуры, отличной от нуля площадью не обладает; или представление о массе некоторого тела, состоящего из материальных точек, каждая из которых обладает нулевой массой.

Так как вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины равна 0, свойство 3 функции распределения для непрерывной случайной величины будет иметь вид

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Пример 15. Производится выстрел по мишени, имеющей форму круга радиуса R. Случайная величина X – расстояние от точки попадания до центра мишени. Определить закон распределения этой случайной величины. Найти вероятность попадания в центральный круг мишени радиуса $R/3$.

Решение. Все возможные значения случайной величины X принадлежат отрезку $[0; R]$. Следовательно, при $x \in (-\infty, 0)$ нет ни одного значения случайной величины X, меньшего данных значений x, то есть $F(x)=0$. При $x \in (R, \infty)$ все значения случайной величины будут меньше данных значений x, следовательно, $F(x) = 1$. Для определения $F(x) = P(X < x)$ при $x \in [0; R]$ обратимся к рисунку 6.

Вероятность события $(X < x)$ равна вероятности попадания в круг радиуса x, при условии, что попадание в круг радиуса R (то есть попадание в мишень) – достоверное событие. Используя геометрический метод определения вероятности, вероятность попадания в круг радиуса x можно определить как отношение площади круга радиуса x к площади круга радиуса R. То есть при $x \in [0; R]$: $F(x) = P(X < x) = (\pi x^2)/(\pi R^2) = x^2/R^2$. Таким образом,

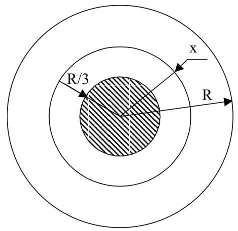


Рисунок 6

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty; 0); \\ \dfrac{x^2}{R^2} & \text{при } x \in [0; R]; \\ 1 & \text{при } x \in (R; \infty). \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рисунке 8.

Вероятность попадания в центральный круг радиуса $R/3$ можно определить, например, используя свойство 3 функции распределения:

$$P(X \le R/3) = P(0 \le X \le R/3) = F(R/3) - F(0) = R^2/(3^2R^2) - 0 = 1/9.$$

2.2.3 Функция плотности распределения вероятностей

Как следует из вышесказанного, для непрерывной случайной величины бессмысленно говорить о распределении вероятностей между ее значениями. Каждое из них имеет нулевую вероятность. И все же, в некотором смысле, среди значений непрерывной случайной величины есть «более и менее вероятные».

Обратимся к *механической интерпретации распределения вероятностей*.

Для *дискретной* случайной величины X эта интерпретация сводится к тому, что в точках x_1, x_2,… сосредоточены массы p_1, p_2,…, причем сумма этих масс равна единице.

В случае *непрерывной* случайной величины масса, равная единице, не сосредоточена в отдельных точках, а непрерывно «размазана» по оси абсцисс с некоторой, в общем случае, неравномерной плотностью.

Вероятность попадания случайной величины X на любой отрезок Δx будет интерпретироваться как масса, приходящаяся на этот участок, а средняя плотность на этом участке – как отношение массы к длине. На отрезке $[x, x+\Delta x]$ средняя плотность будет равна

$$\frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим плотность в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Таким образом, ввели в рассмотрение новое понятие – плотность распределения.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке:

$$f(x) = F'(x).$$

По своему смыслу значения функции $f(x)$ пропорциональны вероятности того, что исследуемая случайная величина примет значение где-то в непосредственной близости от точки x.

Функция плотности распределения $f(x)$, как и функция распределения $F(x)$, является одной из форм задания закона распределения, но она применима только для непрерывных случайных величин. Функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$ еще называют **дифференциальной функцией распределения**, тогда как функцию распределения $F(x)$ называют, соответственно, **интегральной функцией распределения**.

График функции плотности распределения $f(x)$ называется **кривой распределения**. (На рисунках 12, 14, 16 приведены графики функций $f(x)$ случайных величин, подчиняющихся равномерному, экспоненциальному и нормальному законам распределения.)

Основные свойства функции плотности распределения вероятностей:

1. Плотность распределения вероятностей – неотрицательная функция:

$$f(x) \ge 0$$

(*геометрически:* кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс).

2. Вероятность попадания значения случайной величины на участок от α до β определяется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\,;$$

(*геометрически:* эта вероятность равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $f(x)$, осью Ox и прямыми $x=\alpha$ и $x=\beta$).

3. Функция распределения $F(x)$ может быть найдена по известной функции плотности распределения следующим образом:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

(*геометрически*: площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и

осью абсцисс, равна единице).

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Вычислим функцию плотности распределения вероятностей случайной величины, рассмотренной в **примере 15**. Функция распределения этой случайной величины определяется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty;\, 0); \\ \dfrac{x^2}{R^2} & \text{при } x \in [0;\, R]; \\ 1 & \text{при } x \in (R;\, \infty). \end{cases}$$

Согласно определению, $f(x) = F'(x)$. Отсюда

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty;\, 0); \\ \dfrac{2x}{R^2} & \text{при } x \in [0;\, R]; \\ 0 & \text{при } x \in (R;\, \infty). \end{cases}$$

График функции $f(x)$ приведен на рисунке 7, а функции $F(x)$ – на рисунке 8. Нетрудно убедиться, что площадь фигуры, ограниченной функцией $f(x)$ и осью абсцисс, равна 1 (в данном случае это площадь прямоугольного треугольника с катетами R и $2/R$).

Вероятность попадания в центральный круг радиуса $R/3$ легко найти, используя свойство 2 функции плотности распределения вероятностей:

$$P(0 \le X \le R/3) = \int_0^{R/3} f(x)dx = \int_0^{R/3} \frac{2x}{R^2}dx = 1/9.$$

На рисунке 7 фигура, площадь которой равна вероятности этого события, отмечена штриховкой.

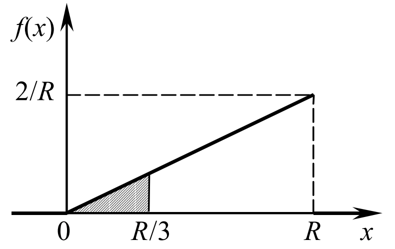


Рисунок 7

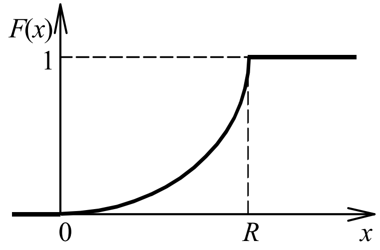


Рисунок 8

2.3 Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Кроме того, в теории вероятностей широко используются некоторые «типичные значения», которые характеризуют случайную величину суммарно. Эти числа, описывающие некоторые характерные черты распределения, называются **числовыми характеристиками**.

Важнейшей числовой характеристикой положения случайной величины является математическое ожидание.

1. **Математическое ожидание** характеризует среднее значение случайной величины, вокруг которого группируются все ее значения. Термин «математическое ожидание» связан с начальным периодом развития теории вероятностей, когда она развивалась на примерах и задачах азартных игр и игрока интересовал средний выигрыш, то есть среднее значение ожидаемого выигрыша. Для дискретных и непрерывных случайных величин математическое ожидание вычисляется, соответственно, по формулам (7) и (8) (при условии, что ряд в формуле (7) и интеграл в формуле (8) сходятся абсолютно):

$$M[X] = \sum_i x_i p_i \; ; \qquad (7) \qquad\qquad M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx . \qquad (8)$$

В механической интерпретации математическое ожидание характеризует центр тяжести системы.

Свойства математического ожидания:

а) математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M[C]=C;$$

б) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M[CX]=C\,M[X];$$

в) математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий. Например, для трех случайных величин X_1, X_2, X_3

$$M[X_1 \pm X_2 \pm X_3] = M[X_1] \pm M[X_2] \pm M[X_3];$$

г) математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Например, для трех независимых случайных величин X_1, X_2, X_3

$$M[X_1X_2X_3]=M[X_1]\,M[X_2]\,M[X_3].$$

2. **Модой** случайной величины X (обозначается x_{mod}) называется ее наиболее вероятное значение, то есть то значение, для которого вероятность p_i или плотность распределения вероятностей $f(x)$ достигает максимума.

3. **Медианой** случайной величины X называется такое ее значение x_{med}, для которого $P(X<x_{\text{med}})=P(X\geq x_{\text{med}})=0{,}5$, то есть одинаково вероятно, примет ли случайная величина значение, большее или меньшее медианы. *Геометрически:* медиана – это координата той точки на оси абсцисс, для которой площади фигур, ограниченных кривой $f(x)$ и осью абсцисс, находящихся слева и справа от неё, одинаковы и равны 1/2. Эта характеристика применяется, как правило, только для непрерывных случайных величин.

Очевидно, что характеристики положения (математическое ожидание, мода и медиана) имеют такую же размерность, как и сама случайная величина.

4. **Дисперсия** является мерой рассеивания значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Для дискретных и непрерывных случайных величин дисперсию можно вычислить соответственно по формулам

$$D[X] = \sum_i (x_i - M[X])^2 p_i = \sum_i x_i^{\,2} p_i - (M[X])^2;$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2.$$

В *механической интерпретации* дисперсия представляет собой момент инерции распределения масс относительно центра масс (математического ожидания). Если говорить о форме кривой плотности распределения, то дисперсия характеризует степень ее «размазанности» по оси Ox. Чем больше величина $D[X]$, тем более «размазанным» выглядит соответствующее распределение.

Свойства дисперсии:

а) дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D[C]=0;$$

б) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D[CX]=C^2D[X];$$

в) дисперсия алгебраической суммы нескольких независимых случайных величины равна сумме их дисперсий. Например, для трех случайных величин X_1, X_2 и X_3

$$D[X_1 \pm X_2 \pm X_3] = D[X_1] + D[X_2] + D[X_3].$$

Как следует из определения, размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины.

5. Для того чтобы получить характеристику разброса значений случайной

величины относительно математического ожидания, имеющую такую же размерность, как и сама случайная величина, используют корень квадратный из дисперсии, взятый с положительным знаком. Полученная величина называется **средним квадратическим отклонением** (или **стандартным отклонением**) и обозначается $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$.

Часто используются две безразмерные числовые характеристики, характеризующие скошенность и островершинность графика функции плотности распределения вероятностей.

6. **Коэффициент асимметрии** (обозначается $A[X]$) характеризует скошенность распределения случайной величины относительно математического ожидания. Для симметричных относительно математического ожидания распределений $A[X]=0$. Если в распределении случайной величины преобладают положительные отклонения, то $A[X]>0$, если отрицательные, то $A[X]<0$. На рисунке 9 изображены графики функций плотности распределения вероятностей с положительным и отрицательным значениями $A[X]$, а также график симметричного распределения. Значение коэффициента асимметрии для дискретных и непрерывных случайных величин вычисляется, соответственно по формулам

$$A[X]=\frac{\sum\limits_i (x_i-M[X])^3 p_i}{(\sigma[X])^3}; \qquad A[X]=\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M[X])^3 f(x)dx}{(\sigma[X])^3}.$$

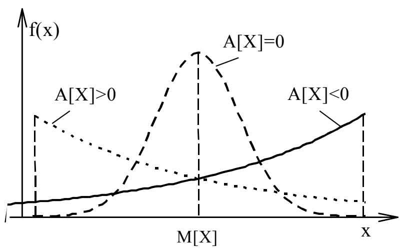


Рисунок 9

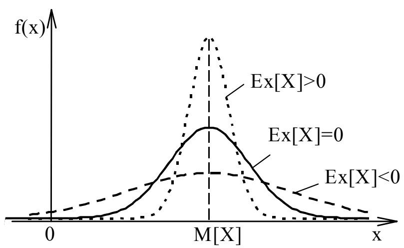


Рисунок 10

7. **Коэффициент эксцесса** (обозначается $Ex[X]$) характеризует островершинность графика функции плотности распределения вероятностей $f(x)$. Своеобразным началом отсчета при измерении степени островершинности служит нормальное распределение (см. подраздел 2.4.5), для которого $Ex[X]=0$. Как правило, распределения с более высокой и более острой вершиной кривой плотности распределения (или многоугольника распределения) имеют положительное значение коэффициента эксцесса, а с более низкой и пологой – отрицательное значение. На рисунке 10 приведены графики функции плотности нормального распределения, а также распределений,

имеющих положительное и отрицательное значения коэффициента эксцесса.

Для вычисления значений коэффициента эксцесса дискретных и непрерывных случайных величин используются следующие формулы:

$$Ex[X]=\frac{\sum\limits_i (x_i-M[X])^4 p_i}{(\sigma[X])^4}-3; \qquad Ex[X]=\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M[X])^4 f(x)dx}{(\sigma[X])^4}-3.$$

Вычислим числовые характеристики случайных величин, рассмотренных в примерах 14 и 15.

Пример 14. Случайная величина X, определяющая число безотказно работающих устройств, задается рядом распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0,03	0,205	0,45	0,315

Математическое ожидание этой случайной величины:

$$M[X]=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4=0\cdot 0{,}03+1\cdot 0{,}205+2\cdot 0{,}45+3\cdot 0{,}315=2{,}05\ [\text{ТУ}].$$

Таким образом, среднее число безотказно работающих устройств равно 2,05.

Мода данной случайной величины равна 2 [ТУ], так как этому значению соответствует наибольшее значение вероятности: $x_{\text{mod}}=2$.

Дисперсию числа безотказно проработавших устройств можно вычислить, например, по формуле

$$D[X]=\sum_{i=1}^{4}(x_i-M[X])^2 p_i=(0-2{,}05)^2\cdot 0{,}03+(1-2{,}05)^2\cdot 0{,}205+$$
$$+(2-2{,}05)^2\cdot 0{,}45+(3-2{,}05)^2\cdot 0{,}315=0{,}6375\ [\text{ТУ}^2].$$

Среднее квадратическое отклонение данной случайной величины

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=0{,}798\ [ТУ].$$

Пример 15. Случайная величина, определяющая расстояние от точки попадания до центра мишени радиуса R, задается функцией плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in(-\infty;0);\\ \dfrac{2x}{R^2} & \text{при } x\in[0;R];\\ 0 & \text{при } x\in(R;\infty).\end{cases}$$

Математическое ожидание этой величины

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}x\cdot 0\,dx+\int\limits_{0}^{R}\frac{2x^2}{R^2}dx+\int\limits_{R}^{\infty}x\cdot 0\,dx=\frac{2}{3}R.$$

Мода этой случайной величины, как следует из графика функции $f(x)$, равна R.

Медиану будем искать из соотношения $P(X<x_{\text{med}})=P(X\geq x_{\text{med}})=0{,}5$. Но, согласно определению $F(x)$, $P(X<x)=F(x)$. Отсюда получаем соотношение для определения медианы: $P(X<x_{\text{med}})=F(x_{\text{med}})=0{,}5$. Подставляя выражение для функции распределения $F(x)$ на интервале от 0 до R $x_{\text{med}}^2/R^2=0{,}5$, получаем $x_{\text{med}}=\sqrt{0{,}5}R\approx$ $\approx 0{,}707R$.

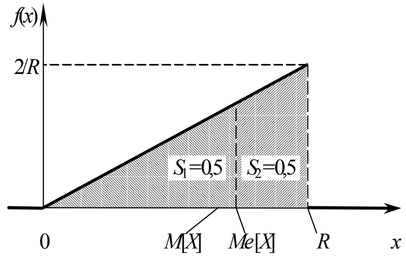


Рисунок 11

Графическое изображение математического ожидания и медианы рассматриваемой случайной величины приведено на рисунке 11.

Для вычисления дисперсии удобно воспользоваться формулой

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-(M[X])^2=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0\,dx+\int_{o}^{R}\frac{2x^3}{R^2}dx+\int_{R}^{\infty}x^2\cdot 0\,dx-\left(\frac{2}{3}R\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}R^2-\frac{4}{9}R^2=\frac{R^2}{18}.$$

Среднее квадратическое отклонение расстояния от точки попадания до центра мишени $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=R/\sqrt{18}\approx 0{,}236R$.

2.4 Некоторые наиболее важные для практики распределения случайных величин

2.4.1 Биномиальное распределение

Говорят, что дискретная случайная величина X распределена по **биномиальному закону**, если возможные значения этой случайной величины 0, 1, 2,…, n, а вероятность каждого из значений определяется по формуле Бернулли

$$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (9)$$

где $0\leq p\leq 1$; $q=1-p$; $m=0, 1, 2,\ldots, n$.

На практике биномиальное распределения возникает при следующих условиях: пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может осуществиться с вероятностью p. Тогда случайная величина X, определяющая число появлений события A в серии из n испытаний, распределена по биномиальному закону.

Биномиальное распределение зависит от двух параметров: $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$.

Закон называется «биномиальным» потому, что правую часть равенства (9) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона

$$(p+q)^n=C_n^n p^n+C_n^{n-1}p^{n-1}q+C_n^2 p^{n-2}q^2+\ldots+C_n^1 pq^{n-1}+C_n^0 q^n. \qquad (10)$$

Ряд распределения случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, имеет вид

x_i	0	1	…	k	…	$n-1$	n
p_i	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$np^{n-1}q$	p^n

Очевидно, согласно (10), что сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна 1.

Нетрудно доказать, что для случайной величины, распределенной по биномиальному закону,

$$M[X]=np,\ D[X]=npq,\ \sigma[X]=\sqrt{npq}. \qquad (11)$$

Пример 16. По каналу связи передается 5 сообщений. Каждое сообщение с вероятностью 0,1 независимо от других искажается. Случайная величина X – число искаженных сообщений. Построить ряд распределения этой случайной величины, вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непосредственно по ряду распределения и сравнить со значениями, которые получаются при использовании формул (11). Найти вероятность того, что будет искажено не более одного сообщения.

Решение. Условие задачи соответствует проведению $n=5$ независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p=0{,}1$ может осуществиться событие A – {искажение передаваемого сигнала}. Случайная величина X, обозначающая число искаженных сообщений, распределена по биномиальному закону. Возможные значения этой случайной величины: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вероятности значений определяются по формуле Бернулли:

$$P(X=0)=C_5^0 p^0 q^5=1\cdot 1\cdot 0{,}9^5=0{,}59049;$$

$$P(X=1)=C_5^1 p^1 q^4=5\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^4=0{,}32805;$$

$$P(X=2)=C_5^2 p^2 q^3=10\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^3=0{,}0729;$$

$$P(X=3)=C_5^3 p^3 q^2=10\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^2=0{,}0081;$$

$$P(X=4)=C_5^4 p^4 q^1=5\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9^1=0{,}00045;$$

$$P(X=5)=C_5^5 p^5 q^0=1\cdot 0{,}1^5\cdot 1=0{,}00001.$$

Ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

Убедимся, что $\sum_{i=1}^{6}p_i=1$.

Вычислим числовые характеристики данной случайной величины:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i=0\cdot 0{,}59049+1\cdot 0{,}32805+2\cdot 0{,}0729+3\cdot 0{,}0081+$$
$$+4\cdot 0{,}00045+5\cdot 0{,}00001=0{,}5\,[\text{сообщений}];$$

$$D[X]=\sum_{i=1}^{6}x_i^2 p_i-(M[X])^2=0\cdot 0{,}59049+1\cdot 0{,}32805+4\cdot 0{,}0729+9\cdot 0{,}0081+$$
$$+16\cdot 0{,}00045+25\cdot 0{,}00001-(0{,}5)^2=0{,}45\,[\text{сообщений}^2];$$

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0{,}45}=0{,}671\,[\text{сообщений}];$$

$$x_{mod}=0\ [\text{сообщений}].$$

Вычислим числовые характеристики этой случайной величины по формулам (11):

$$M[X]=np=5\cdot 0{,}1=0{,}5;\ D[X]=npq=5\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}45.$$

Как и следовало ожидать, получены точно такие же значения.
Вероятность того, что будет искажено не более одного сообщения,

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}59049+0{,}32805=0{,}91854.$$

2.4.2 Распределение Пуассона

Говорят, что дискретная случайная величина X распределена по **закону Пуассона**, если ее возможные значения: 0, 1, 2,…, m,… (счетное множество значений), а соответствующие им вероятности задаются формулой

$$P(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a};\quad (m=0,1,2,\ldots).$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, имеет вид

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	e^{-a}	ae^{-a}	$(a^2e^{-a})/2!$	…	$(a^ke^{-a})/k!$	…

Покажем, что данное выше определение корректно:
1) $P(X=m)>0$ для всех значений $m=0,1,2,\ldots$

2) $$\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}e^{-a}=e^{-a}(1+a+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\ldots)=e^{-a}e^{a}=1.$$

Закон распределения Пуассона зависит от одного параметра: ***a***. Доказано, что для случайной величины, распределенной по закону Пуассона,

$$M[X]=a,\ D[X]=a,\ \sigma[X]=\sqrt{a}.$$

Рассмотрим условия, при которых возникает распределение Пуассона.

1. Распределение Пуассона с параметром $a=np$ можно приближенно применять вместо биномиального распределения, когда число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании p очень мала ($p<0{,}1$), то есть в каждом отдельном опыте событие A появляется крайне редко. Отсюда происходит использующееся еще иногда для закона Пуассона название «закон редких событий».

2. По закону Пуассона распределена случайная величина, описывающая число событий простейшего потока, произошедших в течение промежутка времени t.

Простейший поток событий. *Потоком событий* называется последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

Интенсивностью потока λ называется среднее число событий, происходящих за единицу времени.

Если $\lambda=\text{const}$, то поток называется *стационарным*. Это свойство означает, что вероятность наступления того или иного числа событий в течение отрезка времени длиной t не зависит от расположения на оси времени этого отрезка, а зависит только от его длины.

Поток называется *ординарным*, если вероятность попадания на малый участок Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него одного события. Грубо говоря, это означает, что события возникают поодиночке, а не группами по два, по три и т. д.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если вероятность попадания того или иного числа событий на какой-то отрезок времени не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним участок, то есть предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем. Эта независимость физически сводится к тому, что события появляются на оси времени в силу случайных причин, индивидуальных для каждого из них.

Поток, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется *простейшим*.

Доказано, что для простейшего потока число событий, попадающих на каждый отрезок времени длиной t, распределено по закону Пуассона с параметром $a=\lambda t$, где λ – интенсивность потока.

Пример 17. Техническая система состоит из 700 однотипных устройств, для каждого из которых вероятность того, что в течение смены это устройство потребует переналадки, равна 0,0004. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют переналадки не более двух устройств.

Решение. Случайная величина X, определяющая число устройств, потребовавших переналадки в течение смены, может принимать значения 0, 1, 2,…, 700. Поскольку вероятности выхода из строя в течение смены для всех устройств одинаковы, случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n=700$, $p=0{,}0004$.

Определим событие A – {в течение смены переналадки потребуют не более двух устройств}. $P(A)=P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$. При больших значениях n

пользоваться формулой Бернулли для определения вероятности событий ($X=i$) довольно затруднительно. В этом случае можно воспользоваться приближенной формулой Пуассона

$$P(A) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \approx \frac{0{,}28^0 e^{-0{,}28}}{0!} + \frac{0{,}28^1 e^{-0{,}28}}{1!} + \frac{0{,}28^2 e^{-0{,}28}}{2!} \approx$$
$$\approx 0{,}7558 + 0{,}2116 + 0{,}0297 = 0{,}9971.$$

Приведем, для сравнения, вероятности событий ($X=i$), $i=0$, 1, 2, вычисленные с использованием формулы Бернулли и формулы Пуассона:

Вероятности событий	Формула Бернулли $P(X=i)=C_n^i p^i q^{n-i}$	Формула Пуассона $P(X=i)=\frac{a^i \cdot e^{-a}}{i!}$
$P(X=0)$	0,75573	0,75578
$P(X=1)$	0,2116989	0,211619
$P(X=2)$	0,029606	0,02967

Как видно, в данном случае формула Пуассона обеспечивает очень хорошее приближение значений $P_n(k)$.

Пример 18. Коммутатор учреждения обеспечивает соединение абонентов по внутренней связи. На основании статистических данных известно, что для некоторого промежутка времени рабочего дня среднее число вызовов, поступающих в течение 1 минуты, равно 1,5. Поток вызовов можно считать простейшим. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что: а) в течение минуты поступит хотя бы один вызов; б) в течение трех минут произойдет не менее четырех вызовов.

Решение. а) Случайная величина X_1, определяющая число вызовов, поступивших в течение минуты, может принимать значения 0, 1, 2, 3,… и, согласно условию, распределена по закону Пуассона с параметром $a=\lambda t=1{,}5$ (так как интенсивность потока $\lambda=1{,}5$; $t=1$[мин]). Обозначим событие: A – {в течение минуты поступит хотя бы один вызов}. Тогда

$$P(A)=P(X_1\ge 1)=1-P(X_1=0)=1-(a^0e^{-a})/0!=1-e^{-1{,}5}=1-0{,}22313=0{,}77687.$$

б) Для определения вероятности события B – {в течение трех минут поступит не менее четырех вызовов} введем в рассмотрение случайную величину X_2, определяющую число вызовов, поступивших в течение трех минут. Эта случайная величина распределена по закону Пуассона с параметром $a=\lambda t=1{,}5\cdot 3=4{,}5$.

$$P(B)=P(X_2\ge 4)=1-P(X_2<4)=$$
$$=1-(P(X_2=0)+P(X_2=1)+P(X_2=2)+P(X_2=3))=$$
$$=1-\left(\frac{4{,}5^0 e^{-4{,}5}}{0!}+\frac{4{,}5^1 e^{-4{,}5}}{1!}+\frac{4{,}5^2 e^{-4{,}5}}{2!}+\frac{4{,}5^3 e^{-4{,}5}}{3!}\right)=1-0{,}3423=0{,}6577.$$

2.4.3 Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина, которая принимает значения, только принадлежащие отрезку $[a, b]$ с постоянной плотностью распределения, называется **распределенной по равномерному закону**.

Из определения следует, что функция плотности распределения вероятностей определяется соотношением

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a;\\ C & \text{при } a\le x\le b;\\ 0 & \text{при } x>b\end{cases}$$

и должна удовлетворять двум требованиям:

1) $f(x)\ge 0$, отсюда $C>0$.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1,\ \int_a^b Cdx=1,\ C(b-a)=1,\ C=\frac{1}{b-a}.$

Таким образом,

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a;\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a\le x\le b;\\ 0 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Найдем функцию распределения данной случайной величины:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0 & \text{при } x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a\le x\le b;\\ 1 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рисунках 12 и 13.

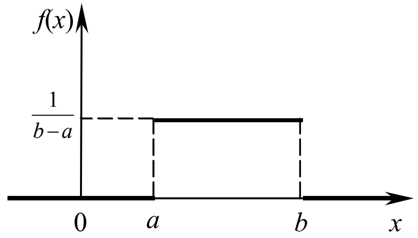


Рисунок 12

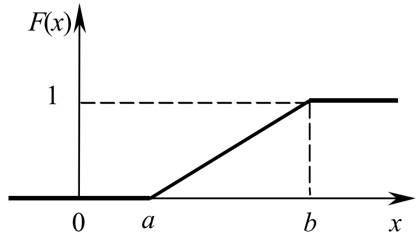


Рисунок 13

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по равномерному закону на участке $[a, b]$, как следует из механической интерпретации (центр массы), равно абсциссе середины участка: $M[X] = (a+b)/2$. Этот же результат можно получить и вычисляя интеграл:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсию случайной величины X также можно найти, исходя из механической интерпретации (момент инерции распределения относительно центра массы): $D[X] = (b-a)^2/12$. Тот же результат можно получить, вычисляя интеграл:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M[X])^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (12)$$

Из (12) следует выражение для **среднего квадратического отклонения** равномерно распределенной случайной величины:

$$\sigma[X] = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Моды равномерное распределения не имеет; его **медиана** из соображений симметрии равна $(a+b)/2$. Из тех же соображений симметрии **коэффициент асимметрии** $A[X] = 0$. **Коэффициент эксцесса** случайной величины X равен –1,2: $Ex[X] = -1{,}2$; как и следовало ожидать, он отрицателен.

Рассмотрим несколько примеров случайных величин, имеющих равномерное распределение.

При проведении измерений некоторой величины с помощью прибора с крупными делениями ошибки округления распределены по равномерному закону. Очевидно, что равномерное распределение имеют и ошибки, возникающие от округления данных при расчетах.

В современной вычислительной технике при моделировании вероятностных процессов часто приходится пользоваться случайной величиной X, имеющей равномерное распределение в пределах от 0 до 1. Эта величина, которую коротко называют «случайным числом от 0 до 1», служит исходным материалом, из которого путем соответствующих преобразований получают случайные величины с любым заданным распределением.

Пример 19. Поезда метрополитена идут с интервалом в 3 минуты. Пассажир приходит на платформу поезда в произвольный момент времени. Найти вероятность того, что он будет ожидать поезд не более одной минуты. Найти среднее время ожидания поезда пассажиром.

Решение. Рассмотрим случайную величину X – время ожидания пассажиром поезда. Все возможные значения данной случайной величины принадлежат отрезку

[0; 3], и, согласно условию, все эти значения равновозможны. Следовательно, случайная величина распределена по равномерному закону с параметрами $a = 0$ и $b = 3$. Функция плотности распределения вероятностей данной случайной величины имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty; 0); \\ 1/3 & \text{при } x \in [0; 3]; \\ 0 & \text{при } x \in (3; \infty). \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что пассажир будет ожидать поезд не более одной минуты:

$$P(0 \le X \le 1) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1/3) dx = 1/3 .$$

Среднее время ожидания поезда пассажиром

$$M[X] = (a+b)/2 = (0+3)/2 = 1{,}5 \text{ [мин]}.$$

Пример 20. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a, b]$. Найти вероятность того, что в результате опыта она отклонится от своего математического ожидания больше, чем на 3σ.

Решение. В данном случае

$$\sigma[X] = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}; \quad 3\sigma[X] = \frac{3(b-a)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(b-a)}{2}.$$

Но при равномерном распределении случайной величины на отрезке $[a, b]$ крайние точки a и b, ограничивающие область возможных значений случайной величины, отстоят от ее математического ожидания $M[X] = (a+b)/2$ на расстоянии $(b-a)/2$, которое меньше, чем $\sqrt{3}(b-a)/2$. Следовательно, случайная величина, распределенная по равномерному закону, не может принимать значения, отстоящие от ее математического ожидания более, чем на 3σ: $P(|X - M[X]| > 3\sigma) = 0$.

2.4.4 Показательное (экспоненциальное) распределение

Непрерывная случайная величина, которая принимает только неотрицательные значения с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0 \end{cases}$$

называется распределенной по показательному закону параметром λ ($\lambda > 0$).

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 1 ,$$

то приведенное определение корректно.

Функция распределения показательно распределенной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ при значениях параметра λ, равных 1 и 2, приведены на рисунках 14 и 15.

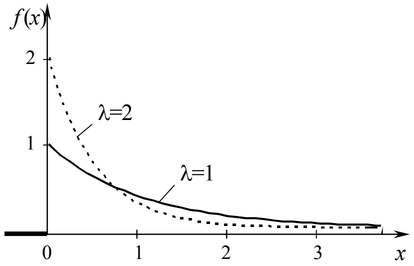


Рисунок 14

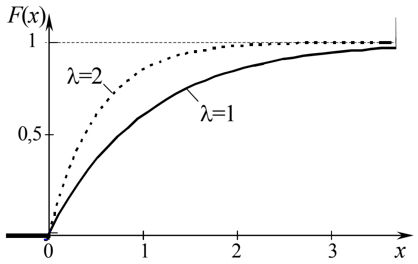


Рисунок 15

Несложно доказать, что для случайной величины X, распределенной по показательному закону,

$$M[X] = \frac{1}{\lambda}; \quad D[X] = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

Коэффициент асимметрии: $A[X] = 2$, как и следовало ожидать, асимметрия показательного распределения положительна. **Коэффициент эксцесса** случайной величины, распределенной по показательному закону положителен и равен 6: $Ex[X] = 6$.

В природе и технике существует множество явлений, которые могут быть, по крайней мере приближенно, описаны показательным законом распределения. Так, в общем случае, результаты измерений временных показателей хорошо аппроксимируются экспоненциальным распределением. В качестве примеров можно привести измерение продолжительности телефонных переговоров, периода атомного распада радиоактивных веществ, а также различные виды «задач обслуживания» (например, измерение времени безотказной работы оборудования, времени ремонта и т. п.). Доказано, что интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром, равным интенсивности потока.

Пример 21. Время безотказной работы радиоэлектронного оборудования является случайной величиной, распределенной по показательному закону. Определить вероятность безотказной работы оборудования в течение десяти часов эксплуатации, если среднее время безотказной работы по статистическим данным составляет 200 часов.

Решение. Согласно условию, математическое ожидание случайной величины X, обозначающей время безотказной работы оборудования, равно 200. Учитывая, что для случайной величины, распределенной по показательному закону, $M[X] = 1/\lambda$, определяем значение параметра: $\lambda = 1/M[X] = 1/200 = 0{,}005$. Функция плотности распределения данной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 0{,}005e^{-0{,}005x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Определим вероятность безотказной работы оборудования в течение десяти часов эксплуатации:

$$P(X \geq 10) = \int_{10}^{\infty} f(x)dx = \int_{10}^{\infty} 0{,}005e^{-0{,}005x}dx = -e^{-0{,}005x}\Big|_{10}^{\infty} = 0 + e^{-0{,}05} = 0{,}95123.$$

Пример 22. Случайная величина X распределена по экспоненциальному закону с параметром λ. Найти вероятность того, что эта случайная величина примет значение, удаленное от ее математического ожидания более чем на 3σ.

Решение. Как известно, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону с параметром λ, равны $1/\lambda$. Тогда

$$P(|X - M[X]| > 3\sigma) = P(|X - 1/\lambda| > 3/\lambda) = P(X < -2/\lambda) + P(X > 4/\lambda).$$

Поскольку случайная величина, распределенная по показательному закону, может принимать только неотрицательные значения,

$$P(|X - M[X]| > 3\sigma) = P(X > 4/\lambda) = F(\infty) - F(4/\lambda) =$$
$$= 1 - e^{-\lambda\infty} - 1 + e^{-\lambda(4/\lambda)} = e^{-4} = 0{,}0183.$$

То есть, примерно, только в 18 случаях из 1000 случайная величина, распределенная по показательному закону, может принимать значения, выходящие за рамки «трехсигмового интервала».

2.4.5 Нормальный закон распределения

Нормальное распределение (иногда называемое законом Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей и математической статистике и занимает среди других законов распределения особое положение. Это объясняется целым рядом причин:

1. Многие случайные величины имеют нормальное или близкое к нормальному распределение.

2. Нормальное распределение хорошо подходит в качестве аппроксимации других распределений (например, биномиального).

3. Нормальное распределение обладает рядом благоприятных математи-

ческих свойств, во многом обеспечивших его широкое применение в теории вероятностей и математической статистике.

Случайная величина X называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения вероятностей задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma > 0$ и m – параметры распределения.

Так как $f(x) > 0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1,$$

то приведенное выше определение корректно. (При проведении преобразований была сделана подстановка $x - m = \sigma\sqrt{2}t$, и в результате получили интеграл Пуассона, который равен $\sqrt{\pi}$.)

Основные свойства нормального распределения:

1. Нормальное распределение полностью определяется двумя параметрами: m и σ. Вероятностный смысл этих параметров таков: m – *математическое ожидание*, σ – *среднее квадратическое отклонение* рассматриваемой случайной величины. То есть для нормального распределения:

$$M[X] = m;\ D[X] = \sigma^2;\ \sigma[X] = \sigma.$$

2. Кривая нормального распределения имеет колоколообразную форму, симметричную относительно прямой $x = m$, и при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$ эта кривая асимптотически приближается к оси абсцисс.

Общий вид графика функции плотности распределения вероятностей $f(x)$ для произвольных значений параметров m и σ изображен на рисунке 16. Под

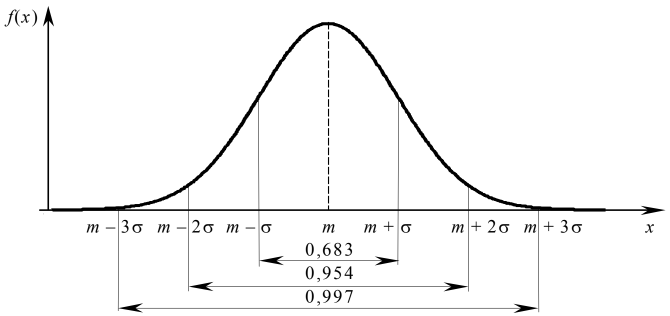


Рисунок 16

графиком указаны вероятности попадания значений случайной величины на отрезки $[m - i\sigma, m + i\sigma]$, $i = 1, 2, 3$ (см. пример 23).

3. Как видно из графика функции $f(x)$, для нормально распределенной случайной величины вероятность получения значений, значительно удаленных от среднего значения m, быстро уменьшается с ростом величины отклонения.

4. *Медиана* и *мода* случайной величины, распределенной по нормальному закону, совпадают и равны математическому ожиданию m.

5. *Коэффициенты асимметрии и эксцесса* нормально распределенной случайной величины равны нулю: $A[X] = 0$; $Ex[X] = 0$.

Тот факт, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами m и σ, символически записывается: $X \sim N(m;\ \sigma)$. Этой случайной величине соответствует следующая функция распределения вероятностей:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

График функции распределения $F(x)$ изображен на рисунке 17.

На рисунках 18 и 19 изображены графики функции $f(x)$, соответствующие различным значениям параметров m и σ.

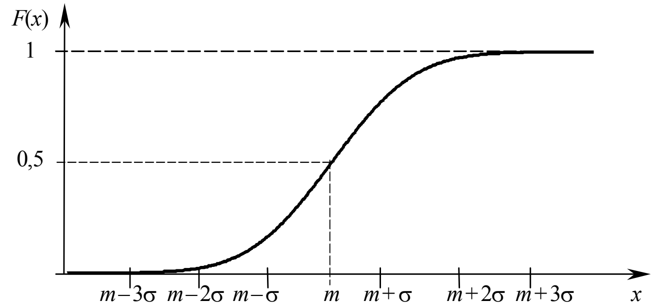


Рисунок 17

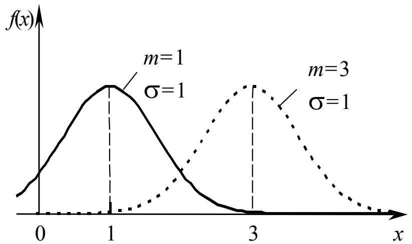


Рисунок 18

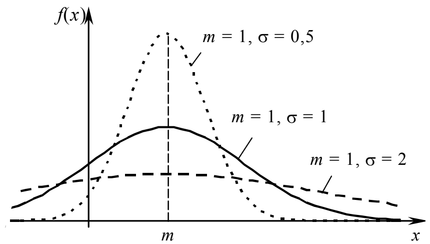


Рисунок 19

Нормированное (стандартизованное) нормальное распределение.

Нормированным (или *стандартизованным*) нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $m=0$ и $\sigma=1$.

Известно, что если случайная величина X распределена нормально с параметрами m и σ, то величина $Z=(X-m)/\sigma$ также распределена нормально, но с параметрами $m=0$, $\sigma=1$ (то есть $Z\sim N(0;1)$). Нормирование распределения ведет просто к перенесению начала координат в центр распределения, то есть к «центрированию», и к масштабированию оси абсцисс в долях σ.

Функция плотности распределения вероятностей стандартного распределения имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

В приложении А приведены значения этой функции для неотрицательных значений аргумента, график функции $\varphi(x)$ изображен на рисунке 20.

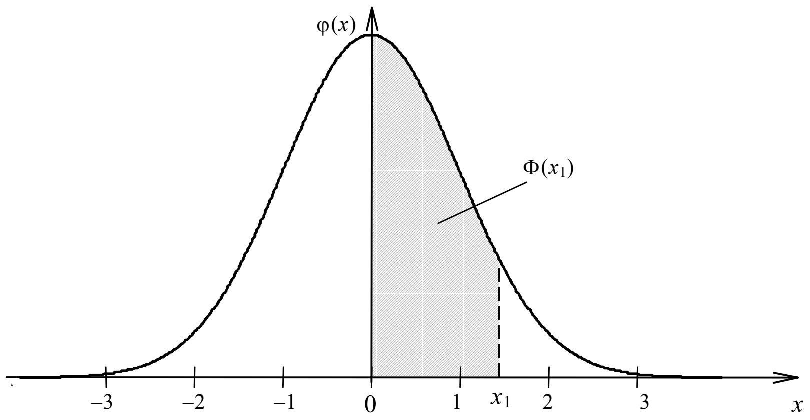


Рисунок 20

Вероятность попадания значения случайной величины на отрезок [α, β].

Вычислим для нормально распределенной случайной величины X вероятность попадания на участок от α до β:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Сделав в интеграле замену переменной $t=(x-a)/\sigma$ (то есть «нормируя» случайную величину) и соответственно изменяя пределы интегрирования, получим

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}}e^{-t^2/2}dt.$$

Как известно, неопределенный интеграл $\int e^{-t^2/2}dt$ не выражается через элементарные функции, но его можно выразить через специальную функцию

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt, \qquad (13)$$

называемую **функцией Лапласа** (или «**интегралом вероятностей**»), для которой составлены таблицы значений. В геометрической интерпретации, как следует из (13), $\Phi(x)$ равна площади фигуры под кривой $\varphi(x)$, опирающейся на отрезок $[0; x]$. На рисунке 20 это фигура выделена штриховкой.

В приложении Б приведены значения функции Лапласа для положительных значений x. Функция $\Phi(x)$ – нечетная, то есть $\Phi(-x)=-\Phi(x)$; при $x>5$ можно принять $\Phi(x)=0{,}5$.

С помощью функции Лапласа вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X на участок от α до β выражается формулой

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right). \qquad (14)$$

Примеры случайных величин, распределенных по нормальному закону.

Известно, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике. Нормальное распределение возникает в тех случаях, когда складывается большое число независимых (или слабо зависимых) случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

причем эти величины сравнимы по порядку своего влияния на рассеивание суммы. Тогда, каковы бы ни были законы распределения отдельных величин X_i, закон распределения их суммы X будет близок к нормальному, причем тем ближе, чем больше число слагаемых n. На практике наиболее часто встречаются именно такие случайные величины.

Результаты измерения длины, массы, времени, ошибки измерения и многие другие случайные величины имеют нормальное или близкое к нормальному распределение.

Рассмотрим **пример.** Пусть производятся измерения некоторой физической величины. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины, так как на результат испытания оказывают влияние очень многие, не зависящие друг от друга случайные факторы: температурные колебания в помещении, воздействия окружающей среды, неточность измерительной шкалы, смена контрольного персонала и т. д.

В зависимости от источников появления ошибок различают *систематические* и *случайные* ошибки.

К *систематическим ошибкам* относятся, например, односторонние отклонения, вызванные, скажем, изменением настройки измерительного прибора или сменой контрольного персонала. Эти ошибки можно устранить путем систематического изучения причины их возникновения.

Случайные ошибки вызваны влиянием множества различных неконтролируемых причин: температурных колебаний, влажности, вибраций в окружающей среде и т. п. Каждый из этих факторов порождает ничтожную «частную ошибку». Но поскольку число этих факторов очень велико, совокупное их действие порождает уже заметную «суммарную ошибку». Полностью исключить воздействие этих факторов невозможно, так как нельзя заранее предусмотреть степень их влияния на результат конкретного измерения. Подобные случайные ошибки вызывают при измерениях отклонения в обе стороны от истинного значения.

Рассматривая общую ошибку как сумму очень большого числа взаимно независимых частных ошибок, мы вправе заключить, что суммарная ошибка имеет распределение, близкое к нормальному. Опыт подтверждает справедливость такого заключения.

Пример 23. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $M[X]=m$, $\sigma[X]=\sigma$. Найти вероятность того, что случайная величина X будет принимать значения, удаленные от математического ожидания не более чем на: а) σ, б) 2σ, в) 3σ.

Решение. Для вычисления искомых вероятностей воспользуемся формулой (14):

а) $$P(m-\sigma < X < m+\sigma) = \Phi\left(\frac{m+\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-\sigma-m}{\sigma}\right) = \Phi(1)-\Phi(-1) =$$

$$= 0{,}34134-(-0{,}34134) = 0{,}68268;$$

б) $$P(m-2\sigma < X < m+2\sigma) = \Phi\left(\frac{m+2\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-2\sigma-m}{\sigma}\right) = \Phi(2)-\Phi(-2) =$$

$$= 0{,}47725-(-0{,}47725) = 0{,}9645;$$

в) $$P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = \Phi\left(\frac{m+3\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-3\sigma-m}{\sigma}\right) = \Phi(3)-\Phi(-3) =$$

$$= 0.49865-(-0.49865) = 0.9972.$$

На рисунке 16 под графиком кривой нормального распределения указаны площади фигур, ограниченных кривой $f(x)$ и осью абсцисс, которые равны вероятностям попадания значения случайной величины на указанные отрезки.

Пример 24. Известно, что для некоторого измерительного устройства систематическая ошибка измерения дальности до объекта равна +20 м. Ошибки измерения распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 75 м. Найти вероятность того, что полученное в результате измерения значение будет отличаться от истинного значения не более чем на 100 м.

Решение. Рассмотрим случайную величину X, характеризующую ошибку измерения дальности. Согласно условию, эта случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами $\mathrm{M}[X]=20$, $\sigma[X]=75$. Определим искомую вероятность с помощью формулы (14):

$$P(|X|\le 100) = P(-100 < X < 100) = \Phi\left(\frac{100-20}{75}\right) - \Phi\left(\frac{-100-20}{75}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}071) - \Phi(-1{,}6) = 0{,}3577 + 0{,}4452 = 0{,}8029.$$

Пример 25. Случайное отклонение размера детали от номинала при изготовлении ее на данном станке является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 5 мк. Систематические отклонения размера изготовленной детали от номинала отсутствуют. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение от номинала не более чем на 2 мк?

Решение. Рассмотрим случайную величину X – отклонение размера детали от номинала. Согласно условию, $M[X]=0$ [мк], $\sigma[X]=5$ [мк]. Найдем вероятность события A – {изготовление годной детали}:

$$P(A) = P(|X|\le 2) = P(-2 \le X \le 2) = \Phi\left(\frac{2-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{5}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}4) = 0{,}15542 + 0{,}15542 = 0{,}31084 \approx 0{,}31.$$

Теперь условие задачи можно рассматривать как последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p=0{,}31$ происходит событие A, и с вероятностью $q=1-p=0{,}69$ событие A не происходит. Вероятность того, что среди n изготовленных деталей будет хотя бы одна годная, представляет собой вероятность наступления события A хотя бы один раз в серии из n независимых испытаний:

$$1-q^n \ge 0{,}9;\ \ q^n \le 0{,}1;\ \ n\ln q \ge \ln 0{,}1;\ \ n \ge \frac{\ln 0{,}1}{\ln q} = \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}69} = 6{,}2.$$

Следовательно, $n \ge 7$, то есть необходимо изготовить не менее 7 деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была хотя бы одна годная.

3 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задача 1. Эксперимент состоит в том, что внутри прямоугольника Ω, изображённого на рисунке 21, случайным образом выбирается точка. События *A*, *B* и *C* состоят, соответственно, в попадании выбранной точки внутрь кругов *A*, *B* и *C*. Изобразить области, попадание в которые соответствует осуществлению событий $A+B-C$, $A+\overline{B\,C}$, $\overline{(A-B)}\,C$, $\overline{A}\,(B+C)$.

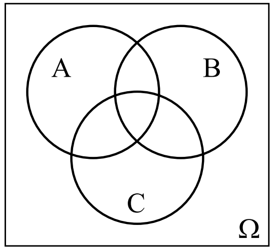
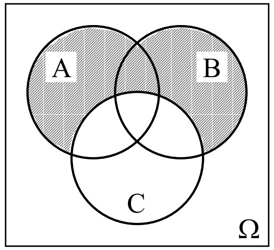
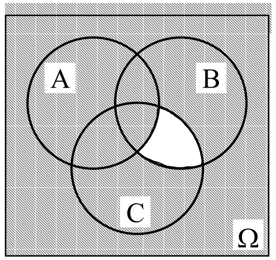


Рисунок 21

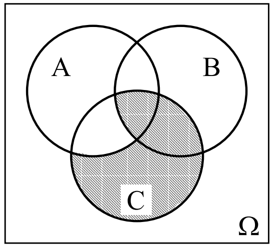
Решение. Области, попадание в которые соответствует осуществлению указанных событий, приведены на следующих рисунках:



A + B – C



$A+\overline{B\,C}$

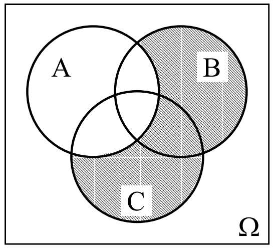


$\overline{(A-B)}\,C$

Задача 2. В урне находятся 4 шара, пронумерованные числами от 1 до 4. Случайным образом, без возвращения, из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что:

а) номера вынутых шаров будут следовать друг за другом (в любом порядке);

б) номера обоих шаров окажутся чётными.



$\overline{A}\,(B+C)$

Решение. Элементарными исходами рассматриваемого эксперимента являются возможные варианты последовательного вынимания двух шаров из урны:

$$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$$

В данном случае пространство элементарных исходов состоит из 12 элементов: $n = 12$.

Поскольку шары вынимаются случайным образом, все элементарные ис-

ходы равновозможны, и для вычисления вероятностей интересующих нас событий можно воспользоваться классическим методом определения вероятностей.

Выпишем исходы, благоприятные событию А – {номера вынутых шаров будут следовать друг за другом (в любом порядке)}:

$$A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)\}.$$

Число исходов, благоприятных событию *A*, равно 6: $m = 6$.

Отсюда: $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$.

Событию В – {номера обоих вынутых шаров окажутся чётными} благоприятны 2 исхода:

$$A = \{(2, 4), (4, 2)\}.$$

Следовательно, $P(B)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

Ответ: а) вероятность того, что номера двух вынутых шаров будут следовать друг за другом (в любом порядке), равна 1/2; б) вероятность того, что номера обоих вынутых шаров окажутся чётными, равна 1/6.

Задача 3. На наблюдательной станции установлены три локатора различных типов. Вероятности обнаружения движущегося объекта при одном цикле обзора для каждого из локаторов известны и равны соответственно 0,75; 0,8 и 0,85. Найти вероятность того, что при одном цикле обзора всех трёх локаторов движущийся объект будет обнаружен: а) только одним локатором; б) не менее чем двумя локаторами.

Решение. Обозначим события:

A_i = {объект обнаружен *i*-м локатором}, $i = 1, 2, 3$;

B = {объект обнаружен только одним локатором};

C = {объект обнаружен не менее чем двумя локаторами}.

Согласно условию $P(A_1) = 0{,}75$; $P(A_2) = 0{,}8$; $P(A_3) = 0{,}85$.

Событие *B* можно представить в виде

$$B = A_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3 + \overline{A}_1\,A_2\,\overline{A}_3 + \overline{A}_1\,\overline{A}_2\,A_3.$$

События $A_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\,A_2\,\overline{A}_3$ и $\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,A_3$ – несовместны.

Полагая, что события A_i ($i = 1, 2, 3$) – независимы, и применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(B) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) =$$
$$= 0{,}75\cdot 0{,}2\cdot 0{,}15 + 0{,}25\cdot 0{,}8\cdot 0{,}15 + 0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}85 = 0{,}095.$$

Здесь

$$P(\overline{A}_1)=1-0{,}75=0{,}25\,,\quad P(\overline{A}_2)=1-0{,}8=0{,}2\,,\quad P(\overline{A}_3)=1-0{,}85=0{,}15\,.$$

Аналогичным образом определим вероятность события С:

$$C=\overline{A}_1\,A_2\,A_3+A_1\,\overline{A}_2\,A_3+A_1\,A_2\,\overline{A}_3+A_1\,A_2\,A_3$$

$$P(C)=P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+$$
$$+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)=$$
$$=0{,}25\cdot0{,}8\cdot0{,}85+0{,}75\cdot0{,}2\cdot0{,}85+0{,}75\cdot0{,}8\cdot0{,}15+0{,}75\cdot0{,}8\cdot0{,}85=0{,}8975.$$

Ответ: а) вероятность того, что движущийся объект будет обнаружен только одним локатором, равна 0,095; б) вероятность того, что движущийся объект будет обнаружен не менее чем двумя локаторами, равна 0,8975.

Задача 4. Электрическая цепь на участке MN собрана по схеме, приведённой на рисунке 22. Все элементы цепи $e1$ – $e8$ выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность безотказной работы в течение времени T участка цепи MN, при условии, что вероятность безотказного функционирования в течение этого промежутка времени каждого из элементов e1–e8 равна 0,8.

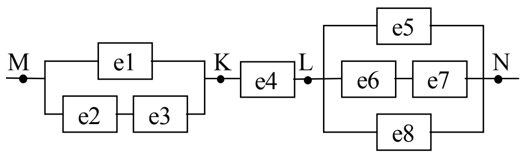


Рисунок 22

Решение. Обозначим события:

A_i = {безотказная работа в течение времени T элемента e_i}, $i=1, 2, \ldots, 8$.

Согласно условию $P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_8)=0{,}8$.

D = {безотказная работа в течение времени T участка цепи MN}.

Для вычисления вероятности события D введём в рассмотрение вспомогательные события:

B_1 = {безотказная работа в течение времени T участка цепи MK},

B_2 = {безотказная работа в течение времени T участка цепи KL},

B_3 = {безотказная работа в течение времени T участка цепи LN}.

Для функционирования участка MN необходима безотказная работа участков MK, KL и LN, т. е. $D=B_1B_2B_3$.

Учитывая, что все элементы цепи выходят из строя независимо друг от друга, события B_1, B_2, B_3 являются независимыми, и для вычисления вероятности события D можно применить теорему умножения вероятностей независимых событий:

$$P(D)=P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3).$$

Для функционирования участка цепи MK необходима безотказная работа хотя бы одной из двух ветвей этого участка. Для безотказной работы первой ветви необходимо функционирование элемента e_1, для безотказной работы второй ветви – одновременное функционирование элементов e_2 и e_3, т. е. $B_1=A_1+A_2A_3$.

Учитывая, что события A_1 и A_2A_3 совместны и все события A_i – независимы, имеем

$$P(B_1)=P(A_1+A_2A_3)=P(A_1)+P(A_2A_3)-P(A_1A_2A_3)=$$
$$=P(A_1)+P(A_2)P(A_3)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}8+0{,}8^2-0{,}8^3=0{,}928.$$

Для функционирования участка KL необходима безотказная работа элемента e_4:

$$B_2=A_4,\quad P(B_2)=P(A_4)=0{,}8.$$

Для вычисления вероятности события B_3 удобно перейти к рассмотрению события $\overline{B}_3$, состоящего в отказе участка цепи LN. Для осуществления события $\overline{B}_3$ необходим одновременный выход из строя элементов e_5, e_8 и хотя бы одного из элементов e_6 и e_7:

$$\overline{B}_3=\overline{A}_5\cdot\left(\overline{A}_6+\overline{A}_7\right)\cdot\overline{A}_8\,.$$

Учитывая, что события $\overline{A}_6$ и $\overline{A}_7$ – совместны, и все события A_i (и соответственно $\overline{A}_i$) – независимы, получим

$$P(\overline{B}_3)=P(\overline{A}_5)\cdot(P(\overline{A}_6)+P(\overline{A}_7)-P(\overline{A}_6)P(\overline{A}_7))\cdot P(\overline{A}_8)=$$
$$=0{,}2\cdot(0{,}2+0{,}2-0{,}2^2)\cdot0{,}2=0{,}0144.$$

где $P(\overline{A}_i)=1-P(A_i)=1-0{,}8=0{,}2$ $(i=1, 2,\ldots, 8)$.

Отсюда $P(B_3)=1-P(\overline{B}_3)=1-0{,}0144=0{,}9856$.

Окончательно, вероятность события D:

$$P(D)=P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3)=0{,}928\cdot0{,}8\cdot0{,}9856=0{,}7317.$$

Ответ: вероятность безотказной работы в течение времени T участка цепи MN равна 0,7317.

Задача 5. Из депо прописки вагон, нуждающийся в ремонте, может быть направлен в одно из трёх ремонтных депо. Производительности этих депо соотносятся как $6:5:4$. Вероятности бездефектного ремонта вагонов для первого, второго и третьего депо соответственно равны 0,9; 0,95 и 0,85.

а) Найти вероятность того, что направленный на ремонт из депо приписки вагон будет отремонтирован без дефектов.

б) Известно, что направленный на ремонт вагон был отремонтирован без дефектов. Найти вероятность того, что он подвергался ремонту во втором депо.

Решение. Относительно условий рассматриваемого случайного эксперимента, состоящего в направлении неисправного вагона в одно из ремонтных депо, можно выдвинуть три несовместные гипотезы:

$H_1 = \{$вагон ремонтировался в первом депо$\}$;

$H_2 = \{$вагон ремонтировался во втором депо$\}$;

$H_3 = \{$вагон ремонтировался в третьем депо$\}$.

Причём $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$.

Согласно условию $P(H_1):P(H_2):P(H_3) = 6:5:4$.

Учитывая свойство вероятностей гипотез $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$, определим:

$$P(H_1) = \frac{6}{15}; \quad P(H_2) = \frac{5}{15}; \quad P(H_3) = \frac{4}{15}.$$

Условные вероятности события $A = \{$вагон отремонтирован без дефектов$\}$ при осуществлении этих гипотез известны и равны:

$$P(A\,|\,H_1) = 0{,}9; \quad P(A\,|\,H_2) = 0{,}95; \quad P(A\,|\,H_3) = 0{,}85.$$

а) Для определения вероятности события A воспользуемся формулой полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1) + P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2) + P(H_3)\cdot P(A\,|\,H_3) =$$

$$= \frac{6}{15}\cdot 0{,}9 + \frac{5}{15}\cdot 0{,}95 + \frac{4}{15}\cdot 0{,}85 \approx 0{,}903.$$

б) Для определения вероятности того, что вагон подвергался ремонту во втором депо, при условии, что он был отремонтирован без дефектов, воспользуемся формулой Байеса

$$P(H_2\,|\,A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)} = \frac{\frac{5}{15}\cdot 0{,}95}{0{,}903} = 0{,}351.$$

Ответ: а) вероятность того, что направленный на ремонт из депо приписки вагон будет отремонтирован без дефектов, равна 0,903;

б) вероятность того, что вагон подвергался ремонту во втором депо, при условии, что он был отремонтирован без дефектов, равна 0,351.

Задача 6. Для приборов определённого вида известно, что 70 % этих приборов не требуют дополнительной переналадки в течение гарантийного срока. Найти вероятность того, что среди восьми эксплуатируемых в течение гарантийного срока приборов данного вида потребуется переналадка:

а) только одного прибора;

б) более трёх приборов.

Решение. Условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 8$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события $A = \{$прибор потребует дополнительной переналадки в течение гарантийного срока$\}$ одинакова и равна 0,3: $p = 0{,}3$; $q = 0{,}7$.

а) Для вычисления вероятности события $B = \{$в течение гарантийного срока потребуется переналадка только одного прибора$\}$ воспользуемся формулой Бернулли

$$P(B) = P_8(1) = C_8^1 p^1 q^7 = \frac{8!}{1!\cdot 7!}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^7 \approx 0{,}198.$$

б) При вычислении вероятности события $C = \{$в течение гарантийного срока потребуется переналадка более трёх приборов$\}$ удобно перейти к рассмотрению события $\overline{C} = \{$в течение гарантийного срока потребуется переналадка не более трёх приборов$\}$:

$$P(C) = P_8(m>3) = 1 - P_8(m\le 3) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - (P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) + P_8(3)).$$

Применяя формулу Бернулли, вычисляем:

$$P_8(0) = C_8^0\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^8 = 0{,}7^8 \approx 0{,}058;$$

$$P_8(1) = C_8^1\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}7^7 = 8\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^7 \approx 0{,}198;$$

$$P_8(2) = C_8^2\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^6 = 28\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^6 \approx 0{,}297;$$

$$P_8(3) = C_8^3\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^5 = 56\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^5 \approx 0{,}254.$$

$$P(C) = P_8(m>3) = 1 - (0{,}058 + 0{,}198 + 0{,}297 + 0{,}254) = 1 - 0{,}807 = 0{,}193.$$

Ответ: а) вероятность того, что в течение гарантийного срока потребуется переналадка только одного прибора, равна 0,198; б) вероятность того, что в течение гарантийного срока потребуется переналадка более трёх приборов, равна 0,193.

Задача 7. Известно, что 75 % изготавливаемых фабрикой изделий удовлетворяют требованиям высшего качества. Найти вероятность того, что в поставляемой партии из 100 изделий окажутся:

а) ровно 80 изделий высшего качества;

б) от 60 до 80 изделий высшего качества.

Решение. Условие задачи можно рассматривать как серию из $n=100$ независимых испытаний, состоящих в проверке качества изготовленных изделий, в каждом из которых с вероятностью $p=0{,}75$ может осуществиться событие $A=\{$поставляемое изделие удовлетворяет требованиям высшего качества$\}$.

Так как число испытаний достаточно велико, для вычисления вероятностей событий $B=\{$в партии из 100 поставляемых изделий окажется ровно 80 изделий высшего качества$\}$ и $C=\{$в партии из 100 поставляемых изделий окажется от 60 до 80 изделий высшего качества$\}$ можно воспользоваться приближёнными формулами Муавра-Лапласа.

а) Для вычисления вероятности события B воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. В данном случае: $n=100$; $p=0{,}75$; $q=0{,}25$; $m=80$

$$P(B)=P_{100}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}=\frac{5}{4{,}33}\approx 1{,}15.$$

По таблицам значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ находим $\varphi(1{,}15)=0{,}2059$.

$$P(B)=P_{100}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}\cdot 0{,}2059=0{,}0476.$$

б) Для вычисления вероятности события C воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа при $n=100$; $p=0{,}75$; $q=0{,}25$; $k_1=60$; $k_2=80$

$$P(C)=P_{100}(60\le m\le 80)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)\ ;$$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{60-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}=\frac{-15}{4{,}33}\approx -3{,}46;$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}=\frac{5}{4{,}33}\approx 1{,}15.$$

По таблицам значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ находим $\Phi(-3{,}46)=-0{,}4997$, $\Phi(1{,}15)=0{,}3749$.

Таким образом,

$$P(C)=P_{100}(60\le m\le 80)=0{,}3749-(-0{,}4997)=0{,}9746\,.$$

Ответ: а) вероятность того, что в поставляемой партии из 100 изделий окажется ровно 80 изделий высшего качества, равна 0,0476; б) вероятность того, что в поставляемой партии из 100 изделий окажется от 60 до 80 изделий высшего качества, равна 0,9746.

Задача 8. Для определённой в условии задачи дискретной случайной величины:

1) построить ряд распределения и столбцовую диаграмму;

2) найти функцию распределения и построить её график;

3) вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, моду, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Студент пришел на экзамен, зная ответы на 3/4 вопросов по каждому из трёх разделов программы. Случайная величина X – число вопросов, на которые он сможет ответить при условии, что экзаменационный билет содержит по одному вопросу из каждого раздела.

Решение. 1) Возможные значения данной случайной величины X: 0, 1, 2, 3. Условие задачи можно рассматривать как серию из $n=3$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события $A=\{$студент сумеет ответить на поставленный вопрос$\}$ равна 3/4. В данном случае для вычисления вероятностей возможных значений случайной величины X можно воспользоваться формулой Бернулли:

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}\ ;$$

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{64}\ ;$$

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}\ ;$$

$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{27}{64}\ .$$

(Проверим, что $\sum_{i=1}^{4} p_i = \sum_{j=0}^{3} P(x=j) = 1$.)

Ряд распределения данной случайной величины X имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

Столбцовая диаграмма, соответствующая этому ряду распределения, приведена на рисунке 23.

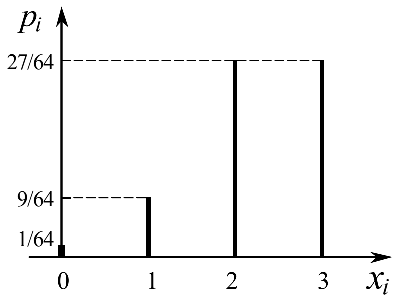


Рисунок 23

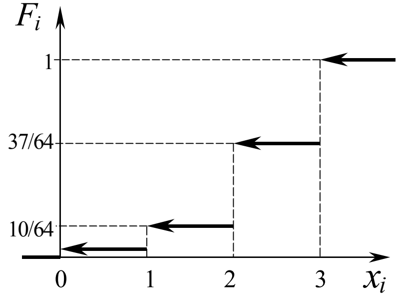


Рисунок 24

2) Вычислим функцию распределения данной случайной величины

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i):$$

при $x \in (-\infty, 0]$ $F(x) = 0$;

при $x \in (0, 1]$ $F(x) = P(X=0) = \frac{1}{64}$;

при $x \in (1, 2]$ $F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{10}{64}$;

при $x \in (2, 3]$ $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$;

при $x \in (3, +\infty)$ $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$

$= \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = 1.$

Итак, функция распределения рассматриваемой случайной величины

имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in (-\infty, 0]; \\ \frac{1}{64} & \text{при} \quad x \in (0, 1]; \\ \frac{10}{64} & \text{при} \quad x \in (1, 2]; \\ \frac{37}{64} & \text{при} \quad x \in (2, 3]; \\ 1 & \text{при} \quad x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведён на рисунке 24.

3) Вычислим числовые характеристики данной случайной величины.

Математическое ожидание

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{9}{64} + 2 \cdot \frac{27}{64} + 3 \cdot \frac{27}{64} = 2\frac{1}{4},$$

т. е. среднее число вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 2,25.

Как следует из ряда распределения, данная случайная величина имеет две моды: $x_{\text{mod}} = 2$, $x_{\text{mod}} = 3$, т. е. наиболее вероятное число вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 2 и 3.

Дисперсия

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (M[X])^2 = 0 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{9}{64} + 4 \cdot \frac{27}{64} + 9 \cdot \frac{27}{64} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$,

т. е. среднее квадратическое отклонение числа вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 0,866.

Задача 9. Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$. Требуется:

1) определить значение параметра c;

2) построить график функции плотности распределения вероятностей;

3) найти функцию распределения данной случайной величины и построить её график;

4) вычислить числовые характеристики данной случайной величины: математическое ожидание, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратичное отклонение;

5) найти вероятность того, что данная случайная величина примет значение, принадлежащее отрезку [a; b]:

$$f(x)=\begin{cases} c-x^2 & \text{при} \quad x\in[0,1]; \\ 0 & \text{при} \quad x\notin[0,1]; \end{cases} \qquad \begin{matrix} a=0, \\ b=0{,}75. \end{matrix}$$

Решение. 1) Для определения неизвестного параметра c воспользуемся соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

В данном случае имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{1}(c-x^2)dx+\int_{1}^{+\infty}0dx=\int_{0}^{1}(c-x^2)dx=cx-\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=c-\frac{1}{3}=1.$$

Отсюда $c=4/3$.

Таким образом, функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} \frac{4}{3}-x^2 & \text{при} \quad x\in[0,1]; \\ 0 & \text{при} \quad x\notin[0,1]. \end{cases}$$

2) График функции $f(x)$ изображён на рисунке 25.

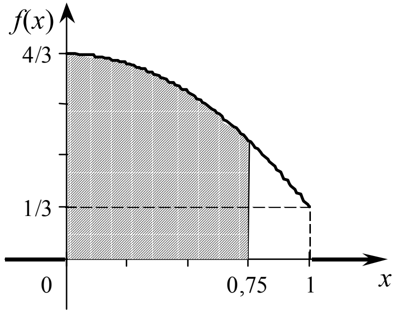


Рисунок 25

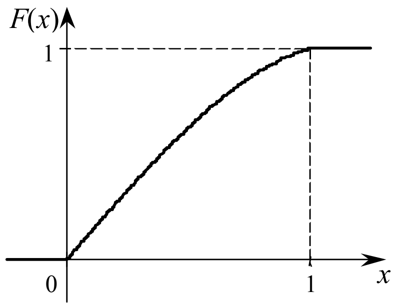


Рисунок 26

3) Вычислим функцию распределения данной случайной величины

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt:$$

при $x\in(-\infty,0]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0;$

при $x\in(0,1]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}\left(\frac{4}{3}-t^2\right)dt=\left(\frac{4t}{3}-\frac{t^3}{3}\right)\bigg|_0^x=$

$$=\frac{4}{3}x-\frac{x^3}{3}=\frac{1}{3}x(4-x^2);$$

при $x\in(1,+\infty)$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{1}\left(\frac{4}{3}-t^2\right)dt+\int_{1}^{x}0dt=$

$$=\left(\frac{4}{3}t-\frac{t^3}{3}\right)\bigg|_0^1=1.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\in(-\infty,0); \\ \frac{1}{3}x\left(4-x^2\right) & \text{при} \quad x\in[0,1]; \\ 1 & \text{при} \quad x\in(1,+\infty). \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведён на рисунке 26.

4) Вычислим числовые характеристики данной случайной величины.

Математическое ожидание:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0dx+\int_{0}^{1}x\cdot\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx+\int_{1}^{+\infty}x\cdot 0dx=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-(M[X])^2=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{1}x^2\cdot\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx+\int_{1}^{+\infty}x^2\cdot 0dx-\left(\frac{5}{12}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\bigg|_0^1-\frac{25}{144}=$$

$$=\frac{4}{9}-\frac{1}{5}-\frac{25}{144}\approx 0{,}0708.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0{,}0708}\approx 0{,}266\,.$$

Мода данной случайной величины, как следует из графика функции $f(x)$, равна нулю.

Для определения медианы воспользуемся соотношением $F(x_{\text{med}})=0{,}5$.

Решая уравнение $\frac{1}{3}x_{\text{med}}(4-x_{\text{med}}{}^2)=0{,}5$, получим $x_{\text{med}}\approx 0{,}39$.

5) Для вычисления вероятности того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее отрезку [0; 0,75], можно воспользоваться, например, соотношением $P(б\le X\le в)=\int\limits_{б}^{в} f(x)dx$.

В данном случае

$$P(0\le X\le 0{,}75)=\int\limits_0^{0{,}75}\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx=\left.\left(\frac{4}{3}x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^{0{,}75}=1-0{,}140625\approx 0{,}86.$$

На рисунке 25 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности $P(0\le X\le 0{,}75)\approx 0{,}86$.

Задача 10. Поток отказов оборудования в течение рабочей смены удовлетворяет требованиям простейшего потока событий. Найти вероятность того, что в течение смены произойдёт не более двух отказов оборудования, если известно, что вероятность хотя бы одного отказа в течение рабочей смены равна 0,9.

Решение. Поскольку поток отказов можно считать простейшим, случайная величина X, определяющая число отказов оборудования в течение смены, распределена по закону Пуассона. Возможные значения данной случайной величины: 0, 1, 2,…, m,…, а вероятность каждого из значений определяется по формуле

$$P(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

где a – интенсивность потока отказов.

Согласно условию вероятность события A – {в течение смены произойдёт хотя бы один сбой} равна 0,9: $P(A)=0{,}9$. Из соотношения

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(X=0)=1-\frac{a^0}{0!}e^{-a}=1-e^{-a}=0{,}9$$

определим неизвестный параметр a: $a=-\ln 0{,}1=2{,}3$.

Теперь можно вычислить вероятность события B = {в течение смены произойдёт не более двух отказов оборудования}:

$$P(B)=P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=\frac{a^0}{0!}e^{-a}+\frac{a^1}{1!}e^{-a}+\frac{a^2}{2!}e^{-a}=e^{-2{,}3}+2{,}3\cdot e^{-2{,}3}+2{,}645\cdot e^{-2{,}3}\approx 0{,}41.$$

Ответ: вероятность того, что в течение рабочей смены произойдёт не более двух отказов оборудования, равна 0,41.

Задача 11. Размер изготавливаемой на станке детали является случайной величиной, распределённой по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 15 мм. Определить среднее квадратическое отклонение размера детали, если известно, что 95,44 % деталей имеют размер от 14 до 16 мм.

Решение. Согласно условию случайная величина X, определяющая размер изготавливаемой на станке детали, распределена по нормальному закону, причём $M[X]=m=15$ мм, $P(14\le X\le 16)=0{,}9544$.

Используем соотношение

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

В данном случае

$$P(14\le X\le 16)=\Phi\left(\frac{16-15}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{14-15}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right).$$

Учитывая, что $\Phi(x)$ – нечётная функция, получим

$$P(14\le X\le 16)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)=0{,}9544\,.$$

Отсюда $\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)=0{,}4772$.

По таблицам значений функции Ф (х) определяем, что Ф (2,00) = 0,4772.

Следовательно, $\sigma=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Ответ: среднее квадратическое отклонение размера изготавливаемых на станке деталей равно 0,5.

4 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Номера задач, которые необходимо выполнить, определяются с помощью приведённой ниже таблицы. В первом столбце указан номер варианта контрольной работы, который соответствует двум последним цифрам шифра студента. В последующих столбцах приведены номера задач, которые следует выбрать из одиннадцати разделов.

Номера разделов, задачи из которых являются необходимыми для зачета контрольной работы, и общее число задач, которые должны быть выполнены, указываются преподавателем.

Для большинства задач после условия, в скобках, указаны ответы к ним.

Номер варианта	**Номера разделов**										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
01	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
02	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
03	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
04	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
05	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
06	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
07	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
08	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
09	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1	2
13	13	14	15	16	17	18	19	20	1	2	3
14	14	15	16	17	18	19	20	1	2	3	4
15	15	16	17	18	19	20	1	2	3	4	5
16	16	17	18	19	20	1	2	3	4	5	6
17	17	18	19	20	1	2	3	4	5	6	7
18	18	19	20	1	2	3	4	5	6	7	8
19	19	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	1
22	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	2
23	3	5	7	9	11	13	15	17	19	1	3
24	4	6	8	10	12	14	16	18	20	2	4

Номер варианта	**Номера разделов**										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
25	5	7	9	11	13	15	17	19	1	3	5
26	6	8	10	12	14	16	18	20	2	4	6
27	7	9	11	13	15	17	19	1	3	5	7
28	8	10	12	14	16	18	20	2	4	6	8
29	9	11	13	15	17	19	1	3	5	7	9
30	10	12	14	16	18	20	2	4	6	8	10
31	11	13	15	17	19	1	3	5	7	9	11
32	12	14	16	18	20	2	4	6	8	10	12
33	13	15	17	19	1	3	5	7	9	11	13
34	14	16	18	20	2	4	6	8	10	12	14
35	15	17	19	1	3	5	7	9	11	13	15
36	16	18	20	2	4	6	8	10	12	14	16
37	17	19	1	3	5	7	9	11	13	15	17
38	18	20	2	4	6	8	10	12	14	16	18
39	19	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
40	20	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
41	1	4	7	10	13	16	19	2	5	8	11
42	2	5	8	11	14	17	20	3	6	9	12
43	3	6	9	12	15	18	1	4	7	10	13
44	4	7	10	13	16	19	2	5	8	11	14
45	5	8	11	14	17	20	3	6	9	12	15
46	6	9	12	15	18	1	4	7	10	13	16
47	7	10	13	16	19	2	5	8	11	14	17
48	8	11	14	17	20	3	6	9	12	15	18
49	9	12	15	18	1	4	7	10	13	16	19
50	10	13	16	19	2	5	8	11	14	17	20
51	11	14	17	20	3	6	9	12	15	18	1
52	12	15	18	1	4	7	10	13	16	19	2
53	13	16	19	2	5	8	11	14	17	20	3
54	14	17	20	3	6	9	12	15	18	1	4
55	15	18	1	4	7	10	13	16	19	2	5
56	16	19	2	5	8	11	14	17	20	3	6
57	17	20	3	6	9	12	15	18	1	4	7
58	18	1	4	7	10	13	16	19	2	5	8
59	19	2	5	8	11	14	17	20	3	6	9
60	20	3	6	9	12	15	18	1	4	7	10
61	1	5	9	13	17	1	5	9	13	17	1
62	2	6	10	14	18	2	6	10	14	18	2
63	3	7	11	15	19	3	7	11	15	19	3
64	4	8	12	16	20	4	8	12	16	20	4

Номер варианта	Номера разделов										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
65	5	9	13	17	1	5	9	13	17	1	5
66	6	10	14	18	2	6	10	14	18	2	6
67	7	11	15	19	3	7	11	15	19	3	7
68	8	12	16	20	4	8	12	16	20	4	8
69	9	13	17	1	5	9	13	17	1	5	9
70	10	14	18	2	6	10	14	18	2	6	10
71	11	15	19	3	7	11	15	19	3	7	11
72	12	16	20	4	8	12	16	20	4	8	12
73	13	17	1	5	9	13	17	1	5	9	13
74	14	18	2	6	10	14	18	2	6	10	14
75	15	19	3	7	11	15	19	3	7	11	15
76	16	20	4	8	12	16	20	4	8	12	16
77	17	1	5	9	13	17	1	5	9	13	17
78	18	2	6	10	14	18	2	6	10	14	18
79	19	3	7	11	15	19	3	7	11	15	19
80	20	4	8	12	16	20	4	8	12	16	20
81	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11
82	2	7	12	17	2	7	12	17	2	7	12
83	3	8	13	18	3	8	13	18	3	8	13
84	4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14
85	5	10	15	20	5	10	15	20	5	10	15
86	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16
87	7	12	17	2	7	12	17	2	7	12	17
88	8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18
89	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14	19
90	10	15	20	5	10	15	20	5	10	15	20
91	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1
92	12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2
93	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18	3
94	14	19	4	9	14	19	4	9	14	19	4
95	15	20	5	10	15	20	5	10	15	20	5
96	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6
97	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2	7
98	18	3	8	13	18	3	8	13	18	3	8
99	19	4	9	14	19	4	9	14	19	4	9
100	20	5	10	15	20	5	10	15	20	5	10

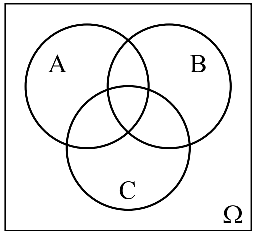


Рисунок 27

Задание 1

Эксперимент состоит в том, что внутри прямоугольника Ω, изображенного на рисунке 27, случайным образом выбирается точка. События *A*, *B* и *C* состоят, соответственно, в попадании выбранной точки внутрь кругов *A*, *B* и *C*. Изобразить области, попадание в которые соответствует осуществле-

1.1. $AB - C$, $\overline{A(B+C)}$, $A+B+\overline{C}$, $\overline{A}(B+C)$.

1.2. $A - BC$, $\overline{(A+B)}C$, $(A+B)\overline{C}$, $A\overline{B}C$.

1.3. $A+\overline{BC}$, $A\overline{BC}$, $B(A-C)$, $B\overline{(A+C)}$.

1.4. $B+AC$, $\overline{(A-B)}C$, $(A+B)\overline{C}$, $C-A+\overline{B}$.

1.5. $(A-B)C$, $(A+B)\overline{C}$, $\overline{(A+B+C)}$, $A\overline{(B-C)}$.

1.6. $A-C+B$, $\overline{A}-BC$, $C(A+\overline{B})$, $\overline{C}(A+B)$.

1.7. $C-A+B$, $\overline{AB}-C$, $(A-B)\overline{C}$, $(\overline{A}-\overline{B})C$.

1.8. $AB-C$, $\overline{A}+\overline{B}-C$, $(\overline{A+B})-C$, $A\overline{BC}$.

1.9. $A(B-C)$, $\overline{A}-\overline{B}+C$, $(\overline{A+B})C$, $(\overline{A}+\overline{B})C$.

1.10. $C-AB$, $(\overline{B-C})A$, $(B+C)\overline{A}$, $\overline{A}-\overline{B}-C$.

1.11. $A-(B+C)$, $(\overline{A+B+C})$, $\overline{C}(\overline{A}+B)$, $\overline{C}(A-B)$.

1.12. $A+B-C$, $(\overline{A+C})\overline{B}$, $\overline{(A-C)B}$, $A+\overline{B}+C$.

1.13. $AB-C$, $C+(\overline{A-B})$, $C(\overline{A+B})$, $A-\overline{B}+C$.

1.14. $C-A+B$, $A-(\overline{B+C})$, $A-\overline{B}+\overline{C}$, $(A-B)\overline{C}$.

1.15. $B-(C+A)$, $AB\overline{C}$, $C-(\overline{A+B})$, $C+(\overline{A-B})$.

1.16. $A-B+C$, $(\overline{A-C})B$, $\overline{B}(A+C)$, $\overline{AB}-\overline{C}$.

1.17. $A-B-C$, $(C-B)\overline{A}$, $\overline{(C+B)}A$, $AB+\overline{C}$.

1.18. $A+BC$, $\overline{AB}-C$, $\overline{A}(B+C)$, $\overline{AB}C$.

1.19. $AC-B$, $\overline{AC}+B$, $\overline{A}+\overline{B}+C$, $(A-C)\overline{B}$.

1.20. $A-B+C$, $A+C-B$, $\overline{A}-\overline{B}+C$, $C\overline{(A-B)}$.

Задание 2

2.1. Какова вероятность того, что выбранное наугад двузначное число будет: а) кратно трем (0,3333); б) не менее 70? (0,3333)

2.2. Какова вероятность того, что выбранное наугад двузначное число будет: а) кратно пяти (0,2); б) принадлежать отрезку [30; 60]? (0,3444)

2.3. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) красным (0,3333); б) цветным (т. е. не белым)? (0,5)

2.4. Студенту во время экзаменационной сессии необходимо сдать четыре экзамена: по математике, физике, химии и теоретической механике. Предполагая все варианты следования экзаменов друг за другом равновозможными, найти вероятность того, что: а) экзамены по математике и физике будут следовать друг за другом (в любом порядке) (0,5); б) экзамен по физике будет первым. (0,25)

2.5. Студенту во время экзаменационной сессии необходимо сдать четыре экзамена: по математике, физике, химии и теоретической механике. Предполагая все варианты следования экзаменов друг за другом равновозможными, найти вероятность того, что: а) экзамен по физике будет не ранее, чем экзамен по химии (0,5); б) экзамен по теоретической механике будет первым, а экзамен по химии – последним. (0,0833)

2.6. В связке имеются 7 различных ключей, только одним из которых можно открыть дверь. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть им дверь. Ключ, оказавшийся неподходящим, больше не используется. Найти вероятность того, что: а) дверь будет открыта первым ключом (0,143); б) для открытия двери понадобится не более трех попыток. (0,4286)

2.7. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набирает их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что: а) номер набран правильно с первой попытки (0,05); б) для попадания по нужному номеру понадобится не более четырех попыток. (0,2)

2.8. При наборе телефонного номера абонент набирает три последние цифры наугад, помня только, что это цифры 1, 3, 7 в каком-то порядке. Найти вероятность того, что: а) номер будет набран правильно с первой попытки (0,1667); б) для определения нужного номера понадобится не более пяти попыток. (0,8333)

2.9. Из пяти карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 произвольным образом выбираются две и укладываются на стол в порядке их появления. Предполагая, что все возможные исходы данного опыта равноправны, найти вероятность того, что полученное таким образом двузначное число будет: а) кратно пяти (0,2); б) не менее двадцати. (0,8)

2.10. Из пяти карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 произвольным образом выбираются две и укладываются на стол в порядке их появления. Предполагая,

что все возможные исходы данного опыта равноправны, найти вероятность того, что полученное таким образом двузначное число будет: а) состоять из цифр «4» и «5» (0,1); б) не более 40. (0,6)

2.11. Производится подбрасывание двух игральных костей. Чему равна вероятность того, что: а) на обеих костях выпадет равное число очков (0,1667); б) на обеих костях выпадет четное число очков? (0,25)

2.12. Производится подбрасывание двух игральных костей. Чему равна вероятность того, что: а) на костях выпадет разное число очков (0,8333); б) на одной кости выпадет в два раза больше очков, чем на другой? (0,1667)

2.13. В урне находятся три шара с номерами 1, 2, 3. Случайным образом эти шары один за другим вынимаются из урны. Предполагая все варианты появления шаров равновозможными, найти вероятность того, что: а) шары будут вынуты в порядке: 1 – 2 – 3 (0,1667); б) первым появится шар с номером «3». (0,3333)

2.14. В урне находятся три шара с номерами 1, 2, 3. Случайным образом эти шары один за другим вынимаются из урны. Какова вероятность того, что: а) вторым появится шар с номером «2» (0,3333); б) шар с номером «3» появится не ранее, чем шар с номером «1»? (0,5)

2.15. Подбрасываются четыре монеты. Какова вероятность того, что: а) хотя бы одна монета упадет кверху гербом (0,9375); б) герб выпадет ровно на двух монетах? (0,375)

2.16. Подбрасываются четыре монеты. Какова вероятность того, что: а) не менее двух монет упадут кверху цифрами (0,6875); б) все монеты упадут кверху гербом? (0,0625)

2.17. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 1 до 30 включительно будет: а) не менее 20 (0,3667); б) кратно четырем? (0,2333)

2.18. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 1 до 30 включительно будет: а) содержать цифру «1» (0,4); б) кратно трем? (0,3333)

2.19. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона: а) будет нечетным (0,5); б) будет принадлежать отрезку [40; 60]. (0,21)

2.20. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона: а) будет не менее 70 (0,31); б) будет содержать цифру «9». (0,19)

Задание 3

3.1. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди вынимают по одному билету. Найти вероятность того, что: а) обоим студентам достанутся «хорошие» билеты (0,0333); б) хотя бы одному из студентов достанется «хороший» билет. (0,3667)

3.2. На предприятии брак составляет в среднем 3 % от общего выпуска изделий. Известно, что изделия высшего сорта составляют 85 % стандартной продукции. Какова вероятность того, что выбранное наугад изделие из произведенных на этом предприятии будет высшего сорта? (0,8245)

3.3. Для изготовления детали необходимы три основные операции. Вероятность появления брака на первой операции равна 0,01, на второй – 0,02 и на третьей – 0,025. Определить вероятность изготовления стандартной детали при условии, что появления брака на отдельных операциях – события независимые. (0,946)

3.4. При передаче сообщения 10 % букв искажаются и принимаются неверно. Найти вероятность того, что все семь букв передаваемого слова будут приняты правильно. (0,4783)

3.5. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы одинаковы и равны 0,9, вероятность ответить на третий вопрос равна 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: а) на все вопросы (0,648); б) по крайней мере на два вопроса. (0,954)

3.6. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех независимых выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле. (0,8)

3.7. Имеются две урны, в каждой из которых содержится по 10 шаров. В первой урне: 5 белых, 3 черных и 2 красных; во второй: 4 белых, 3 черных и 3 красных. Из обеих урн вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что вынутые шары будут одного цвета. (0,35)

3.8. Прибор состоит из пяти блоков, каждый из которых независимо от других в течение времени эксплуатации прибора может выйти из строя. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого блока равна 0,95. Для безотказной работы прибора в целом необходима безотказная работа всех блоков. Найти вероятность того, что в течение времени эксплуатации прибор будет работать безотказно. (0,7738)

3.9. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за объектом, объект обнаруживается с вероятностью 0,75. Обнаружение объекта при каждом цикле происходит независимо от результатов других циклов обзора. Какова вероятность того, что в результате четырех циклов объект будет обнаружен хотя бы один раз? (0,9961)

3.10. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса из трех, содержащихся в билете? (0,9064)

3.11. Над изготовлением изделия работают последовательно четверо рабочих. Качество изделия при передаче следующему рабочему не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью 0,05, второй с вероятностью 0,07. Для третьего и четвертого рабочих эти вероятности соответственно равны 0,03 и 0,06. Найти вероятность получения годного изделия. (0,8056)

3.12. При каждом включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включать зажигание не более трех раз. (0,999)

3.13. В урне находятся 4 белых и 5 черных шаров. Случайным образом извлекают два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара окажутся белыми (0,1667); б) будут вынуты шары разного цвета. (0,5556)

3.14. В среднем за смену на станцию прибывают скорые, пассажирские и грузовые поезда в отношении $2:5:8$. Найти вероятность того, что первые три поезда проследуют в порядке: грузовой – пассажирский – грузовой. (0,0948)

3.15. Вероятности попадания в цель каждого из трех стрелков соответственно равны: 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки произвели залп. Найти вероятность: а) только одного попадания (0,092); б) хотя бы одного попадания (0,994).

3.16. Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на выстрел по второй мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени. (0,75)

3.17. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. По условиям приема, события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит вызов. (0,664)

3.18. На контроль поступила партия деталей из цеха. Известно, что в среднем 5 % всех деталей не удовлетворяют стандарту. Сколько нужно испытать деталей, чтобы с вероятностью не менее чем 0,95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь? (59)

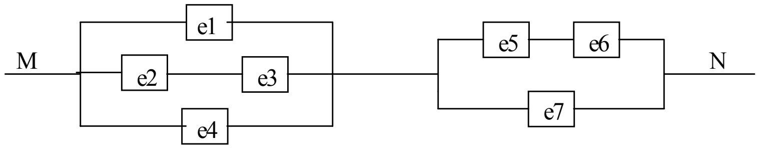
3.19. Имеются два ящика, содержащие типовые элементы замены (ТЭЗ). В первом ящике 25 исправных и 5 неисправных, во втором – 27 исправных и 3 неисправных. Из каждого ящика наугад вынимается по одному ТЭЗ. Найти вероятность того, что оба ТЭЗ будут исправными. (0,75)

3.20. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,05. Какова вероятность того, что не произойдет ни одной неполадки за 3 смены? (0,857)

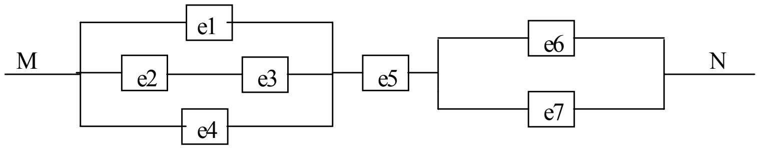
Задание 4

Электрическая цепь на участке *MN* собрана по схеме, изображенной на рисунке. Каждый из элементов $e1$ – $e7$ выходит из строя независимо от других. Надежность (вероятность безотказной работы в течение заданного промежутка времени) каждого из элементов равна 0,9. Предполагая, что сбой в цепи может произойти только вследствие нарушения функционирования элементов $e1 - e7$, найти надёжность участка цепи MN.

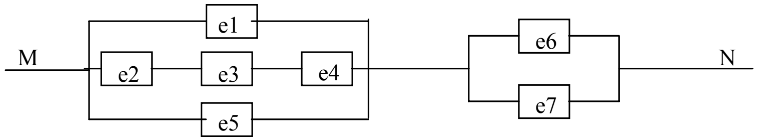
4.1.



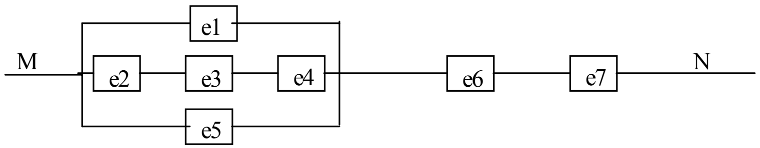
4.2.



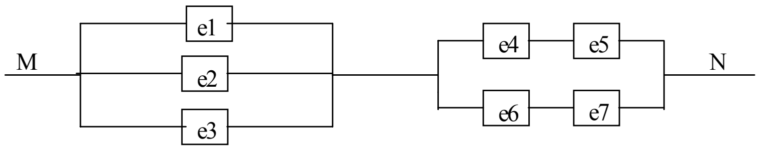
4.3.



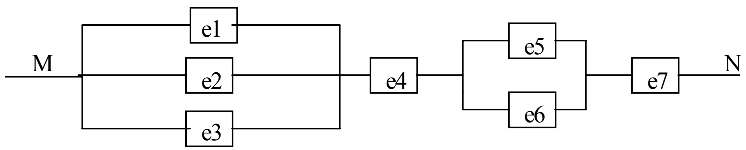
4.4.



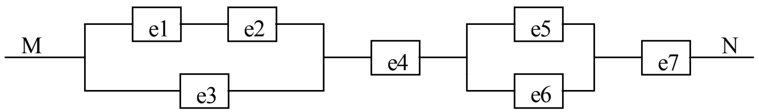
4.5.



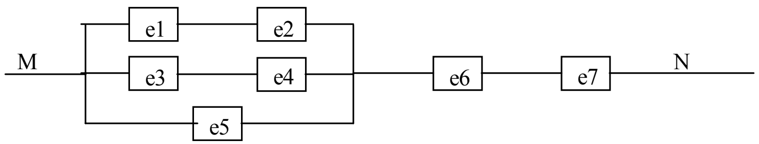
4.6.



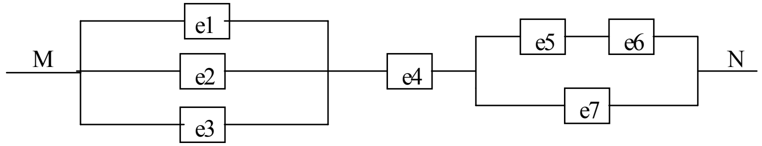
4.7.



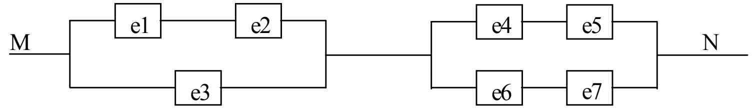
4.8.



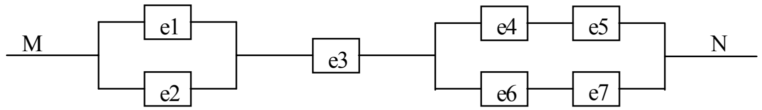
4.9.



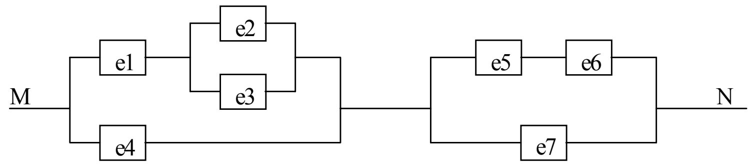
4.10.



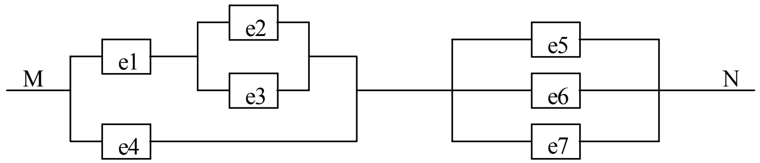
4.11.



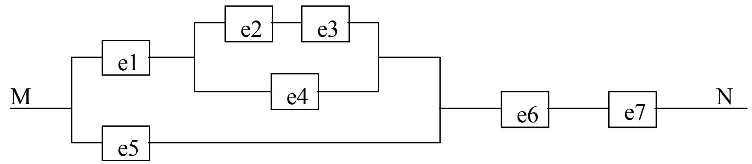
4.12.



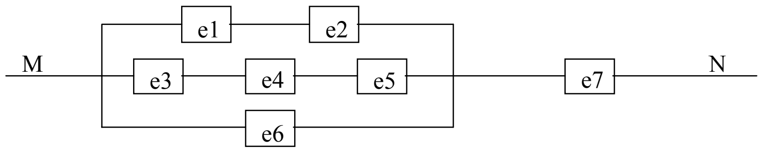
4.13.



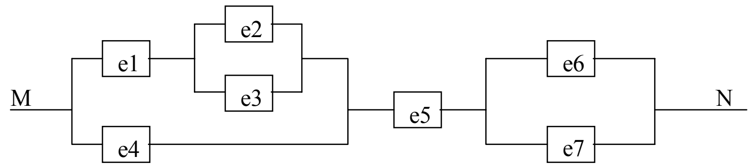
4.14.



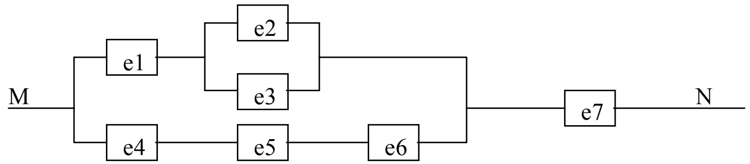
4.15.



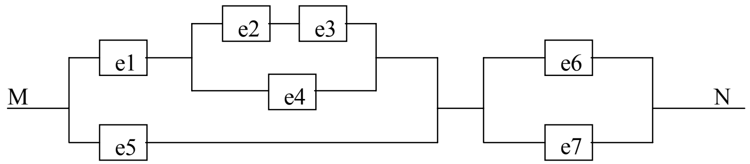
4.16.



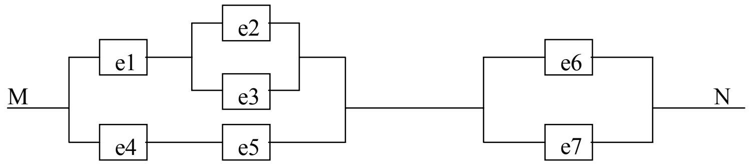
4.17.



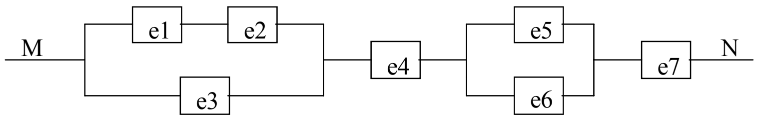
4.18.



4.19.



4.20.



Задание 5

5.1. Три оператора радиолокационной установки производят соответственно 25, 35 и 40 % всех измерений, допуская при этом 5, 4 и 2 % ошибок. а) Какова вероятность проведения ошибочного измерения для установки в целом? (0,0345) б) Случайно проверенное измерение оказалось ошибочным. Какова вероятность того, что оно принадлежит третьему оператору? (0,232)

5.2. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок производит выстрел по мишени. а) Какова вероятность того, что произойдёт попадание? (0,6833) б) Известно, что стрелок попал в мишень. Какова вероятность того, что он принадлежит к первой группе стрелков, попадающих с вероятностью 0,8? (0,3252)

5.3. Самолет может выполнять задания на больших, средних и малых высотах, причем на больших высотах предполагается совершить 25 % всех полетов, на средних – 10 и на малых – 65 %. Вероятности выхода самолета на заданный объект на больших, средних и малых высотах соответственно равны 0,75; 0,9; 0,95. а) Определить вероятность выхода самолета на заданный объект. (0,895) б) Известно, что самолет вышел на заданный объект. Определить вероятность того, что полет происходил на малой высоте. (0,6899)

5.4. На предприятии изготовляются изделия определенного вида на трех

поточных линиях. На первой линии производится 20 % изделий от всего объема их производства, на второй – 30, на третьей – 50 %. Каждая из линий характеризуется следующими процентами годности изделий: 95; 98 и 97. а) Требуется определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным. (0,031) б) Выбранное наугад изделие оказалось бракованным. На какой линии оно скорее всего изготовлено? (На третьей)

5.5. На сортировочную станцию прибывают полувагоны, платформы и крытые вагоны с вероятностями, соответственно, 0,25; 0,30 и 0,45. Вероятность неисправности полувагона равна 0,02, платформы – 0,015, крытого вагона – 0,01. а) Найти вероятность того, что поступивший на осмотр в парк приема вагон окажется неисправным. (0,014) б) Поступивший на осмотр вагон оказался неисправным. Найти вероятность того, что этот вагон является платформой. (0,3214)

5.6. Прибор может работать в трех режимах: нормальном, форсированном и недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 50 % случаев работы прибора, форсированный – в 30 и недогруженный – в 20 %. Надежность прибора (вероятность безотказной работы в течение заданного времени T) для нормального режима равна 0,8, для форсированного – 0,5, для недогруженного – 0,9. а) Найти полную (с учетом случайности условий) надежность прибора. (0,73) б) Прибор проработал безотказно в течение времени T. Какова вероятность того, что он работал в форсированном режиме? (0,2055)

5.7. Электролампы изготавливаются на двух заводах. Первый завод производит 60 % от общего количества электроламп, второй – 40 %. Известно, что 70 % продукции первого завода и 80% второго являются изделиями высшего качества. В магазин поступает продукция обоих заводов. а) Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа окажется высшего сорта? (0,74) б) Купленная лампа оказалась высшего сорта. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом заводе? (0,5676)

5.8. В канцелярии работают 4 секретаря, которые обрабатывают по 40, 10, 30 и 20 % исходящих документов за одно и то же время. Вероятности неверной адресации документов секретарями соответственно равны: 0,01; 0,04; 0,06; 0,02. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный исходящий из канцелярии документ будет неверно адресован. (0,03) б) Найти вероятность того, что документ, оказавшийся неверно адресованным, отправлен третьим секретарем. (0,6)

5.9. Сообщение может передаваться по одному из десяти каналов связи, 2 из которых находятся в отличном состоянии, 5 – в хорошем и 3 – в посредственном. Вероятности правильной передачи сообщения для каналов указанных видов равны, соответственно, 0,95; 0,9; 0,7. По выбранному наугад каналу передано сообщение. а) Найти вероятность того, что оно будет передано без искажений. (0,85) б) Посланное сообщение передано без искажений. Найти вероятность того, что оно посылалось по каналам, находящимся в хорошем состоянии. (0,5294)

5.10. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, соответственно равными: 0,2; 0,3 и 0,5. Вероятность получения бракованной продукции при обработке на первом станке равна 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,01. а) Какова вероятность того, что случайно выбранная после обработки деталь – стандартная? (0,982) б) Случайно выбранная деталь оказалась стандартной. Какова вероятность того, что она обрабатывалась на втором станке? (0,2963)

5.11. По линии связи могут передаваться сигналы типа *A* или *B* с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем, принимается 60 % сигналов типа *A* и 70 % – типа *B*. По линии связи передается один сигнал. а) Найти вероятность того, что этот сигнал будет принят. (0,62) б) Известно, что переданный сигнал принят. Найти вероятность того, что это был сигнал типа *A*. (0,7742)

5.12. В телевизионном ателье имеется 2 кинескопа первого типа и 8 кинескопов второго типа. Вероятности выдержать гарантийный срок для кинескопов первого и второго типов соответственно равны 0,9 и 0,6. а) Найти вероятность того, что выбранный наугад кинескоп выдержит гарантийный срок. (0,66) б) Выбранный наугад кинескоп выдержал гарантийный срок. Найти вероятность того, что это был кинескоп первого типа. (0,2727)

5.13. Радиолокационная станция ведет наблюдения за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помехи, то он обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью 0,8; если применяет помехи – то с вероятностью 0,4. Известно, что объект применяет помехи в 70 % случаев работы. а) Найти вероятность обнаружения объекта радиолокационной станцией. (0,52) б) Известно, что объект обнаружен радиолокационной станцией. Найти вероятность того, что это произошло при применении объектом помех. (0,5385)

5.14. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 – второго. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, вертолет второго типа – с вероятностью 0,7. а) Найти вероятность того, что выбранный наугад вертолет обнаружит аппарат. (0,66) б) Известно, что вертолет обнаружил спускаемый аппарат. Найти вероятность того, что это был вертолет второго типа. (0,6364)

5.15. В состав блока входят 6 радиоламп первого типа и 10 – второго. Гарантийный срок обычно выдерживают 80 % радиоламп первого типа и 90 % – второго. а) Найти вероятность того, что выбранная наугад в составе блока радиолампа выдержит гарантийный срок. (0,8625) б) Найти вероятность того, что радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа. (0,3478)

5.16. В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. а) Определить вероятность поражения мишени выстрелом из наугад выбранного ружья. (0,7) б) Выстрелом из наугад взятого ружья мишень поражена. Определить вероятность того, что это было ружье, вероятность попадания из которого равна 0,9. (0,2571)

5.17. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала *A* или в одну из пяти касс вокзала *B*. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала *A* имеются в продаже билеты, равна 0,6, для касс вокзала *B* эта вероятность равна 0,5. а) Найти вероятность того, что пассажир сможет купить билет в наугад выбранной кассе. (0,5375) б) Пассажир приобрел билет. Какова вероятность того, что он куплен в кассе вокзала *A*? (0,4186)

5.18. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность получения бракованной продукции составляет 0,02, для второго станка эта вероятность равна 0,03. а) Найти вероятность того, что выбранное случайным образом после обработки изделие окажется стандартным.(0,974) б) Наугад взятое после обработки изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно обрабатывалось на первом станке.(0,4025)

5.19. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используются индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит к одному из двух типов, соответственно равны 0,4 и 0,6. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, для индикатора второго типа эта вероятность равна 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии. (0,78) б) Известно, что индикатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит? (Ко второму)

5.20. 40 % приборов собирается из высококачественных деталей, остальные – из деталей обычного качества. В первом случае надежность прибора (вероятность безотказной работы за время *T*) равна 0,9; если прибор собран из обычных деталей, то его надежность равна 0,6. а) Какова надежность наугад выбранного прибора? (0,72) б) Прибор в течение времени *T* работал безотказно. Чему равна вероятность того, что он собран из высококачественных деталей? (0,5)

Задание 6

6.1. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80 %. Найти вероятность того, что из семи посеянных семян взойдут: а) три (0,0287); б) не менее трех.(0,9953)

6.2. В семье четверо детей. Принимая равновероятными событиями рождение мальчика или девочки, найти вероятность того, что мальчиков в семье: а) три (0,25); б) не менее трех (0,3125).

6.3. Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % не удовлетворяют требованиям стандарта. Найти вероятность того, что среди шести заготовок, взятых для контроля, требованиям стандарта не удовлетворяют: а) не более двух (0,9988); б) две (0,0204).

6.4. Контрольное задание состоит из пяти вопросов, на каждый из которых дается 4 варианта ответа. Найти вероятность того, что учащийся, не знающий ответов ни на один из вопросов и выбирающий их наугад, даст: а) 3 правильных ответа (0,0879); б) не менее трех правильных ответов (0,1035).

6.5. В партии хлопка около 20 % коротких волокон. Найти вероятность того, что при случайном отборе десяти волокон число коротких будет: а) равно трем (0,2013); б) не более трех. (0,8791)

6.6. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность успешной сдачи: а) только трех экзаменов (0,3087); б) не менее двух экзаменов. (0,9692)

6.7. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность получения брака при формовке равна 0,1. Найти вероятность того, что среди восьми диодов, проверяемых ОТК, окажется: а) два бракованных (0,1488); б) не более двух бракованных. (0,9619)

6.8. При игре с определенным противником вероятность выигрыша в каждой шахматной партии для данного игрока равна 0,5. Найти вероятность того, что он выиграет у этого противника в серии из шести партий: а) хотя бы один раз (0,9844); б) не менее двух раз. (0,8906)

6.9. Вероятность поражения мишени данным стрелком при одном выстреле в среднем составляет 80 %. Стрелок производит 6 выстрелов. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) пять раз (0,3932); б) не менее пяти раз. (0,6554)

6.10. При передаче сообщения вероятность искажения каждого знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из десяти знаков: а) не будет искажено (0,3487); б) содержит не более трех искажений (0,9872).

6.11. Транзисторный радиоприемник смонтирован на девяти полупроводниках, для каждого из которых вероятность наличия брака равна 0,05. Найти вероятность того, что: а) хотя бы один из полупроводников будет бракованным (0,3698); б) приемник будет содержать не менее двух бракованных полупроводников. (0,0712)

6.12. В автопарке предприятия имеется 12 автомашин. Известно, что для каждого из автомобилей вероятность работы без простоев из-за ремонта в течение месяца равна 0,7. а) Найти вероятность того, что в течение ближайшего месяца проработают без простоев не менее десяти автомашин (0,2528). б) Найти наиболее вероятное число автомобилей, не потребовавших ремонта

в течение месяца, и соответствующую этому событию вероятность. (9; 0,2397)

6.13. Всхожесть семян лимона составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдут: а) семь (0,302); б) более семи (0,4362).

6.14. Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % бракованных. Найти вероятность того, что среди взятых на контроль пяти деталей окажутся: а) две бракованные (0,0142); б) не более одной бракованной (0,9852).

6.15. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Произведено 7 выстрелов. Найти вероятность того, что имело место: а) шесть поражений цели (0,367); б) не более шести поражений (0,7903).

6.16. Контрольное задание состоит из десяти вопросов, предусматривающих ответы «да» или «нет». Предположим, учащийся не знает ответ ни на один из вопросов и выбирает ответы наугад. а) Какова вероятность того, что он даст не менее восьми правильных ответов, необходимых для зачета задания? (0,0547) б) Найдите наиболее вероятное число правильных ответов, которые даст учащийся, и вероятность получения этого наиболее вероятного числа ответов. (5; 0,2461)

6.17. В результате наблюдений, продолжавшихся многие годы, установлено, что на каждую тысячу новорожденных приходится в среднем 515 мальчиков и 485 девочек. В некоторой семье шестеро детей. Найти вероятность того, что среди них: а) ровно три девочки (0,3117); б) не менее двух девочек (0,8759).

6.18. При штамповке изделий бывает в среднем 20 % брака. Для контроля отобрано 8 изделий. Найти: а) вероятность того, что не менее двух изделий окажутся бракованными; (0,4967) б) наивероятнейшее число бракованных изделий и вероятность получения наивероятнейшего числа бракованных изделий. (1; 0,3355)

6.19. Вероятность того, что изделие успешно пройдет контроль, равна 0,8. Найти вероятность того, что из шести выбранных наугад изделий контроль успешно пройдут: а) не менее пяти изделий (0,6554); б) не более пяти изделий. (0,7379)

6.20. Волокна хлопка определенного сорта, в среднем, на 75 % имеют длину, меньшую 45 мм, и на 25 % – большую или равную 45 мм. Наугад выбираются 10 волокон. а) Найти вероятность того, что среди выбранных волокон не менее трех имеют длину, большую или равную 45 мм. (0,474) б) Чему равно наиболее вероятное число таких волокон среди выбранных? Найти вероятность соответствующего события. (2; 0,2816)

Задание 7

7.1. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что среди взятых на проверку 1000 деталей окажутся: а) 10 бракованных (0,11); б) не более 10 бракованных. (0,7588)

7.2. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3. Найти вероятность того, что для 800 заготовок число бракованных колец: а) окажется равным 240 (0,03); б) будет заключено между 225 и 250. (0,6564)

7.3. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что в серии из 100 выстрелов мишень будет поражена: а) ровно 90 раз (0,0044); б) не менее 75 раз. (0,8944)

7.4. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет: а) на шести веретенах; б) не менее чем на пяти веретенах.

7.5. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что среди 900 посаженных семян число проросших: а) будет равно 800 (0,024); б) будет принадлежать отрезку [790; 830]. (0,9736)

7.6. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что среди 1000 рождающихся детей: а) будет ровно половина мальчиков (0,016); б) мальчиков будет не менее 500 и не более 550. (0,8154)

7.7. Вероятность останова в течение часа каждой из 100 работающих машин равна 0,2. Найти вероятность останова в течение ближайшего часа работы: а) 30 машин (0,0044); б) не менее 20 машин. (0,5)

7.8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность поражения мишени: а) 75 раз в серии из 100 выстрелов (0,046); б) не менее 75 раз при 100 выстрелах. (0,8944)

7.9. Станок состоит из 2000 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного узла в течение года равна 0,0005. Найти вероятность отказа в течение года: а) двух узлов; б) не более пяти узлов.

7.10. Промышленная телевизионная установка содержит 2000 транзисторов. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока каждого из транзисторов равна 0,0005. Найти вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока: а) хотя бы одного транзистора; б) не менее трех транзисторов.

7.11. В передаваемой по каналу связи последовательности знаков, образующих сообщение, любой знак из-за помех, независимо от других, искажается с вероятностью 0,002. Какова вероятность того, что в переданной последовательности из 10 000 знаков: а) будет не менее 10 искажений (0,9875); б) число искажений будет не более 20? (0,5)

7.12. 20 % изготовляемых на заводе кинескопов для телевизоров не выдерживают гарантийный срок службы. Найти вероятность того, что в партии из 600 кинескопов число не выдержавших этот срок: а) будет равно 115 (0,0358); б) будет заключено в промежутке между 100 и 125. (0,6743)

7.13. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки,

равна 0,002. Проверяется книга, содержащая 500 страниц. Найти вероятность того, что с опечатками окажутся: а) 5 страниц; б) не более пяти страниц.

7.14. Известно, что при посадке приживается 80% деревьев определенного вида. Найти вероятность того, что из 400 посаженных деревьев: а) приживутся ровно 300 (0,0022); б) приживутся не менее 300. (0,9938)

7.15. Мастерская по гарантийному ремонту телевизоров обслуживает 2000 абонентов. Для каждого из купленных телевизоров вероятность поломки в течение гарантийного срока равна 0,3. а) Найти вероятность того, что гарантийного ремонта потребуют не более 550 телевизоров (0,0073). б) Найти наиболее вероятное число телевизоров, потребовавших гарантийного ремонта, и соответствующую этому событию вероятность. (600; 0,0195)

7.16. Аппаратура состоит из 1000 элементов. Для каждого из элементов вероятность отказа в течение времени T равна 0,001 и не зависит от работы других элементов. Найти вероятность отказа в течение времени T: а) хотя бы одного элемента; б) не менее двух элементов.

7.17. На заводе работают 500 человек. Для каждого из рабочих вероятность невыхода на работу из-за болезни в определенный день равна 0,1. Найти: а) наивероятнейшее число отсутствующих по болезни рабочих в определенный день и соответствующую этому событию вероятность (50; 0,0595); б) вероятность того, что число отсутствующих будет не более 40 (0,0681).

7.18. Вероятность того, что пара обуви, взятая из изготовленной партии, окажется высшего сорта, равна 0,4. На контроль поступило 600 пар обуви. а) Чему равно наивероятнейшее число пар обуви высшего сорта среди проверяемых и соответствующая этому событию вероятность? (240; 0,033) б) Найти вероятность того, что число пар обуви высшего сорта будет от 228 до 252 включительно. (0,6826)

7.19. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что из 500 высеянных семян взойдут: а) 425 семян (0,05); б) от 425 до 450 семян. (0,499)

7.20. Вероятность отклонений от принятого стандарта при штамповке клемм равна 0,02. Найти вероятность наличия в партии из 200 клемм: а) ровно пяти клемм, не соответствующих стандарту; б) не более четырех нестандартных клемм.

Задание 8

Для определенной в условии задачи дискретной случайной величины :

1. Построить ряд распределения и столбцовую диаграмму.
2. Найти функцию распределения и построить ее график.
3. Вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, моду, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

8.1. Испытывается устройство, состоящее из трех независимо работающих приборов, для каждого из которых вероятности отказа соответственно равны: 0,3; 0,2; 0,1. Случайная величина X – число отказавших приборов. ($M[X] = 0{,}6$; $D[X] = 0{,}46$)

8.2. Производятся три броска мячом в корзину, при каждом из которых вероятность попадания равна 0,3. Случайная величина X – число попаданий в серии из трех бросков. ($M[X] = 0{,}9$; $D[X] = 0{,}63$)

8.3. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Случайная величина X – число светофоров, пройденных машиной без остановки. ($M[X] = 2$; $D[X] = 1$)

8.4. Производятся 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6 и после каждого произведенного выстрела она уменьшается на 0,1. Случайная величина X – число попаданий в серии из трех выстрелов. ($M[X] = 1{,}5$; $D[X] = 0{,}73$)

8.5. Вероятности безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизоров первого, второго и третьего типов соответственно равны: 0,7; 0,6 и 0,5. Случайная величина X – число телевизоров, проработавших гарантийный срок среди трех телевизоров разных типов. ($M[X] = 1{,}8$; $D[X] = 0{,}7$)

8.6. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям высшего качества, равна 0,9. В контрольной партии – 3 прибора. Случайная величина X – число приборов в контрольной партии, удовлетворяющих требованиям высшего качества. ($M[X] = 2{,}7$; $D[X] = 0{,}27$)

8.7. Вероятность поступления вызова на АТС в течение 1 мин равна 0,4. Случайная величина X – число вызовов, поступивших на АТС в течение четырех минут. ($M[X] = 1{,}6$; $D[X] = 0{,}96$)

8.8. Вероятность успешной сдачи данного экзамена для каждого из четырех студентов равна 0,8. Случайная величина X – число студентов, успешно сдавших экзамен. ($M[X] = 3{,}2$; $D[X] = 0{,}64$)

8.9. При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает 2/3 своих изделий первым сортом и 1/3 – вторым. Случайная величина X – число изделий первого сорта среди взятых наугад четырех изделий. ($M[X] = 8/3$; $D[X] = 8/9$)

8.10. Вероятность приема каждого из четырех переданных радиосигналов равна 0,6. Случайная величина X – число принятых радиосигналов. ($M[X] = 2{,}4$; $D[X] = 0{,}96$)

8.11. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/6. Случайная величина X – число выигрышных билетов среди четырех купленных. ($M[X] = 2/3$; $D[X] = 5/9$)

8.12. Для трех проверяемых образцов вероятности выдержать многоступенчатые испытания прочности соответственно равны: 0,3; 0,5 и 0,4. Случайная величина X – число образцов, выдержавших испытания. ($M[X] = 1{,}2$;

$D[X] = 0{,}7$)

8.13. Для данного студента вероятность успешной сдачи первого экзамена равна 0,9, второго – 0,8, третьего – 0,7. Случайная величина X – число успешно сданных экзаменов. ($M[X] = 2{,}4$; $D[X] = 0{,}46$)

8.14. Для каждого из проверяемых приборов вероятность отказа во время испытания на надежность равна 0,2. Случайная величина X – число приборов, отказавших при испытаниях, среди четырех проверяемых. ($M[X] = 0{,}8$; $D[X] = 0{,}64$;)

8.15. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятности выхода из строя в течение смены для каждого из станков соответственно равны: 0,6; 0,5; 0,4 и 0,5. Случайная величина X – число станков, вышедших из строя в течение смены. ($M[X] = 2$; $D[X] = 0{,}98$)

8.16. Для каждого из трех блоков прибора вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока равна 0,3. Случайная величина X – число блоков, вышедших из строя в течение гарантийного срока. ($M[X] = 0{,}9$; $D[X] = 0{,}63$)

8.17. Вероятности поражения цели для каждого из трех стрелков соответственно равны: 0,7; 0,5; 0,6. Случайная величина X – число поражений цели при условии, что каждый стрелок сделал по одному выстрелу. ($M[X] = 1{,}8$; $D[X] = 0{,}7$)

8.18. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока каждого из трех узлов прибора соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,1. Случайная величина X – число узлов, вышедших из строя в течение гарантийного срока. ($M[X] = 0{,}6$; $D[X] = 0{,}46$)

8.19. Вероятность попадания мячом в корзину при каждом броске для данного баскетболиста равна 0,4. Случайная величина X – число попаданий в серии из четырех бросков. ($M[X] = 1{,}6$; $D[X] = 0{,}96$)

8.20. Производятся три независимых измерения исследуемого образца. Вероятность допустить ошибку в каждом измерении равна 0,05. Случайная величина X – число ошибок, допущенных в этих трех измерениях. ($M[X] = 0{,}15$; $D[X] = 0{,}1425$)

Задание 9

Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$. Требуется:

1. Определить значение параметра C.
2. Построить график функции плотности распределения вероятностей.
3. Найти функцию распределения данной случайной величины и построить ее график.
4. Вычислить числовые характеристики данной случайной величины: математическое ожидание, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.
5. Найти вероятность того, что данная случайная величина примет значе-

ние, принадлежащее отрезку $[a; b]$.

9.1. $f(x)=\begin{cases} C(3-x), & x\in[0;2];\\ 0, & x\notin[0;2]; \end{cases}$

$a=1;\ b=2.$

$(M[X]=5/6;\ \sigma[X]=0{,}533)$

9.2. $f(x)=\begin{cases} C|x|, & x\in[-2;2];\\ 0, & x\notin[-2;2]; \end{cases}$

$a=-1;\ b=1.$

$(M[X]=0;\ \sigma[X]=1{,}4142)$

9.3. $f(x)=\begin{cases} C(x-4), & x\in[0;3];\\ 0, & x\notin[0;3]; \end{cases}$

$a=0;\ b=2.$

$(M[X]=1{,}2;\ \sigma[X]=0{,}8124)$

9.4. $f(x)=\begin{cases} C|x^3| & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases}$

$a=0;\ b=1.$

$(M[X]=0;\ \sigma[X]=0{,}8165)$

9.5. $f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[-3;0];\\ 0, & x\notin[-3;0]; \end{cases}$

$a=-3;\ b=-2.$

$(M[X]=-2{,}25;\ \sigma[X]=0{,}5809)$

9.6. $f(x)=\begin{cases} C, & x\in[-3;5];\\ 0, & x\notin[-3;5]; \end{cases}$

$a=0;\ b=3.$

$(M[X]=1;\ \sigma[X]=2{,}3094)$

9.7. $f(x)=\begin{cases} C(1-x^2), & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases}$

$a=-0{,}5;\ b=0{,}5.$

$(M[X]=0;\ \sigma[X]=0{,}4472)$

9.8. $f(x)=\begin{cases} C(x^2-x), & x\in[1;3];\\ 0, & x\notin[1;3]; \end{cases}$

$a=2;\ b=4.$

$(M[X]=2{,}4286;\ \sigma[X]=0{,}4333)$

9.9. $f(x)=\begin{cases} x+C, & x\in[4;5];\\ 0, & x\notin[4;5]; \end{cases}$

$a=4;\ b=4{,}5.$

$(M[X]=4{,}5833;\ \sigma[X]=0{,}2769)$

9.10. $f(x)=\begin{cases} C|1-x|, & x\in[0;5];\\ 0, & x\notin[0;5]; \end{cases}$

$a=0;\ b=3.$

$(M[X]=3{,}4706;\ \sigma[X]=1{,}2062)$

9.11. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{x^4}, & x\in[1;5];\\ 0, & x\notin[1;5]; \end{cases}$

$a=1;\ b=2.$

$(M[X]=1{,}45;\ \sigma[X]=0{,}5587)$

9.12. $f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases}$

$a=-0{,}5;\ b=1{,}5.$

$(M[X]=0;\ \sigma[X]=0{,}7746)$

9.13. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{x^4}, & x\in[1;\infty);\\ 0, & x\notin[1;\infty); \end{cases}$

$a=1;\ b=2.$

$(M[X]=1{,}5;\ \sigma[X]=0{,}866)$

9.14. $f(x)=\begin{cases} C(3x^2+1), & x\in[-2;2];\\ 0, & x\notin[-2;2]; \end{cases}$

$a=-1;\ b=0{,}5.$

$(M[X]=0;\ \sigma[X]=1{,}4787)$

9.15. $f(x)=\begin{cases} C(3x-1), & x\in[1;3];\\ 0, & x\notin[1;3]; \end{cases}$

$a=1{,}5;\ b=3.$

$(M[X]=2{,}2;\ \sigma[X]=0{,}5416)$

9.16. $f(x)=\begin{cases} C-|x|, & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases}$

$a=-0{,}7;\ b=0{,}7.$

$(M[X]=0;\ \sigma[X]=0{,}4082)$

9.17. $f(x)=\begin{cases} C(x^2+x), & x\in[0;2];\\ 0, & x\notin[0;2]; \end{cases}$

$a=1;\ b=2.$

$(M[X]=1{,}4286;\ \sigma[X]=0{,}4333)$

9.18. $f(x)=\begin{cases} Cx^3, & x\in[1;2];\\ 0, & x\notin[1;2]; \end{cases}$

$a=1{,}5;\ b=2.$

$(M[X]=1{,}6533;\ \sigma[X]=0{,}2579)$

9.19. $f(x)=\begin{cases} C(x^2+|x|), & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases}$

$a=-0{,}25;\ b=0{,}75.$

$(M[X]=0;\ \sigma[X]=0{,}735)$

9.20. $f(x)=\begin{cases} C(1-x^4), & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases}$

$a=-0{,}75;\ b=0{,}75.$

$(M[X]=0;\ \sigma[X]=0{,}488)$

Задание 10

10.1. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший поток событий. Известно, что в течение некоторого промежутка времени среднее число вызовов, поступающих за один час, равно 240. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что за одну минуту поступит не менее трех вызовов. (0,7619)

10.2. Среди семян риса 0,4 % семян сорняков. Найти вероятность того, что при случайном отборе 5000 семян будут обнаружены 5 семян сорняков. (0,000055)

10.3. Для некоторого промежутка времени суток известно, что среднее число запросов, поступающих в справочную службу вокзала в течение часа, равно 30. Поток поступающих запросов можно считать простейшим. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что в течение минуты поступит не менее двух вызовов. (0,0902)

10.4. По данным длительной проверки качества запчастей определенного вида брак составляет 5 %. Изготовлено 500 запчастей. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа годных запчастей. (475; 4,87)

10.5. Радиостанция ведет передачу информации в течение 10 мкс. Ее работа происходит при наличии хаотической импульсной помехи, среднее число импульсов которой в секунду составляет 10^4. Для срыва передачи достаточно попадания одного импульса помехи в период работы станции. Считая, что число импульсов помехи, попадающих в данный интервал времени, распределено по закону Пуассона, найти вероятность срыва передачи информации. (0,095)

10.6. Поток грузовых железнодорожных составов, прибывающих на сортировочную горку, можно считать простейшим с интенсивностью 4 состава/час. Найти вероятность того, что в течение 30 минут на горку прибудет хотя бы один состав. (0,865)

10.7. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. (Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.) (3)

10.8. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое из двух событий более вероятно: A – {в течение одной минуты позвонят 3 абонента} или B – {в течение одной минуты позвонят 4 абонента}? (A)

10.9. Завод отправил на базу 500 доброкачественных изделий. Для каждого из изделий вероятность повреждения в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что среди прибывших на базу изделий будет не более трех поврежденных. (0,981)

10.10. Каким должно быть среднее число изюминок в булочке, чтобы с вероятностью 0,99 каждая булочка содержала хотя бы одну изюминку? (Предполагается, что число изюминок в булочках распределено по закону Пуассона). (4,6)

10.11. Найти вероятность того, что в течение смены произойдет не более двух отказов оборудования, при условии, что среднее число отказов в течение смены равно 1,2. (Поток отказов оборудования можно считать простейшим.) (0,8795)

10.12. Все значения равномерно распределенной случайной величины X принадлежат отрезку [2; 8]. Найти вероятность попадания значения случайной величины X в отрезок [3; 5]. (0,3333)

10.13. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, меньшая 0,04. (0,4)

10.14. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин. (0,6)

10.15. Трамваи данного маршрута идут с интервалом в 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через 1 мин после ухода предыдущего трамвая, но не позднее чем за 2 мин до отхода следующего трамвая? (0,4)

10.16. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 A. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,04 A. (0,2)

10.17. Предполагая, что время, необходимое для ремонта поступившего вагона, распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0{,}25$ [час$^{-1}$], найти вероятность того, что для ремонта одного вагона понадобится не более шести часов. (0,777)

10.18. Время простоя оборудования в ожидании ремонта распределено по показательному закону с математическим ожиданием, равным 1,5 часа. Найти вероятность простоя более трех часов. (0,135)

10.19. Найти среднее время безотказной работы устройства, если известно, что для данного устройства вероятность работы без сбоев в течение 100 часов равна 0,2. (Предполагается, что время безотказной работы распределено по экспоненциальному закону.) (62 часа)

10.20. Время безотказной работы механизма подчинено показательному закону с плотностью распределения вероятностей $f(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$ при $t > 0$ (t – время в часах). Найти вероятность того, что механизм проработает безотказно не менее 100 часов. (0,135)

Задание 11

11.1. Для замера напряжений в конструкциях используются специальные тензодатчики. Определить среднюю квадратическую ошибку тензодатчика, если известно, что он не имеет систематических ошибок, а случайные ошибки распределены нормально и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ± 2 мкм. (1,56)

11.2. Производится измерение вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением, равным 1 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 1,5 мм. (0,8664)

11.3. Автоматический станок производит однотипные изделия, номинальный размер которых равен 3 см. Фактический размер изделий имеет разброс, подчиненный нормальному закону с $\sigma[X] = 0{,}05$ см. Систематические отклонения размера отсутствуют. При контроле отбраковываются все изделия, размер которых отличается от номинального больше, чем на 0,12 см. Определить, какой процент изделий в среднем будет отбраковываться. (1,64 %)

11.4. Завод изготовляет шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, а фактический диаметр случаен и распределен по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10 мм, и средним квадратическим отклонением 0,4 мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие диаметром 10,7 мм, и все, проходящие через круглое отверстие диаметром 9,3 мм. Какой процент шариков в среднем будет отбраковываться? (8,02%)

11.5. Случайная величина X – ошибка измерительного прибора распределена по нормальному закону с дисперсией, равной 16 мкм, и математическим ожиданием, равным нулю. Найти вероятность того, что величина ошибки при одном измерении не превзойдет по абсолютной величине 6 мкм. (0,8664)

11.6. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку, равную 5 м, и среднее квадратическое отклонение случайной ошибки – 75 м. (Предполагается, что возникающие ошибки распределены по нормальному закону.) Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м? (0,0517)

11.7. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Найти вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м. (0,8186)

11.8. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Найти вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной. (0,6915)

11.9. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически: их средняя масса равна 1,06 кг. Найти среднее квадратическое отклонение массы коробки, если известно, что 5 % коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону. (0,0365)

11.10. Размер деталей подчинен закону нормального распределения с математическим ожиданием 15 мм и дисперсией 0,25 мм^2. Определить ожидаемый процент брака, если допустимые размеры деталей находятся в пределах от 14 до17 мм. (2,28 %)

11.11 Процент содержания золы в угле является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием, равным 16 %, и средним квадратическим отклонением 4 %. Определить вероятность того, что в наудачу взятой пробе угля будет от 12 до 24 % золы. (0,8186)

11.12. При взвешивании на весах допускаются случайные ошибки с дисперсией, равной 100 г^2, и систематической ошибкой, равной 20 г. Полагая, что ошибки распределены по нормальному закону, определить вероятность того, что ошибка при взвешивании предмета по абсолютной величине не превысит 50 г. (0,9987)

11.13. Срок службы прибора представляет собой случайную величину,

подчиненную закону нормального распределения со средним значением 15 лет и средним квадратическим отклонением 2 года. Определить вероятность того, что прибор прослужит свыше 20 лет. (0,0062)

11.14. Стрельба ведется из точки O вдоль прямой Ox. Средняя дальность полета снаряда равна 120 км. Систематические ошибки прицеливания отсутствуют. Предполагая, что дальность полета X есть нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением 10 м, найти, какой процент выпускаемых снарядов дает перелет от 6 до 9 м. (9,02 %)

11.15. Случайная ошибка измерения дальности импульсным радиодальнометром имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением, равным 50 м. Найти вероятность того, что измеренное значение дальности будет отличаться по абсолютной величине от истинного не более чем на 30 м, если систематическая ошибка дальномера равна + 20 м. (0,42)

11.16. Валик, изготовленный автоматом, считается стандартным, если отклонение его диаметра от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметра валиков подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением 1,6 мм и математическим ожиданием, равным 0. Сколько стандартных валиков (в процентах) изготовляет автомат? (78,9)

11.17. При определении расстояния радиолокатором случайные ошибки распределяются по нормальному закону. Какова вероятность того, что ошибка при определении расстояния не превысит 20 м, если известно, что систематических ошибок радиолокатор не допускает, а дисперсия случайных ошибок равна 1370 м^2 ? (0,4108)

11.18. Из пункта C ведется стрельба из орудия вдоль прямой СК. Предполагается, что дальность полета распределена нормально с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратичным отклонением 5 м. Определить (в процентах), сколько снарядов упадет с перелетом от 5 до 70 м. (15,87)

11.19. Считается, что изделие – высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине 3,6 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинального подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных. (77)

11.20. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандартной является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Систематические отклонения размера детали от номинала отсутствуют. Зная, что длина стандартной детали 40 см, а среднее квадратичное отклонение равно 0,4 см, определить, какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8. ($40 \pm 0,512$ см)

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(*справочное*)

Таблица значений функции плотности стандартного нормального распределения

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(*справочное*)

Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

Продолжение приложения Б

x	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,4999997
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961		
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. школа, 1998. 478 с.

2 *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. школа, 1998. 399 с.

3 *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.

4 *Герасимович А. И.* Математическая статистика. Минск: Вышэйшая школа, 1983. 279 с.

5 *Мацкевич И. П., Свирид Г. П.* Высшая математика: теория вероятностей и математическая статистика. Минск: Вышэйшая школа, 1993. 268 с.

6 *Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Наука, 1969. 511 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ