

УДК 62.752

С. В. ЕЛИСЕЕВ, доктор технических наук, Е. В. КАИМОВ, младший научный сотрудник, Научно-образовательный центр современных технологий, системного анализа и моделирования, Иркутский государственный университет путей сообщения, Н. Ж. КИНАШ, начальник конструкторского отдела, Дорожный инженерный технологический центр (ДИТЦ) Московской железной дороги, филиала ОАО «РЖД», г. Москва, Российская Федерация

ПРИВОДИМОСТЬ, ПАРЦИАЛЬНОСТЬ СИСТЕМ И ИХ СВЯЗЕЙ К ЭКВИВАЛЕНТНЫМ ФОРМАМ: ГЕНЕЗИС РЫЧАЖНЫХ СВЯЗЕЙ

Рассматриваются задачи взаимодействия характерных элементов в виброзащитных системах, содержащих твердое тело с неподвижной точкой вращения. Твердое тело имеет упругие связи с элементами системы посредством рычажных соединений. Обсуждается методологическая основа приемов построения математических моделей систем в формах структурных схем, соответствующих системам с управлением обратной связью. Предлагаются подходы для получения соответствующих расчетных схем колебательных систем.

Рассматриваются различные варианты появления в системах рычажных связей. Предлагаются новые определения для создания блоков из упруго-массовых элементов и рычажных механизмов, так называемых квазипружин. Получены аналитические соотношения для описания особенностей систем и взаимодействия их элементов.

Предлагается метод построения эквивалентных расчетных схем для систем, имеющих несколько парциальных структур различной физической природы.

Введение. В динамике машин решение задач, связанных с использованием расчетных схем в виде механических колебательных систем, большое значение имеют методы построения и обоснования выбора математических моделей. Линейная теория колебаний в практике исследования динамических свойств и особенности проявления взаимодействия элементов при действии возмущающих факторов является основой более сложных подходов, в рамках которых могут учитываться нелинейные эффекты и континуальность технических систем. Важное значение имеет последовательность усложнения математических моделей в предположении, что многие свойства реальных систем находят отражение в достаточно простых математических моделях [1].

Связи между парциальными структурами в механических колебательных системах в существенной степени определяют возможности динамических состояний взаимодействующих элементов, что нашло отражение во многих известных работах, относящихся к физике, молекулярной механике и теории колебаний [1–5]. Отмечено, что выбор систем обобщенных координат может оказать большое влияние на формы и содержание взаимодействий, что в конечном итоге привело к формированию критериев связности, получивших значительное развитие в молекулярной механике.

Взаимодействие между элементами систем часто рассматривается с использованием представлений о динамических свойствах блоков или структур, что предполагает детализацию внимания к вопросам обоснования выбора типовых элементарных звеньев, способов их соединения и связи движений между блоками. В этом плане имеются тенденции и направления поиска и разработки соответствующих новшеств.

В меньшей степени внимание уделялось взаимодействиям элементов механических колебательных систем, отражающих динамические свойства технических систем. В работах [6–9] последних лет получили развитие некоторые концептуальные представления о возможно-

стях расширения типового набора элементарных звеньев механических колебательных систем, что, в частности, нашло приложение в теории виброзащитных систем, которые в своем составе имеют рычажные механизмы и устройства для преобразования движения. Реализация расширенного набора возникающих форм взаимодействия приводит к необходимости детализации влияния к формам связности парциальных систем, что определяется в значительной мере соотношениями различных видов движений отдельных элементов системы, например вращательных и поступательных движений парциальных структур [10, 11]. Основное внимание при этом уделялось критериям связности, при определении которых предполагалась симметричность взаимодействий и однородность структур парциальных систем.

Вместе с тем существуют различные разновидности механических колебательных систем, в которых парциальные системы имеют движения различных видов, то есть взаимодействия происходят между твердыми телами, совершающими поступательное и вращательное движения.

Некоторые вопросы динамических взаимодействий в такого рода системах рассмотрены в работах [12, 13], однако особенности проявления рычажных связей и их влияние на свойства механических колебательных систем требуют более детализированного изучения.

Разнообразие движений в технических системах находит отображение в том, что механические колебательные системы, привлекаемые как расчетные схемы, включают в свой состав твердые тела конечных размеров. Движение твердых тел, даже в простейших случаях, приводит к необходимости учета пространственных форм движений, а это, в свою очередь, требует учета пространственной метрики движений системы. Сопряжение движений различного вида в структуре одной системы требует учета особенностей в сопряжениях элементов и размерности силовых и кинематических факторов.

В предлагаемой статье развиваются подходы, позволяющие учитывать динамические связи, возникающие в механических колебательных системах при различных видах парциальных движений, в частности, при наличии вращений, что приводит к появлению рычажных связей и соответствующих динамических особенностей. Динамические свойства систем рассматриваются в постановках задач линейной теории виброзащитных систем [6–9].

I Общие положения. Особенность подхода. Рассматривается механическая колебательная система (рисунок 1), в которой массоинерционные элементы могут совершать вращательные и поступательные движения. Система имеет две степени свободы движений, которые могут описываться несколькими системами обобщенных координат. Отметим, что при оценке динамических свойств систем необходимо обращать внимание на однородность координат, что связано с вопросами совпадения размерности реакций связей между парциальными системами.

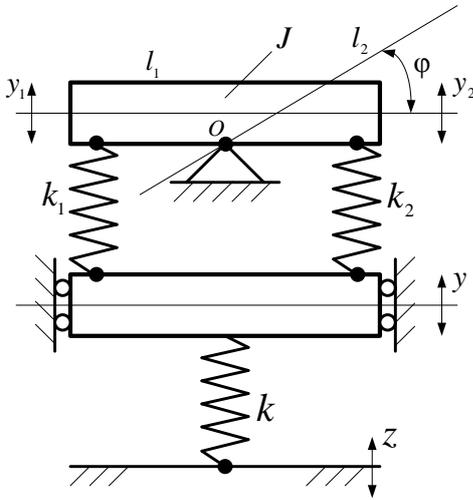


Рисунок 1 – Расчетная схема системы комбинированного типа (поступательное движение – по координате y ; вращательное движение – относительно неподвижной точки O)

Если воспользоваться известной методикой построения математических моделей [6, 7], то уравнения движения при кинематическом возмущении z можно получить, предварительно определив выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y})^2 + \frac{1}{2} J (\dot{\phi})^2; \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k (y - z)^2 + \frac{1}{2} k_1 (y_1 - y)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y)^2. \quad (2)$$

Введем ряд соотношений: $i = l_2/l_1$ – передаточное отношение при вращательном движении твердого тела; $y_2 = iy_1$; $y_1 = \phi l_1$; $y_2 = \phi l_2$. Отметим, что y_1 и y_2 имеют различные направления движения. Выражение (2) можно записать в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} k (y - z)^2 + \frac{1}{2} k_1 (\phi l_1 - y)^2 + \frac{1}{2} k_2 (-\phi l_2 - y)^2. \quad (3)$$

Проведем ряд вспомогательных преобразований, обычных при использовании формализма Лагранжа [9]. В координатах y и ϕ система уравнений движения для расчетной схемы на рисунке 1 примет вид

$$m \ddot{y} + y(k + k_1 + k_2) + \phi(k_2 l_2 - k_1 l_1) = kz; \quad (4)$$

$$J \ddot{\phi} + \phi(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) + y(k_2 l_2 - k_1 l_1) = 0. \quad (5)$$

Структурная схема исходной системы (с учетом преобразования Лапласа [6]) в координатах y, ϕ в соответствии с (4), (5) может быть представлена, как показано на рисунке 2.

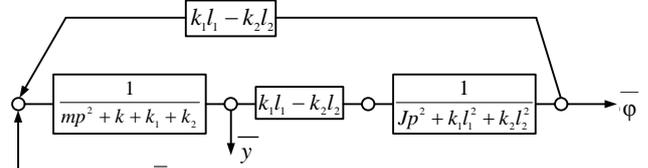


Рисунок 2 – Структурная схема исходной системы (см. рисунок 1) в координатах \bar{y} и $\bar{\phi}$

Структурная схема на рисунке 2 может быть преобразована, как показано на рисунке 3, и иметь несколько форм отображения.

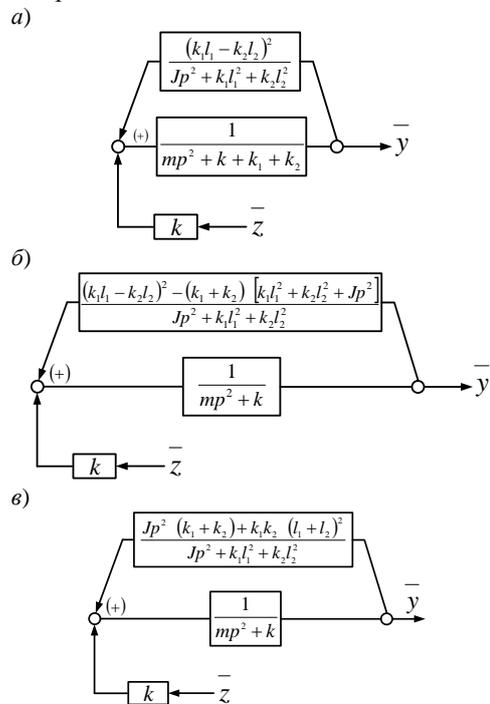


Рисунок 3 – Преобразование исходной структурной схемы: а – исключение координаты ϕ ; б – приведение к парциальной системе $mp^2 + k$ – положительная обратная связь; в – приведение системы к виду с отрицательной обратной связью

Передаточные функции системы могут быть найдены из структурных схем. Вместе с тем такие же результаты можно непосредственно получить из уравнений (4), (5) после преобразований Лапласа:

$$\bar{\phi} = \frac{(k_1 l_1 - k_2 l_2) \bar{y}}{J p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \quad (6)$$

Используем (6) для исключения $\bar{\phi}$ и получим уравнение для схемы на рисунке 3, в:

$$\bar{y} \left[mp^2 + k + \frac{J p^2 (k_1 + k_2) + k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2}{J p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2} \right] = k \bar{z}. \quad (7)$$

Если полагать, что парциальная система (по координате \bar{y}) имеет вид $mp^2 + k + k_1 + k_2$, а структурная схема соответствует рисунку 3, а, уравнение (7) запишется так:

$$\bar{y} \left[mp^2 + k + k_1 + k_2 - \frac{(k_2 l_2 - k_1 l_1)^2}{Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2} \right] = k \bar{z}. \quad (8)$$

Таким образом, исходная система (см. рисунок 1) может быть приведена путем исключения координаты вращательного движения $\bar{\varphi}$ к системе с одной степенью свободы, в которой массоинерционный элемент m совершает поступательное прямолинейное движение.

В приложении к задачам виброзащиты можно массоинерционный элемент m рассматривать как объект защиты. В этом случае в структуре виброзащитной системы образуется некоторое устройство для преобразования движения, имеющее вид рычага второго рода [4]. Такой рычаг обладает массоинерционными свойствами (имеет момент инерции J относительно точки O (см. рисунок 1). В данном случае исходная система может быть рассмотрена как система с одной степенью свободы. При этом, как показано на рисунке 4 в системе появляется дополнительный элемент, который отличается от известных типовых элементов (в данном случае пружин с жесткостями k, k_1, k_2).

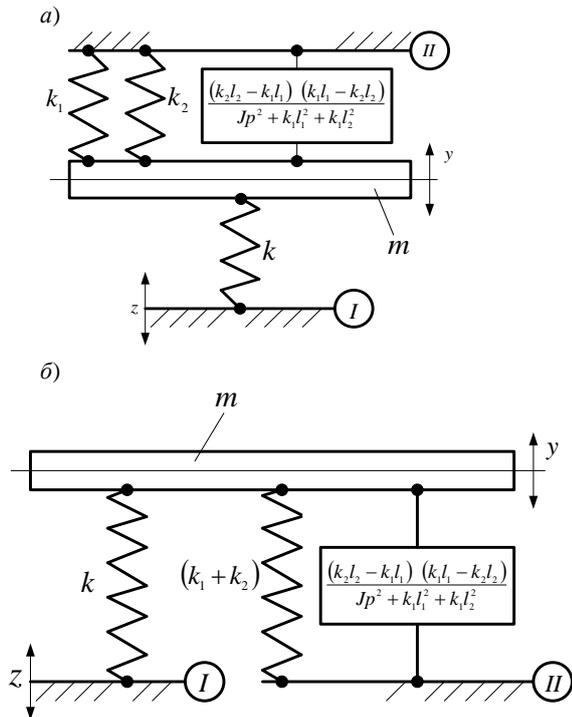


Рисунок 4 – Расчетная схема комбинированной системы, приведенная к системе, совершающей поступательное движение по координате y :

а – опорные поверхности разнесены по вертикали; б – опорные поверхности I и II разделены: возмущение z – по опорной поверхности I

Расчетная схема на рисунке 4 предполагает использование опорных поверхностей I и II. Вводимое в схему на рисунке 4 устройство для преобразования движения характеризуется приведенной динамической жесткостью, которая записана с использованием комплексной переменной p ($p = j\omega$ [6]). При $p = 0$, т. е. при отсутствии динамического возмущения со стороны основания ($z = 0$), динамическая жесткость устройства для

преобразования движения трансформируется в жесткость сложной пружины, имеющей в своем составе рычаг второго рода. Из анализа расчетной схемы на рисунке 4 следует также, что исходная система (см. рисунок 1) преобразуется в эквивалентную в динамическом отношении систему, но с другим набором составных элементов. Координата φ исключается, но взаимодействия, привносимые угловым движением по координате φ , остаются и отражаются квазипружиной (или компактом), имеющей приведенную жесткость

$$k_{\text{пр}} = \frac{(k_2 l_2 - k_1 l_1) \cdot (k_1 l_1 - k_2 l_2)}{Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \quad (9)$$

Квазипружина обладает тем свойством, что при определенных соотношениях параметров приведенная жесткость может стать отрицательной. В физическом смысле это означает смену изменения направления упругой силы, развиваемой квазипружиной. Такой же эффект может быть получен при изменении частоты внешнего воздействия, так как знаменатель (9) определяется выражением

$$A_0' = -J\omega^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2, \quad (9')$$

которое при увеличении p ($p = j\omega$) также приобретает отрицательное значение.

Отметим, что в структурных преобразованиях квазипружина ведет себя как обыкновенный упругий элемент. Ряд вопросов, связанных с упомянутыми особенностями, рассмотрен в работах [14, 15].

II Особенности преобразования систем. Из расчетной схемы на рисунке 4 можно определить ряд характеристик. Если между парциальными системами исходной системы на рисунке 1 связность определяется звеном с передаточной функцией $W'(p) = k_1 l_1 - k_2 l_2$, то взаимодействие между парциальными системами в координатах \bar{y} , $\bar{\varphi}$ становится нулевой при выполнении условия $k_1 l_1 = k_2 l_2$. В этом случае при внешнем возмущении z система будет совершать движение как объект массой m , имея одну степень свободы. Парциальная частота системы совпадает с частотой собственных колебаний приведенной системы:

$$\omega_1^2 = \frac{k + k_1 + k_2}{m}. \quad (10)$$

II.1 Если выполняется условие $k_1 l_1 \neq k_2 l_2$, то интерес представляет случай, когда $J = 0$. При этом приведенная жесткость системы, формируемая с участием парциальной системы углового движения, определится выражением

$$k_{\text{пр}} = k + k_1 + k_2 - \frac{(k_2 l_2 - k_1 l_1)^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2} \quad (11)$$

или

$$k_{\text{пр}} = \frac{k(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) + k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \quad (11')$$

При $J = 0$ в системе может быть обозначено появление рычажного механизма второго рода, который не только формирует для объекта массой m приведенную жесткость, но и создает вполне определенную структуру связей в пространстве (в геометрическом смысле). Приведенная схема системы (см. рисунок 4) в этом слу-

чае может интерпретироваться (рисунок 5) как свойство квазипружины:

$$k'_{\text{пр}} = \frac{k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \quad (12)$$

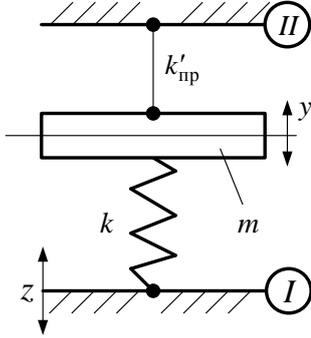


Рисунок 5 – Приведенная исходная расчетная схема при $J = 0$

Используем понятие передаточного отношения рычага: $i = l_2/l_1$. Знак передаточного отношения, то есть особенности рычажного механизма, учтен при выводе уравнений движения (в общем случае передаточное отношение рычага второго рода имеет знак минус).

Таким образом, выражение (12) преобразуется к виду

$$k'_{\text{пр}} = \frac{k_1 k_2 (1+i)^2}{k_1 + k_2 i^2}. \quad (13)$$

Если $i = 0$, то $k'_{\text{пр}} = k_2$. При $i = \infty$ $k'_{\text{пр}} = k_1$, что совпадает с физическими представлениями о свойствах механической системы с рычажными связями.

II.2 Рычаг второго рода с неподвижной точкой вращения (т. O) создает пространственную структуру расположения элементов механической колебательной системы. Если рычаг имеет нулевые массоинерционные характеристики, то дополнительно к основной пружине с жесткостью k он создает параллельную упругую связь, определяемую выражением (13). Связь представляет собой упругое соединение объекта массой m с опорной поверхностью II. В этом случае частота собственных колебаний определится таким же образом, как в системе с одной степенью свободы:

$$\omega^2 = \frac{k_2 + k'_{\text{пр}}}{m}. \quad (14)$$

$$\omega^2 = \frac{k_1 k_2 (1+i)^2 + k_2 (k_1 + k_2 i^2)}{(k_1 + k_2 i^2) m}. \quad (14')$$

Отметим, что передаточное отношение i может выступать в качестве настроечного параметра при решении различных задач, связанных с оценкой и контролем динамического состояния механических колебательных систем, в частности, виброзащитных [6, 8].

II.3 Если $J \neq 0$, т. е. вращательное звено обладает достаточно значимым моментом инерции, то приведенная жесткость квазипружины в отличие от выражения (13), будет зависеть от p . В этом случае приведенная жесткость квазипружины может быть названа динамической:

$$k''_{\text{пр}} = \frac{(k + k_1 + k_2)(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) - (k_1 l_1 - k_2 l_2)^2}{Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}, \quad (15)$$

$$k''_{\text{пр}} = \frac{\left[Jp^2(k + k_1 + k_2) + k(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_1 + k_2) \times \right. \\ \left. \times (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 - (k_1 l_1 - k_2 l_2)^2) \right]}{Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \quad (15')$$

Выражение (15') дает представление о сложном характере связей, формирующихся при массивном рычаге в структуре объекта виброзащитной системы в том случае, когда объект совершает поступательное (прямолинейное) движение. Выражение (15') можно также представить в виде

$$k_{\text{пр}} = k + k_1 + k_2 - \frac{(k_2 l_2 - k_1 l_1)^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \quad (16)$$

II.4 С учетом $J \neq 0$ исходная система становится системой с двумя степенями свободы, в которой парциальные системы имеют различные движения: одна система (координата y) реализует поступательный вид движения, другая (с координатой φ) – угловое движение. Собственные частоты системы могут быть определены из характеристического частотного уравнения:

$$Jmp^4 + p^2 \left[J(k + k_1 + k_2) + m(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) + \right. \\ \left. + (k + k_1 + k_2)(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \right] - \\ - (k_1 l_1 - k_2 l_2)^2 = 0, \quad (17)$$

для которых могут быть записаны выражения:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{J(k + k_1 + k_2) + m(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \pm \\ \pm \sqrt{\left[J(k + k_1 + k_2) - m(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \right]^2 + \\ + 4Jm(k_1 l_1 - k_2 l_2)^2}}{2Jm}. \quad (18)$$

Парциальные частоты в этом случае

$$n_1^2 = \frac{k + k_1 + k_2}{m}; \quad (19) \quad n_2^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{J}. \quad (20)$$

В свою очередь

$$\omega_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - D; \quad (21) \quad \omega_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + D, \quad (22)$$

где

$$D = \frac{1}{2Jm} \sqrt{\left[J(k + k_1 + k_2) - m(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \right]^2 + \\ + 4Jm(k_1 l_1 - k_2 l_2)^2}. \quad (23)$$

Таким образом, механическая колебательная система (см. рисунок 1), имеющая две парциальные системы, состояние которых определяется координатами y и φ , может быть преобразована и приведена к более простой системе, характеризуемой координатой поступательного движения y . При этом «упрощении» в структуре системы становится необходимым введение элемента нового типа, который может быть назван квазипружиной и иметь соответствующую приведенную жесткость. В общем случае приведенная жесткость зависит от частоты внешнего воздействия и может быть названа динамической. В работах [12–18] квазипружина упомянутого вида получила название обобщенной пружины. Оба названия отражают одну и ту же физическую сущность, но их понятийные поля могут рассматриваться в различных контекстах и использоваться по-разному. Важным обстоятельством является то, что при $J = 0$ в системе с одной степенью свободы становится возмож-

ным обосновать появление рычажных связей. Они реализуются, в данном случае, рычажным механизмом второго рода. Такие связи в механических колебательных системах приносят новые свойства.

III Исключение координаты y . Используем структурную схему на рисунке 2 и систему уравнений движения:

$$mp^2 \bar{y} + \bar{y}(k + k_1 + k_2) + \bar{\varphi}(k_2 l_2 - k_1 l_1) = k \bar{z}; \quad (24)$$

$$Jp^2 \bar{\varphi} + \bar{\varphi}(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) + \bar{y}(k_2 l_2 - k_1 l_1) = 0. \quad (25)$$

Из (24) следует, что

$$\bar{y} = \frac{k \bar{z} + \bar{\varphi}(k_2 l_2 - k_1 l_1)}{mp^2 + k + k_1 + k_2}. \quad (26)$$

После подстановки (26) в (25) получим

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) - \bar{\varphi} \frac{(k_1 l_1 - k_2 l_2)^2}{mp^2 + k + k_1 + k_2} = \\ = \frac{k(k_1 l_1 - k_2 l_2) \bar{z}}{mp^2 + k + k_1 + k_2}. \end{aligned} \quad (27)$$

На рисунке 6, б приведена структурная схема исходной системы (см. рисунок 1) при исключении координаты y ; на рисунке 6, а приведена соответствующая расчетная схема в символической форме – как механической системе с одной степенью свободы, определяемой координатой $\bar{\varphi}$.

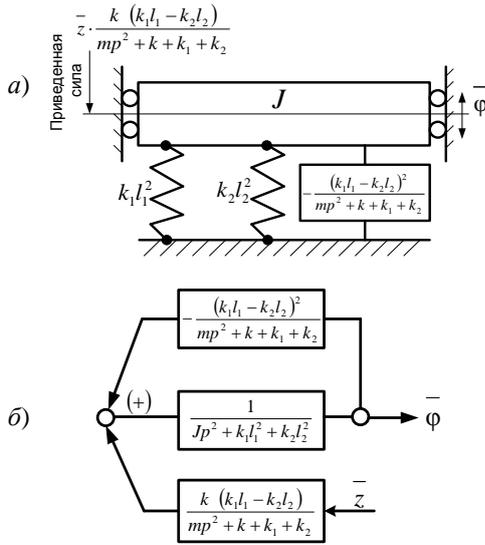


Рисунок 6 – Структурная (а) и расчетная (б) схемы при исключении координаты y

Если рассмотреть расчетную схему частичной системы с соответствующим вращательным движением, то она принимает вид, как показано на рисунке 7.

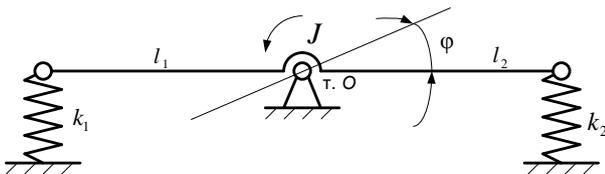


Рисунок 7 – Расчетная схема частичной системы вращательного движения

Используя схему на рисунке 7, можно найти частичную частоту:

$$n_2^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{J}. \quad (28)$$

Это будут угловые колебания. Возвращаясь к расчетной схеме на рисунке 6, а, найдем, что приведенная жесткость квазипружины определяется формулой

$$k''_{пр} = \frac{l_1^2 (k_1 - k_2 i)^2}{mp^2 + k + k_1 + k_2}. \quad (29)$$

Выражение (29) соответствует крутильной динамической жесткости во вращательном движении с координатой φ . Если исходную систему (рисунок 1) привести к системе с одной степенью свободы (что можно сделать при исключении координаты y), то выражение (29) можно представить в детализированном, полагая, что

$$(k_2 l_2 - k_1 l_1)^2 = (k_2 l_2)^2 - 2k_1 k_2 l_1 l_2 + (k_1 l_1)^2. \quad (29')$$

Для того чтобы войти в формат расчетной схемы, отражающей особенности движения твердого тела относительно точки O , вернемся к уравнению (27). Сделаем ряд преобразований над (27):

$$\begin{aligned} Jp^2 \bar{\varphi} + \frac{A_1 k_1 l_1^2 + A_1 k_2 l_2^2 - k_1^2 l_1^2 + 2k_1 k_2 l_1 l_2 - k_2 l_2^2}{A_1} = \\ = \frac{k(k_1 l_1 - k_2 l_2) \bar{z}}{A_1}. \end{aligned} \quad (29'')$$

Тогда (29'') можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} Jp^2 + \frac{k_1 l_1^2 (mp^2 + k + k_2)}{A_1} + \frac{k_2 l_2^2 (mp^2 + k + k_1)}{A_1} + \\ + \frac{k_1 k_2 l_1^2 i}{A_1} + \frac{k_1 k_2 l_2^2}{i A_1} = \frac{k(k_1 l_1 - k_2 l_2)^2}{A_1}. \end{aligned} \quad (29''')$$

В этом случае расчетная схема (см. рисунок 1) при исключении переменной y примет вид, как показано на рисунке 8.

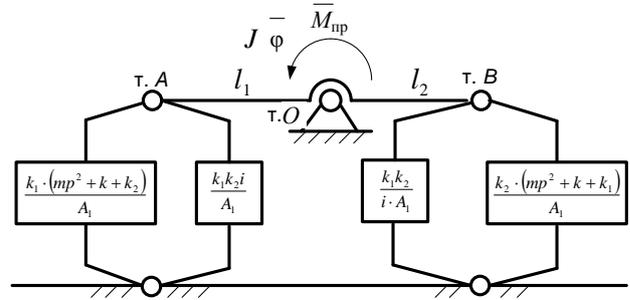


Рисунок 8 – Расчетная схема эквивалентной системы с одной степенью свободы с объектом, состояние которого описывается координатой φ ($A_1 = mp^2 + k + k_1 + k_2$)

Отметим, что на рисунке 8 принятые обозначения тт. A и B локализируют условия присоединения типовых элементов и квазипружины к объекту, совершающему угловое колебательное движение по координате $\bar{\varphi}$. Приведенный момент сил, прикладываемый к объекту с моментом инерции J , формируется кинематическим возмущением \bar{z} :

$$\bar{M}_{пр} = \frac{k(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{mp^2 + k + k_1 + k_2} \bar{z}. \quad (30)$$

Что касается элементов структуры на рисунке 8 с использованием A_1 , то они являются квазипружинами, жесткости которых во вращательном движении составляют:

$$k_{\text{пр}1} = -\frac{k_1^2 l_1}{mp^2 + k + k_1 + k_2}; \quad (31) \quad k_{\text{пр}2} = -\frac{k_2^2 l_2}{A_1}; \quad (32)$$

$$k_{\text{пр}3} = \frac{k_1 k_2 l_1}{A_1}; \quad (33) \quad k_{\text{пр}4} = \frac{k_1 k_2 l_2}{A_1}. \quad (34)$$

Таким образом, комбинированная система (см. рисунок 1) приводится к рычажному механизму, в котором рычаг обладает моментом инерции J . При этом кинематическое возмущение \bar{z} преобразуется к приведенному моменту сил (см. рисунок 8). Если принять, что $m = 0$, то

$$k_{\text{пр}1} = -\frac{k_1^2 l_1}{k + k_1 + k_2}; \quad k_{\text{пр}2} = -\frac{k_2^2 l_2}{k + k_1 + k_2}; \quad (35)$$

$$k_{\text{пр}3} = \frac{k_1 k_2 l_1}{k + k_1 + k_2}; \quad k_{\text{пр}4} = \frac{k_1 k_2 l_2}{k + k_1 + k_2},$$

что позволяет привести упругие элементы к точкам A и B . Это дает следующие результаты:

$$k_{\text{пр}A} = \frac{kk_1 + k_1 k_2 (1+i)}{k + k_1 + k_2}; \quad (36)$$

$$k_{\text{пр}B} = \frac{kk_2 i + k_1 k_2 (1+i)}{k + k_1 + k_2}. \quad (37)$$

Таким образом, рассмотрение особенностей формирования рычажных связей показывает, что динамические свойства механических колебательных систем существенно зависят от особенностей парциальных систем, составляющих основу системы. Если парциальные системы неоднородны, то есть могут совершать и поступательные и вращательные движения, то большое значение приобретают рычажные связи. Отметим, что рычажные связи в колебательных системах могут принимать различные формы и зависят от выбора обобщенных координат.

IV Свойства системы с рычажными связями первого рода. Расчетная схема с двумя степенями свободы состоит из двух твердых тел и упругих связей. Твердое тело может двигаться поступательно, а второе – совершать угловые движения вокруг неподвижной точки, как показано на рисунке 9.

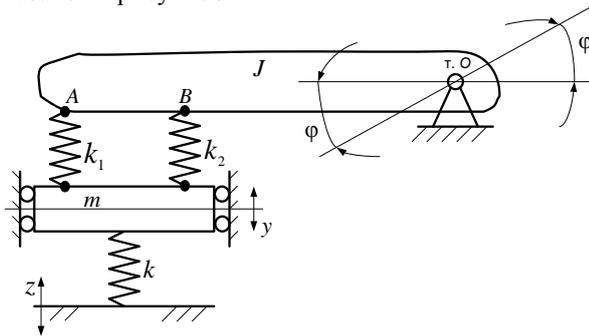


Рисунок 9 – Расчетная схема системы с двумя твердыми телами, совершающими вращательно-качательное (ϕ) и поступательное (y) движения

Твердые тела совершают малые движения. Принимается, что $OA = l_1$, $OB = l_2$; $i = l_2/l_1$ – передаточное отношение рычажных связей. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y})^2 + \frac{1}{2} J (\dot{\phi})^2, \quad (38)$$

$$U = \frac{1}{2} k (y - z)^2 + \frac{1}{2} k_1 (\phi l_1 - y)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\phi l_2 - y)^2, \quad (39)$$

и получим уравнения движения по координатам y и ϕ :

$$m \ddot{y} + y(k + k_1 + k_2) - \phi(k_1 l_1 + k_2 l_2) = kz; \quad (40)$$

$$J \ddot{\phi} + \phi(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) - y(k_1 l_1 + k_2 l_2) = 0. \quad (41)$$

Из (41) найдем, что

$$\bar{\phi} = \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2) \bar{y}}{J p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \quad (42)$$

Подставив (42) в (40) (в изображениях по Лапласу) при исключении координаты $\bar{\phi}$, получим:

$$\bar{y} \left(mp^2 + k + k_1 + k_2 - \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2)^2}{J p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2} \right) = k \bar{z}. \quad (43)$$

Структурная схема системы (см. рисунок 9) с её формулами преобразования приведена на рисунке 10. При этом схема на рисунке 10, а соответствует двум степеням свободы движения, а на рисунке 10, б – схема преобразована и координата $\bar{\phi}$ исключена.

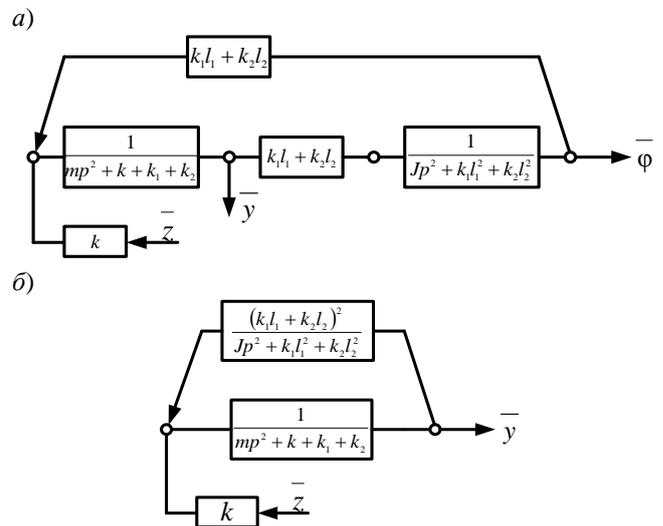


Рисунок 10 – Структурная схема (а), соответствующая системе на рисунке 8; б – структурная схема с исключением координаты ϕ

Система опирается на основание, закон движения которого известен [$z(t)$ – гармоническое колебание]. Внешнее воздействие представляет собой движение основания пружины с жесткостью k , определяемое через z . Так же, как и в исходной системе на рисунке 1, можно выделить появление квазипружины с приведенной жесткостью:

$$k_{\text{пр}}'' = \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2)^2}{J p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \quad (44)$$

Выражение (44) отличается от аналогичного выражения (9) тем, что в числителе стоит $(k_1 l_1 + k_2 l_2)$, а не $(k_1 l_1 - k_2 l_2)$, что соответствует изменению вида рычажной связи.

Преобразуем (44), вводя передаточное отношение $i = l_2/l_1$, и получим:

$$k_{\text{пр}} = \frac{(k_1 + k_2 i)^2}{\frac{J}{l_1^2} p^2 + k_1 + k_2 i^2}. \quad (45)$$

На рисунке 11 приведена расчетная схема в виде системы с одной степенью свободы и объектом защиты m (координата \bar{y}).

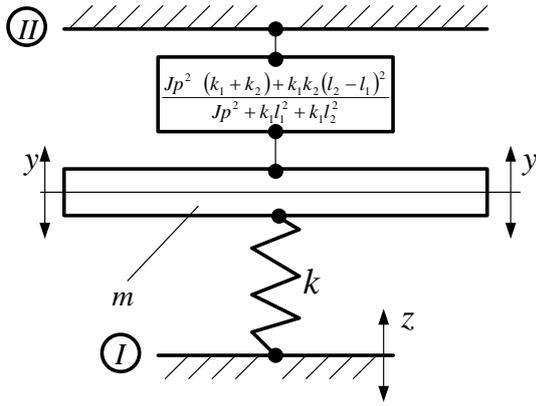


Рисунок 11 – Расчетная схема системы с рычажной связью первого рода

Если принять, что $J = 0$, то

$$k_{\text{нр}}'' = \frac{k_1 k_2 (l_2 - l_1)^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2} = \frac{k_1 k_2 (i - 1)^2}{k_1 + k_2 i^2}. \quad (46)$$

Если сравнивать расчетную схему на рисунке 4, а с аналогичной схемой с рычажной связью первого рода, то расчетная схема имеет вид, как показано на рисунке 12.

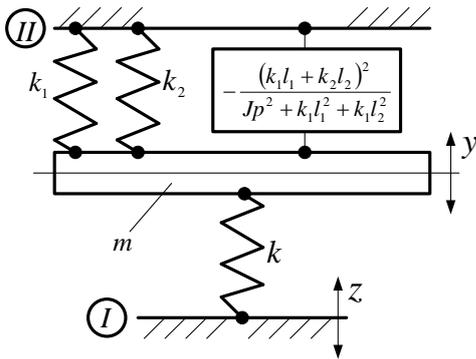


Рисунок 12 – Расчетная схема системы с рычажным звеном первого рода

Введение рычажных связей (через твердое тело с моментом инерции J) другого типа изменяет значения приведенных жесткостей квазипружин. В связи с этим будут изменяться и свойства механической колебательной системы в целом. Что касается рассматриваемого на рисунке 12 случая, то в нем предполагается постановка задачи вибрационной защиты, где объектом защиты выступает массоинерционный элемент структуры (m), тогда как рычажная связь используется для настроечных целей.

V Исключение координаты y в системе с рычажными связями первого рода. При исключении координаты \bar{y} воспользуемся уравнениями (40), (41) и для системы, приведенной на рисунке 9, получим

$$\bar{y} = \frac{k\bar{z} + \varphi(k_1 l_1 + k_2 l_2)}{mp^2 + k + k_1 + k_2}. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (41), запишем:

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi} \left(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \right) - \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2) k \bar{z}}{mp^2 + k + k_1 + k_2} - \\ & - \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2)^2}{mp^2 + k + k_1 + k_2} \bar{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

После преобразований уравнение (48) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi} \left(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 - \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2)^2}{mp^2 + k + k_1 + k_2} \right) = \\ & = \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2) k \bar{z}}{mp^2 + k + k_1 + k_2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Расчетная схема исходной системы (см. рисунок 9), для которой значения \bar{y} было исключено путем преобразований, представлена на рисунке 13 как система с одной степенью свободы и объектом, имеющим момент инерции J относительно точки вращения.

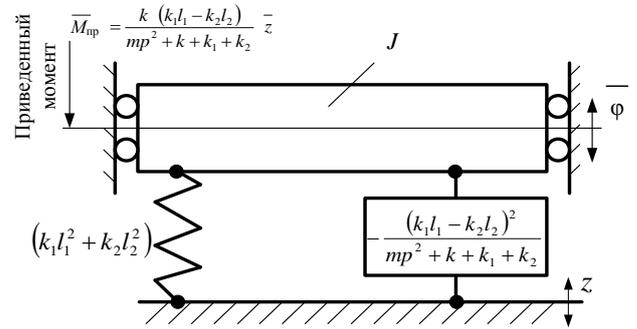


Рисунок 13 – Принципиальная схема системы с одной степенью свободы (φ) при исключении координаты y

На объект действует приведенный момент сил, возбуждаемых вибрациями основания. Изображение по Лапласу такого приведенного момента возмущающих сил представлено правой частью уравнения (49):

$$\bar{M}_{\text{нр}} = \frac{k(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{mp^2 + k + k_1 + k_2} \bar{z}. \quad (50)$$

Структурная схема системы (рисунок 13) имеет вид, как показано на рисунке 14.

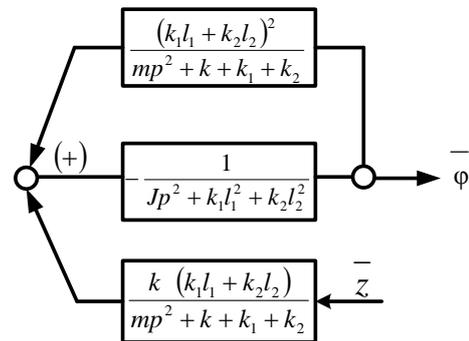


Рисунок 14 – Структурная схема системы на рисунке 8 с исключенной координатой \bar{y}

Обратная связь на рисунке 14 в физическом смысле интерпретируется как квазипружина, обладающая динамической жесткостью:

$$k_{\text{нр}}''' = \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2)^2}{mp^2 + k + k_1 + k_2}. \quad (51)$$

Это выражение можно сравнить с аналогичным параметром, определяемым из рисунка 6, б, где динамическая жесткость определяется выражением вида (51), но в числителе стоит не сумма, а разность параметров $(k_1 l_1 - k_2 l_2)^2$. Такое отличие привносит учет типа рычажной связи (в данном случае – это рычаг второго рода). На рисунке 13 координата $\bar{\varphi}$ в преобразованной расчетной схеме отображает вращательные движения и возникающие при этом взаимодействия элементов так, как это происходит в системе, совершающей поступательное движение. В схеме задействована квазипружина, динамическая жесткость которой отражает наличие рычажных связей, определяющих пространственные форматы движения.

Если сохранить физические особенности вращательного движения, принимая во внимание наличие рычажных связей первого рода, то расчетная схема примет вид, как показано на рисунке 15.

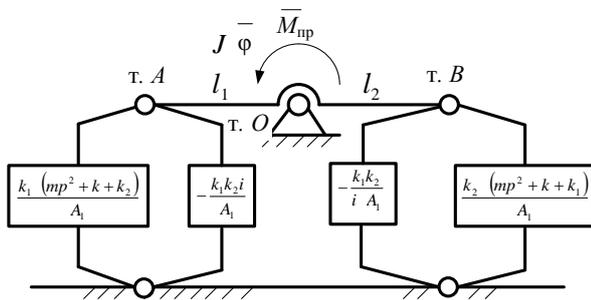


Рисунок 15 – Расчетная схема для объекта защиты, совершающего возвратно-качательные движения при исключении координаты \bar{y} ($AO = l_1$, $BO = l_2$, $A_1 = mp^2 + k + k_1 + k_2$)

В этом случае также нужны предварительные преобразования, как это было показано на примере для выражений (29'–29'''). Учитывая то обстоятельство, что расчетная схема отражает возможности вращательного движения, в котором для каждой точки могут быть определены локальные параметры движения, приведенные жесткости квазипружин также будут локализованы по отношению точек, выбранных для наблюдения за динамическим состоянием или для соответствующих расчетов.

Заключение. Приведенные материалы свидетельствуют о том, что между вращательными и поступательными движениями при реализации структурных подходов выявляется адекватность представлений о правилах преобразований. Рычажные связи появляются в результате абстрагирования от некоторых особенностей вращательного движения. Они характеризуются тем, что взаимодействия между типовыми элементами в системе разнесены в пространстве.

Показано, что разделение рычажных связей вполне объяснимо, если принять во внимание характер локализации мест закрепления связей относительно неподвижной точки рычага. Если связи многочисленны и располагаются с разных сторон точки вращения рычага, то структура передаточных отношений должна корректироваться в связи с выбором точек крепления элементов по отношению к точке вращения рычага.

В данной работе парциальные системы выбраны таким образом, что вращательное и поступательное дви-

жения физически разделены, и в качестве межпарциальных связей выступают упругие элементы k_1 и k_2 . Однако существуют системы, в которых твердое тело объединяет отдельные виды движений в одно (это плоское движение). В этом случае парциальные связи будут носить другой характер (часто их называют инерционными [6, 9]). Хотя и такие системы также могут быть приведены к эквивалентному виду цепной системы, что, в частности, рассматривалось в работах [16–18].

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и педагогические кадры инновационной России (2012–2013)» по теме «Мехатроника виброзащитных колебательных систем» (№ 14.132, 21.1362).

Список литературы

- 1 Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле : пер. с англ. / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер ; под ред. Л. Г. Корнейчука, Э. И. Григolloка. – М. : Машиностроение, 1985. – 473 с. [S. Timoshenko, D. H. Young, W. Weaver, JR. Vibration problems in engineering. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore : John Wiley & Sons, 1974].
- 2 Зоммерфельд, А. Механика : пер. с нем. / А. Зоммерфельд ; под ред. Д. В. Сивухина. – М. : Гос. изд-во иностранной лит., 1947. – 392 с. [Mechanik von Arnold Sommerfeld. Zweite, revidierte Auflage. Leipzig : 1944].
- 3 Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн [Текст] / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М. : Наука, 1992. – 455 с.
- 4 Мандельштам, Л. И. Лекции по теории колебаний [Текст] / Л. И. Мандельштам. – М. : Наука, 1972. – 360 с.
- 5 Дж. Николис. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление : пер. с англ. Ю. А. Данилова / Дж. Николис. – М. : Мир, 1989. – 488 с. [J. S. Nicolis. Dynamics of Hierarchical Systems. An Evolutionary Approach. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo : Springer-Verlag, 1986].
- 6 Елисеев, С. В. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем [Текст] / С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Наука, 2011. – 394 с.
- 7 Хоменко, А. П. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем [Текст] / А. П. Хоменко, С. В. Елисеев, Ю. В. Ермошенко. – Иркутск : ИрГУПС, 2012. – 288 с.
- 8 Белокобыльский, С. В. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем [Текст] / С. В. Белокобыльский, С. В. Елисеев, В. Б. Кашуба. – СПб. : Политехника, 2013. – 364 с.
- 9 Белокобыльский, С. В. Динамика механических систем. Рычажные и инерционно-упругие связи [Текст] / С. В. Белокобыльский, С. В. Елисеев, И. С. Ситов. – СПб. : Политехника, 2013. – 319 с.
- 10 Wiercigroch, M. Modeling of dynamical systems with motion dependent discontinuities / M. Wiercigroch // Chaos, solitons and Fractals. – 2000. – № 11. – P. 2429–2442.
- 11 Современные тенденции развития научных исследований по проблемам машиноведения и машиностроения [Текст] / Н. А. Махутов [и др.] // Проблемы машиностроения и автоматизации. – М. : Федеральное гос. бюджетное учреждение «Рос. науч.-исслед. ин-т информационных технологий и систем автоматизированного проектирования». – 2008. – № 3. – С. 3–19.
- 12 Елисеев, С. В. Особенности построения компактов упругих элементов в механических колебательных системах. Взаимодействия с элементами систем и формы соединения [Текст] / С. В. Елисеев, С. В. Ковыршин, Р. С. Большаков //

Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск : ИргУПС, 2012. – № 4 (36). – С. 61–70.

13 **Елисеев, С. В.** Некоторые вопросы динамики взаимодействия в механических колебательных системах с рычажными связями [Текст] / С. В. Елисеев, А. И. Артюнин, Р. С. Большаков // Машиностроение и безопасность жизнедеятельности. – Муром : Муромский ин-т ГОУ ВПО «Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых». – 2012. – № 4 (14). – С. 36–45.

14 Упругие элементы в механических системах. Структурные интерпретации / А. П. Хоменко [и др.] ; Ирк. гос. ун-т путей сообщ. – Иркутск, 2013. – 460 с. – Библ. : 200 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 02.08.2013 № 230 – В 2013.

15 Механизмы в упругих колебательных системах: особенности учета динамических свойств, задачи вибрационной защиты машин, приборов и оборудования / А. П. Хоменко

[и др.] ; Ирк. гос. ун-т путей сообщ. – Иркутск, 2013. – 187 с. – Деп. в ВИНТИ 15.08.2013 № 243 – В 2013.

16 Динамические взаимодействия элементов машин: расчетные схемы и математические модели вибрационных состояний / С. В. Елисеев [и др.] ; Ирк. гос. ун-т путей сообщ. – Иркутск, 2013. – 319 с. – Деп. в ВИНТИ 08.11.2013 № 313 – В 2013.

17 **Елисеев, С. В.** Рычажные связи в динамических взаимодействиях механических колебательных систем с двумя степенями свободы [Текст] / С. В. Елисеев, Ю. В. Ермошенко, Р. С. Большаков // Известия Юго-Западного государственного университета. – Курск : ЮЗГУ. – 2012. – № 1–2. – С. 6–12.

18 **Елисеев, С. В.** Рычажные связи в структурных интерпретациях механических колебательных систем / С. В. Елисеев, Р. С. Большаков // Международная научно-практическая конференция «Транспорт-2013». Ч. III. – Ростов н/Д : Изд-во D&V, 2013. – С. 247–250.

Получено 19.11.2014

S. V. Eliseev, E. V. Kaimov, N. Zh. Kinash. Reducibility, partial of systems and their ties to the equivalent forms: genesis of lever ties.

Tasks of interaction of typical elements in vibroprotective systems which have rigid body immovable point of rotation are considered. The rigid body has spring ties with elements of system through lever contacts. Methodological basis of creature of mathematical models in forms of structural schemes of adequate systems with feed-back control are discussed. The approaches for getting adequate accounting schemes for oscillation systems are offered.

Various options of emergence in systems of lever ties are considered. New definitions for creation of blocks from elastic and mass elements and lever gears, so-called quasi-springs are offered. Analytical ratios for the description of features of systems and interaction of their elements are received.

The method of creation of equivalent settlement schemes for the systems having some partial structures of various physical natures is offered.