МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА"

Кафедра «Высшая математика»

А. М. ЩЕРБО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
А. И. ПРОКОПЕНКО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА"

Кафедра «Высшая математика»

А. М. ЩЕРБО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
А. И. ПРОКОПЕНКО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Одобрено методической комиссией электротехнического факультета в качестве учебно-методического пособия по курсу высшей математики

Гомель 2013

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6
Щ81

Рецензент – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики *А. Д. Суворова* (УО «БелГУТ»).

Щербо, А. М.

Щ81 Дифференциальные уравнения : учеб.-метод. пособие / А. М. Щербо, Е. А. Задорожнюк, А. И. Прокопенко ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 76 с.
ISBN 978-985-554-262-0

Изложены краткие теоретические сведения о дифференциальных уравнениях. Разобрано большое количество примеров с подробными пояснениями. Для проверки полученных знаний даны самостоятельные и контрольная работы.

Предназначено для студентов всех специальностей и составлено в соответствии с действующей программой по высшей математике.

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6

ISBN 978-985-554-262-0

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1 Общие понятия

Уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1.1)$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Дифференциальное уравнение первого порядка, *разрешенное относительно производной* $y'(x)$, имеет вид

$$y' = f(x, y). \qquad (1.2)$$

В *дифференциальной форме* уравнение первого порядка можно записать в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \qquad (1.3)$$

Решением дифференциального уравнения первого порядка в области D называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество в этой области.

Общим решением называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая обладает следующими свойствами:

1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C;

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$, такого, что $(x_0, y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Всякое решение, получающееся из общего решения при конкретном значении $C = C_0$, называется *частным решением*.

Уравнение $\Phi(x, y, C)=0$ или $\Phi(x, y)=0$, определяющее общее или соответственно частное решение уравнений (1.1) – (1.3) как неявную функцию, называется *общим* или соответственно *частным интегралом* дифференциального уравнения.

***Пример* 1.1.1.** Проверить, что функция $y=x(e^x-1)$ есть решение дифференциального уравнения $xy'-(x+1)y=x^2$.

Решение. Имеем:

$$y=x(e^x-1),\ y'=e^x-1+xe^x.$$

Подставив выражения для y и y' в заданное уравнение, получим

$$x(e^x-1+xe^x)-(x+1)x(e^x-1)=xe^x-x+x^2e^x-x^2e^x+x^2-xe^x+x\equiv x^2.$$

Получилось тождество, что и доказывает, что данная функция является решением дифференциального уравнения.

***Пример* 1.1.2.** Показать, что функция $y=Cx+3$ есть общее решение дифференциального уравнения $xy'-y+3=0$. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=5$.

Решение. Находим:

$$y'=C.$$

Подставив выражения для y и y' в дифференциальное уравнение, получим

$$xC-(Cx+3)+3=Cx-Cx-3+3=0.$$

Таким образом, функция $y=Cx+3$ есть общее решение дифференциального уравнения. Положив $x=1, y=5$, получим $5=C+3$, откуда $C=2$. Итак, искомое частное решение есть $y=2x+3$.

1.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Если дифференциальное уравнение (1.2) приводится к виду

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y), \qquad (1.4)$$

а дифференциальное уравнение (1.3) – к виду

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0, \tag{1.5}$$

то они называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

После разделения переменных они принимают вид

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \tag{1.6}$$

или соответственно

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = 0. \tag{1.7}$$

Интегрируя обе части этих уравнений, получаем общие решения.

***Пример* 1.2.1.** Решить уравнение $x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $(y^2-1)(x^2-1)$, получим

$$\frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0.$$

После интегрирования находим:

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-1) + \frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \frac{1}{2}\ln|C_1|.$$

Постоянную интегрирования C удобнее записать в виде $\frac{1}{2}\ln|C_1|$, где $C_1 \neq 0$. Отсюда $(x^2-1)(y^2-1) = \pm C_1$.

Полагая $C = \pm C_1$, получаем общий интеграл уравнения

$$(x^2-1)(y^2-1) = C.$$

***Пример* 1.2.2.** Найти частное решение уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$.

Решение. Уравнение $y' = y$ относится к виду (1.2), так как правая часть зависит только от y. Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Умножаем обе части уравнения на dx:

$$dy = ydx.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

Интегрируем:

$$\ln|y| = x + \ln|C_1|,$$

$$y = Ce^x, \ (C = \pm C_1).$$

Мы получили общее решение. Найдем из него частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Подставив $y = 1, x = 0$, получим $1 = Ce^0$, откуда $C = 1$. Мы получили частное решение $y = e^x$.

***Пример* 1.2.3.** Найти частное решение уравнения $y \operatorname{tg} x \, dx + dy = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$.

Решение. Разделим переменные:

$$\operatorname{tg} x dx + \frac{dy}{y} = 0.$$

Проинтегрируем:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx + \int \frac{dy}{y} = \ln|C_1|, \ \ln\left|\frac{y}{\cos x}\right| = \ln|C_1|, \ y = C_1 \cos x.$$

Мы получим общее решение. Подставив в него начальные данные $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 4$, получим $4 = C_1 \cos\frac{\pi}{3}$, откуда $C_1 = 8$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = 8\cos x$.

***Пример* 1.2.4.** Решить уравнение $y y' = \frac{1+2x}{y}$.

Решение. Разделим переменные:

$$y^2 dy = (1+2x)dx.$$

Проинтегрируем:

$$\int y^2 dy = \int (1+2x)dx + C_1, \ \frac{y^3}{3} = x + x^2 + C_1, \ y = \sqrt[3]{3x + 3x^2 + C}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения:

1.2.1. $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$.

1.2.2. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$.

1.2.3. $xyy' + x^2 - 1 = 0$.

1.2.4. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,y' = 0$.

1.2.5. $yy' = \dfrac{1+2x}{y}$.

1.2.6. $(1+x)dx + (1-y)xdy = 0$.

Найти частные решения уравнений:

1.2.7. $(1+y^2)dx = xydy;\ \ y(2) = 1$.

1.2.8. $(1+x^2)dy + ydx = 0;\ \ y(1) = 1$.

1.2.9. $y = y'\ln y;\ \ y(2) = 1$.

1.2.10. $ydy = xdx;\ \ y(-2) = 4$.

1.2.11. $3x\sqrt[3]{y}dx + (1-x^2)dy = 0;\ \ y(0) = 0$.

1.2.12. $\sin^2 x \cdot \cos^2 ydx - \cos^2 xdy = 0;\ \ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

1.2.13. Определить кривую, проходящую через точку $A(1;1)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

1.2.14 Найти закон движения тела по оси Oy, если оно начало двигаться из точки $M(0;6)$ со скоростью $v = 4t - 6t^2$.

1.3 Однородные уравнения

Функция $f(x, y)$ называется *однородной измерения* n, если $f(kx, ky) = k^n f(x, y), \forall k \in \mathbb{R}$.

Уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если его правая часть $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения, т. е. $f(kx, ky) = f(x, y)$. Однородное уравнение можно привести к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

а также к виду

$$P(x,\, y)dx + Q(x,\, y)dy = 0\,,$$

где $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Однородное уравнение решается подстановкой $\dfrac{y}{x} = u$.

***Пример* 1.3.1.** Определить, являются ли данные уравнения однородными:

а) $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$; б) $y' = \dfrac{x - y}{1 + y}$.

Решение. а) $f(x,\, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$, $f(kx,\, ky) = \dfrac{kx - ky}{kx + ky} = \dfrac{k(x - y)}{k(x + y)} =$

$= \dfrac{x - y}{x + y} = f(x,\, y)$. Следовательно, данное уравнение является однородным.

б) $f(kx,\, ky) = \dfrac{kx - ky}{1 + ky} = \dfrac{k(x - y)}{1 + ky} \neq f(x,\, y)$. Таким образом, данное уравнение не является однородным.

***Пример* 1.3.2.** Уравнение $x^2 dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$ является однородным, так как $P(x, y) = x^2$, $P(kx, ky) = k^2 x^2 = k^2 P(x, y)$; $Q(x, y) = x^2 + 2xy$, $Q(kx, ky) = k^2(x^2 + 2xy) = k^2 Q(x,\, y)$.

Уравнение $x^3 dx + (y^3 + 2x^2)dy = 0$ не является однородным, так как $P(x, y) = x^3$, $P(kx, ky) = k^3 x^3 = k^3 P(x, y)$, $Q(x, y) = y^3 + 2x^2$, $Q(kx, ky) = k^3 y^3 + 2k^2 x^2 \neq k^3 Q(x,\, y)$.

***Пример* 1.3.3.** Решить уравнение $y' = \dfrac{x + 2y}{x}$.

Решение. Так как числитель и знаменатель правой части – однородные функции первого измерения, то уравнение является однородным. Полагая $\frac{y}{x}=u,\ y=ux$, получим $y'=u'x+u$. Подставляя значения y и y' в уравнение, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x+u=\frac{x+2ux}{x},\ u'x+u=1+2u,\ u'x=1+u.$$

Решая его, находим

$$\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{x},\ \frac{du}{1+u}=\frac{dx}{x},\ \int\frac{du}{1+u}=\int\frac{dx}{x},\ \ln|1+u|=\ln|x|+\ln|C|,\ 1+u=Cx.$$

Заменяя $u=\frac{y}{x}$, получим $1+\frac{y}{x}=Cx$, откуда $y=x(Cx-1)$ – общее решение данного уравнения.

***Пример* 1.3.4.** Решить уравнение $x^2y'e^{\frac{x}{y}}=xye^{\frac{x}{y}}+y^2$.

Решение. $y'=\frac{xye^{\frac{x}{y}}+y^2}{x^2e^{\frac{x}{y}}},\ y'=\frac{\frac{y}{x}e^{\frac{x}{y}}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{e^{\frac{x}{y}}}$.

Так как правая часть есть функция от $\frac{y}{x}$, то уравнение является однородным. С помощью подстановки $u=\frac{y}{x}$ получаем:

$$y'=u'x+u,\ u'x+u=\frac{ue^{\frac{1}{u}}+u^2}{e^{\frac{1}{u}}},\ u'x=\frac{ue^{\frac{1}{u}}+u^2}{e^{\frac{1}{u}}}-u=\frac{u^2}{e^{\frac{1}{u}}},$$

$$u'x=\frac{u^2}{e^{\frac{1}{u}}},\ \frac{du}{dx}x=\frac{u^2}{e^{\frac{1}{u}}},\ \frac{e^{\frac{1}{u}}}{u^2}du=\frac{dx}{x},\ \int\frac{e^{\frac{1}{u}}}{u^2}du=\int\frac{dx}{x},\ -e^{\frac{1}{u}}=\ln|Cx|,$$

$$e^{\frac{x}{y}}=-\ln Cx \text{ – общий интеграл.}$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие решения уравнений:

1.3.1. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

1.3.2. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$.

1.3.3. $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

1.3.4. $2x^2dy=(x^2+y^2)dx$.

1.3.5. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

1.3.6. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$.

1.3.7. $yy'=2y-x$.

1.3.8. $y^2-4xy+4x^2y'=0$.

1.3.9. $xy'=x\sin\dfrac{y}{x}+y$.

1.3.10. $(xy+y^2)dx-(2x^2+xy)dy=0$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

1.3.11. $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x},\ \ y(1)=1$.

1.3.12. $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}-x,\ \ y(1)=0$.

1.3.13. $(2x-3y)dx+xdy=0,\ \ y(1)=-1.$

1.3.14. $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0,\ \ y(1)=1.$

1.3.15. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(1;1)$, если известно, что произведение абсциссы любой точки кривой на угловой коэффициент касательной к кривой в этой точке равно удвоенной сумме координат точки.

1.3.16. Найти кривую, для которой площадь, заключенная между осью абсцисс, кривой и двумя ординатами, одна из которых равна 1, а другая переменная, равна отношению куба переменной ординаты к переменной абсциссе.

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$$

с помощью замены

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha, \\ y = y_1 + \beta. \end{cases}$$

Здесь α и β являются решением системы

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 = 0, \\ ax+by+c = 0. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0 .$$

***Пример* 1.3.5.** Данное уравнение свести к однородному:

$$y' = \frac{2x+3y-5}{x+4y} .$$

Решение. Решая систему $\begin{cases} 2x+3y-5=0; \\ x+4y=0, \end{cases}$ получим $\alpha = 4,\ \beta = -1$.

Делаем замену:

$$\begin{cases} x = x_1 + 4; \\ y = y_1 - 1, \end{cases} \quad y' = y_1'.$$

Получаем однородное уравнение $y_1' = \dfrac{2x_1+3y_1}{x_1+4y_1}$.

Найти общие решения уравнений:

1.3.17. $(y+2)dx = (2x+y-4)dy$.

1.3.18. $x-y-1+(y-x+2)y' = 0$.

1.3.19. $(x+4y)y' = 2x+3y-5$.

1.4 Линейные уравнения

Уравнение вида

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)$$

называется *линейным*. Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным* или *линейным с правой частью*. Если же $Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным* или *линейным уравнением без правой части*. Оно является в этом случае также уравнением с разделяющимися переменными.

Пример **1.4.1.** а) Уравнение $xy'+y-x^3=0$ – линейное неоднородное, так как y и y' входят в него в первой степени и $Q(x)=x^3\neq 0$;

б) $y'+y^2+x=0$ не является линейным уравнением, так как y входит во второй степени;

в) уравнение $yy'+xy=2e^x$ содержит произведение yy' и поэтому не является линейным;

г) $2y'+xy=0$ – линейное однородное уравнение.

Линейные неоднородные уравнения можно решать с помощью подстановки $y=uv$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – неизвестные функции, которые определяются в процессе решения уравнения (*метод Бернулли*).

Пример **1.4.2.** Решить уравнение $xy'-2y=2x^4$.

Решение. Положим $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставляя в уравнение, получим

$$xu'v+xuv'-2uv=2x^4;\quad xu'v+u(xv'-2v)=2x^4.$$

Поскольку одна из функций u или v может быть выбрана произвольно, подберем v так, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль. Для этого достаточно найти частное решение уравнения $xv'-2v=0$. Находим

$$x\frac{dv}{dx}=2v,\ \frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x},\ \ln|v|=2\ln|x|.$$

Отсюда $v=x^2$ – частное решение. Подставляя найденное значение в уравнение, получим

$$xu'x^2=2x^4,\ u'=2x.$$

Находим общее решение этого уравнения $u=\int 2xdx=x^2+C$.

Теперь находим общее решение заданного уравнения

$$y=uv=(x^2+C)x^2=x^4+Cx^2.$$

Найти общие решения указанных уравнений:

1.4.1. $xy' + 2y = x^2$.

1.4.2. $y' - 7y = 8e^{3x}$.

1.4.3. $y' - \dfrac{y}{x} = 3x$.

1.4.4. $y' + y = \cos x$.

1.4.5. $(x^3 + y)dx - xdy = 0$.

1.4.6. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$.

1.4.7. $y' - y\,\mathrm{ctg}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$.

1.4.8. $y'(x + y^2) = y$.

1.4.9. $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

1.4.10. $xy' - y = x^2 \cos x$.

1.4.11. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1.4.12. $y' \sin x - y \cos x = 1;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

1.4.13. $y' - y\,\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{\cos x};\ y(0) = 1$.

1.4.14. $y' + x^2 y = x^2;\ y(2) = 1$.

1.4.15. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2};\ y(1) = 0$.

1.4.16. Найти кривую, проходящую через точку $(1;1)$, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания.

1.4.17. Сила тока $\bar{i}$ в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией L и электродвижущей силой $\bar{E}$ удовлетворяет уравнению $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$. Решить это уравнение, считая L, R и E постоянными, при начальном условии $i = 0$ и $t = 0$.

Линейные уравнения можно также решать и методом вариации произвольной постоянной. Вначале ищется общее решение соответствующего однородного уравнения, полученного из данного отбрасыванием правой части, а затем общее решение данного неоднородного уравнения ищется в таком же виде, как и решение однородного уравнения, только произвольная постоянная C варьируется, т. е. считается функцией от x.

***Пример* 1.4.3.** Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением. Решаем соответствующее однородное уравнение $y' + \frac{y}{x} = 0$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Находим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x};\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x};\ \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|;\ y = \frac{C}{x}.$$

Теперь будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде $y = \frac{C(x)}{x}$, где C является функцией от x. Находим

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2},$$

тогда

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x^2;\ C'(x)x = x^4,\ C'(x) = x^3,$$

отсюда

$$C(x) = \frac{x^4}{4} + C_1.$$

Следовательно, общее решение

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4} + C_1\right) = \frac{x^3}{4} + \frac{C_1}{x}.$$

Данные уравнения решить методом вариации произвольной постоянной:

1.4.18. $xy' - 2y = 4x$.

1.4.19. $xy' + y = 1$.

1.4.20. $y' + 2y = e^{-2x}$.

1.4.21. $xy' + y = \ln x + 1$.

1.5 Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n,$$

где $n \neq 0,\ n \neq 1$, называется *уравнением Бернулли*. Оно решается с помощью подстановки $y = uv$ аналогично линейному. Заметим, что при $n > 0$ уравнение Бернулли всегда имеет решение $y = 0$.

***Пример* 1.5.1.** Решить уравнение $xy' - 4y = x^2 y^{\frac{1}{2}}$.

Решение. $y = uv,\ y' = u'v + uv'$;

$$xu'v + xuv' - 4uv = x^2 (uv)^{\frac{1}{2}};$$

$$u(xv' - 4v) + xu'v = x^2 (u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}});$$

$$xv' - 4v = 0;\ \frac{dv}{v} = 4\frac{dx}{x};\ \ln|v| = 4\ln|x|;\ v = x^4;$$

$$xu'x^4 = x^2 (ux^4)^{\frac{1}{2}};\ xu' = u^{\frac{1}{2}};\ \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{x};\ 2u^{\frac{1}{2}} = \ln|Cx|;$$

$$u = \frac{1}{4}\ln^2|Cx|;\ y = x^4 \frac{1}{4}\ln^2|Cx| = \frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|.$$

Найти общие решения следующих уравнений:

1.5.1. $y' + 2y = y^2 e^x$.

1.5.2. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$.

1.5.3. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

1.5.4. $xy' + y = -xy^2$.

1.5.5. $xy' + y = xy^2 \ln x$.

1.5.6. Среднее геометрическое координат точки касания равно отношению отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к удвоенной ординате точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку $(1;1)$.

1.6 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, т. е.

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Для того, чтобы данное уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В этом случае $u(x, y) = C$ есть общий интеграл данного уравнения.

***Пример* 1.6.1.** Решить уравнение $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

Решение. Находим $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$P = 2xy,\ \frac{\partial P}{\partial y} = (2xy)'_y = 2x;$$

$$Q = x^2 - y^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = (x^2 - y^2)'_x = 2x.$$

Так как условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется, то данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Интегрируя по x равенство $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy$, считая при этом y постоянным, находим $u(x,\,y)=\int 2xydx=x^2y+C(y)$, где $C(y)$ – пока неизвестная функция от y. Подставляя найденную функцию $u(x,\,y)$ в равенство $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-y^2$, получаем $C(y)$:

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+C'(y)=x^2-y^2,\ C'(y)=-y^2,\ C(y)=-\int y^2dy=-\frac{y^3}{3}+C_1$. Теперь можно записать общий интеграл:

$$u(x,\,y)=x^2y+C(y)=x^2y-\frac{y^3}{3}+C_1;$$

$$x^2y-\frac{y^3}{3}=C\,.$$

Замечание. Функция $u(x,\,y)$ может быть определена с помощью криволинейного интеграла

$$u(x,\,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,\,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt\,,$$

где $(x_0;\,y_0)$ – любая точка плоскости, в которой функции $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$ и их частные производные непрерывны.

***Пример* 1.6.2.** Решить дифференциальное уравнение $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$, рассмотренное в примере 1.6.1, с помощью криволинейного интеграла.

Решение. Находим

$$u(x,\,y)=\int_{x_0}^{x}2xydx+\int_{y_0}^{y}(x_0^2-y^2)dy\,.$$

Полагая $x_0=0,\ y_0=0,$ получаем

$$u(x,\,y)=\int_0^x 2xydx+\int_0^y(-y^2)dy=x^2y\Big|_0^x-\frac{y^3}{3}\Big|_0^y=x^2y-\frac{y^3}{3}.$$

Приравнивая функцию $u(x,\,y)$ константе, получаем общий интеграл

$$x^2y-\frac{y^3}{3}=C.$$

Решить уравнения:

1.6.1. $(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0$.

1.6.2. $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$.

1.6.3. $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$.

1.6.4. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$.

1.6.5. $(y+e^x\sin y)dx+(x+e^x\cos y)dy=0$.

1.6.6. $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0,\ \ y(0)=0$.

1.6.7. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$.

1.6.8. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$.

1.6.9. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$.

1.6.10. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

1.7 Задачи различных типов

Определить, к какому виду относятся следующие уравнения:

1.7.1. $(y^2-1)+(2xy+3y)y'=0$.

1.7.2. $y'=\dfrac{y^2}{2xy+3}$.

1.7.3. $y'-ye^x=3$.

1.7.4. $(2x+3y)dx+(x-5y)dy=0$.

1.7.5. $3xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$.

1.7.6. $xy'+2y-e^x=0$.

1.7.7. $y'=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

1.7.8. $y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$.

1.7.9. $y' = \frac{y^3+1}{\sin x}$.

1.7.10. $y' = 2xe^x y + y^3$.

1.7.11. $(x^2+2xy+2y^2)dy + 3xydx = (2x^2-y^2)dx$.

1.7.12. $y' = \cos x - y\,\mathrm{tg}\, x$.

1.7.13. $y' = \frac{x^2+8xy}{x^2-y^2}$.

1.7.14. $y' = \frac{x^2+1}{y^2+1}$.

1.7.15. $x(\ln x - \ln y)dy - 2ydx = 0$.

1.7.16. $y' + \frac{y}{x} = \frac{3\sqrt{y}}{\cos x}$.

1.7.17. $\sin xdx + 2ye^x dy = 0$.

1.7.18. $\frac{xy'-y}{x} = 3\mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

1.7.19. $y - y'e^x = y^2 \mathrm{tg}\, x$.

1.7.20. $(xy+2y^2)dx + \frac{x}{y}dy = 0$.

1.7.21. $(x-\cos y)dx + (x\sin y + \cos y)dy = 0$.

1.7.22. $(x^2+y-ye^x)dx + (x+2y-e^x)dy = 0$.

Решить уравнения:

1.7.23. $(y-\sqrt{xy})dx = xdy$.

1.7.24. $xy' = y(\ln y - \ln x + 5)$.

1.7.25. $y'\sin x - y = \sin x \cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

1.7.26. $(y^2+xy^2)dx + (x^2-x^2y)dy = 0$.

1.7.27. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$.

1.7.28. $xy'-y=x\cos^2\frac{y}{x}$, $y(4)=\pi$.

1.7.29. $y'-6y=2xe^{6x}$, $y(1)=e^6$.

1.7.30. $(2xy^3+4y)dx+(3x^2y^2+4x)dy=0$.

1.7.31. $(y^2-e^x\cos y)dx+(2xy+e^x\sin y)dy=0$.

1.7.32. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью Ox, касательной и радиусом – вектором точки касания, постоянна и равна 2.

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1 Общие понятия

Дифференциальное уравнение n*-го порядка* имеет вид

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0. \tag{2.1}$$

Решением такого уравнения называется любая функция, которая обращает это уравнение в тождество. *Задача Коши* для этого уравнения состоит в отыскании решения $y=\varphi(x)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{2.2}$$

Функция $y=\varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)$ называется *общим решением данного дифференциального уравнения*, если соответствующим выбором значений произвольных постоянных $c_1,c_2,\ldots,c_n$ можно удовлетворить любой задаче Коши, поставленной для данного уравнения. Всякое решение, полученное из общего при некоторых значениях произвольных постоянных, называется *частным*. Если общее или частное решение получено в неявном виде, то оно называется *общим* или соответственно *частным интегралом*.

Пример **2.1.1.** Показать, что функция $y=\ln x-x^2$ является решением уравнения $xy''+y'+4x=0$.

Решение. Находим первую и вторую производные функции $y=\ln x-x^2$:

$$y'=\frac{1}{x}-2x,\;\; y''=-\frac{1}{x^2}-2\,.$$

Подставив их в уравнение, получим

$$x\left(-\frac{1}{x^2}-2\right)+\left(\frac{1}{x}-2x\right)+4x=-\frac{1}{x}-2x+\frac{1}{x}-2x+4x\equiv 0\,.$$

***Пример* 2.1.2.** Показать, что соотношение $y+y^2-x=0$ является интегралом уравнения $y'y'''-3(y'')^2=0$.

Решение. Дифференцируя соотношение $y+y^2-x=0$, получим $y'+2yy'-1=0$, откуда $y'=\dfrac{1}{1+2y}=(1+2y)^{-1}$.

Дифференцируя еще раз, получим $y''=-(1+2y)^{-2}\cdot 2y'$.

Заменяя y' его значением, находим

$$y''=-(1+2y)^{-2}\cdot 2\cdot(1+2y)^{-1}=-2\cdot(1+2y)^{-3}\,.$$

Снова дифференцируем:

$$y'''=6(1+2y)^{-4}\cdot 2y'=12(1+2y)^{-5}\,.$$

Подставляя y', y'', y''' в данное уравнение, получим

$$(1+2y)^{-1}\cdot 12(1+2y)^{-5}-3(-2(1+2y)^{-3})^2=$$
$$=12(1+2y)^{-6}-12(1+2y)^{-6}\equiv 0.$$

***Пример* 2.1.3.** Показать, что $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3$ является общим решением уравнения $y'''-2y''+y'=0$.

Решение. Дифференцируя данную функцию три раза, получаем:

$$y'=c_2e^x+(c_1+c_2x)e^x=(c_1+c_2+c_2x)e^x,$$
$$y''=c_2e^x+(c_1+c_2+c_2x)e^x=(c_1+2c_2+c_2x)e^x,$$
$$y'''=(c_1+3c_2+c_2x)e^x\,.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение, имеем

$$(c_1+3c_2+c_2x)e^x-2(c_1+2c_2+c_2x)e^x+(c_1+c_2+c_2x)e^x=0\cdot e^x\equiv 0\,.$$

Показать, что данные функции являются решениями соответствующих уравнений:

2.1.1. $y = xe^{-x}$, $y'' + 2y' + y = 0$.

2.1.2. $y = \cos 2x + 2\sin 2x - 1$, $4y''' + y' = 0$.

2.1.3. $x = y + \ln y$, $yy'' + (y')^3 - (y')^2 = 0$.

2.1.4. $y = x^3 + x + 5$, $xy''' - y'' = 0$.

2.1.5. $y^3 - y = 3x$, $2y(y')^3 + y'' = 0$.

2.1.6. $y = x^2 \ln x$, $xy'' = 2$.

Показать, что данные функции являются общими решениями соответствующих уравнений:

2.1.7. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$, $y'' + 2y' + y = 0$.

2.1.8. $y = c_1(x - e^{-x}) + c_2$, $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

2.1.9. $y = (c_1 x + c_2)^2$, $2yy'' = (y')^2$.

2.1.10. $y = c_1 - c_2 \cos x - x$, $y'' \operatorname{tg} x - y' = 1$.

2.2 Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Общее решение такого уравнения получается путем n-кратного интегрирования.

***Пример* 2.2.1.** Найти общее решение уравнения $y'' = \ln x$ и выделить из него частное, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$.

Решение. Интегрируя это уравнение дважды, получим общее решение

$$y' = \int \ln x dx + C_1 = x \ln x - x + C_1;$$

$$y = \int (x \ln x - x + C_1) dx + C_2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Подставив сюда значение $x = 1$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -1 + C_1 = -1; \\ -\dfrac{3}{4} + C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем $C_1 = 0, C_2 = \frac{3}{4}$. Подставляя C_1 и C_2 в общее решение, получаем частное решение

$$y = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}.$$

Найти общие решения следующих уравнений:

2.2.1. $y'' = -\frac{1}{x^3}$.

2.2.2. $y'' = \sin 3x$.

2.2.3. $y'' = x \ln x$.

2.2.4. $y'' = 2x + 3$.

2.2.5. $y'' = e^{2x}$.

2.2.6. $y'' = 2\cos 5x$.

Найти частные решения уравнений:

2.2.7. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

2.2.8. $y''' = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

2.2.9. $y'' = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0, y'(1) = -1$.

2.2.10. $y''' = \frac{6}{x^3}$, $y(1) = 2, y'(1) = 4, y''(1) = -3$.

2.3 Уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$

Уравнение не содержит явно искомой функции y. Оно допускает понижение порядка с помощью замены переменной

$$y' = p(x),$$

откуда

$$y'' = p'(x),$$

и получается уравнение первого порядка $F(x, p, p') = 0$.

***Пример* 2.3.1.** Решить уравнение $xy'' - y' = 0$.

Решение. Полагая $y' = p$, $y'' = p'$, получаем уравнение первого порядка $xp' - p = 0$. Решая его, находим $p = C_1 x$. Заменяя p на y', получаем уравнение $y' = C_1 x$, откуда $y = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2$.

Решить уравнения:

2.3.1. $xy'' + 2y' = 0$.

2.3.2. $x^2 y'' + xy' = 1$.

2.3.3. $y'' + (y')^2 = 1$.

2.3.4. $y''(e^2 + 1) + y' = 0$.

2.3.5. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

2.3.6. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

2.3.7. $y''(1 + \ln x) + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln x,\ y(1) = \dfrac{1}{2},\ y'(1) = 1$.

2.3.8. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'},\ y(2) = \dfrac{16}{5},\ y'(2) = 4$.

2.3.9. $y'' - 2x(y')^2 = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = -1$.

2.3.10. $(x - 1)y'' - 2y' = 2,\ y(2) = -1,\ y'(2) = 2$.

2.3.11. $y''(x^2 + 1) - 2xy' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

2.3.12. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 1$.

2.3.13. Найти интегральную кривую уравнения $y''x = y'$, касающуюся в точке $(1; 2)$ прямой $y = 2x$.

2.3.14. Найти интегральную кривую уравнения $y'' = 2yy'$, касающуюся в точке $(0; 1)$ прямой $y - x - 1 = 0$.

2.4 Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$

Уравнение не содержит явно независимой переменной x. В этом случае порядок уравнения можно понизить с помощью замены переменной

$$y' = p(y),$$

где новая переменная p рассматривается как функция от y. Дифференцируя по x, находим

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Подставляя y' и y'' в данное уравнение, получим уравнение первого порядка относительно p.

***Пример* 2.4.1.** Решить уравнение $yy'' = (y')^2$.

Решение. Делаем подстановку $y' = p,\ y'' = \dfrac{dp}{dy} p$. Подставив в уравнение, получим $y\dfrac{dp}{dy} p = p^2,\ p\left(y\dfrac{dp}{dy} - p \right) = 0.$

Отсюда или $p = 0$, или $y\dfrac{dp}{dy} - p = 0$. Решая последнее уравнение, находим $p = C_1 y,$ т. е. $y' = C_1 y$. Интегрируя еще раз, получим $y = C_2 e^{C_1 x}$. Из равенства $p = 0$ найдем еще одно решение $y = C$ (оно также получается из первого решения при $C_1 = 0$).

Решить уравнения:

2.4.1. $2y^3 y'' + 1 = 0$.

2.4.2. $yy'' + (y')^2 = 1$.

2.4.3. $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

2.4.4. $2y''\sqrt{y} - y' = 0$.

2.4.5. $2yy'' - (y')^2 = 2,\ y(1) = y'(1) = 2$.

2.4.6. $y''y^3 = 1,\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

2.5 Уравнение в полных производных

Если в уравнении $F(x, y, y', y'') = 0$ левая часть есть полная производная некоторой функции $\Phi(x, y, y')$ по x, то порядок уравнения понижается интегрированием обеих частей уравнения.

***Пример* 2.5.1.** Решить уравнение $\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y} = 0$.

Решение. Нетрудно заметить, что левая часть этого уравнения есть производная функции $\ln|y'| - \ln|y|$. Интегрируя, получаем $\ln|y'| - \ln|y| = \ln\bar{C}_1 \quad (\bar{C}_1 > 0)$, или $\frac{y'}{y} = C_1$. Отсюда находим $y = C_2 e^{C_1 x}$.

Решить уравнения:

2.5.1. $xy'' + y' = 2x$.

2.5.2. $y'' + \frac{xy' - y}{x^2} = 0$.

2.5.3. $x^2 y'' + 2xy' = 1$.

2.5.4. $2y'y'' = 1$.

3 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1 Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{3.1}$$

где a_0, a_1, a_2 – постоянные, $a_0 \neq 0$, *называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Для нахождения общего решения уравнения (3.1) составляется *характеристическое уравнение*

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \tag{3.2}$$

При решении квадратного уравнения (3.2) возможны три случая:

1) дискриминант $D > 0$, корни действительные различные: k_1 и k_2. Общее решение уравнения (3.1) запишется в виде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} .$$

2) $D = 0$, корни действительные равные: $k_1 = k_2$ и

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}.$$

3) $D < 0$, корни комплексные сопряженные: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ и

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

***Пример* 3.1.1.** Найти общее решение уравнения $y'' - y' - 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - k - 6 = 0$, его корни $k_1 = 3,\ k_2 = -2$. Общее решение $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$.

***Пример* 3.1.2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 - 8k + 16 = 0$, корни его $k_1 = k_2 = 4$. Общее решение $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$.

***Пример* 3.1.3.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 13 = 0$, его корни $k_{1,2} = 3 \pm 2i$. Общее решение $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

***Пример* 3.1.4.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 4,\ y'(0) = 10$.

Решение. Составим характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения: $k^2 - 4k + 3 = 0$, его корни $k_1 = 1,\ k_2 = 3$. Общее решение $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$.

Для определения частного решения в равенства $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$; $y' = C_1 e^{x} + 3C_2 e^{3x}$ подставим начальные условия. Получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 4 = C_1 + C_2; \\ 10 = C_1 + 3C_2, \end{cases}$$

из которой находим $C_1 = 1,\ C_2 = 3$. Подставим эти значения в общее решение и получим частное $y = e^{x} + 3e^{3x}$.

Найти общие решения уравнений:

3.1.1. $y'' + 3y' - 4y = 0$.

3.1.2. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

3.1.3. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

3.1.4. $y'' + 4y' = 0$.

3.1.5. $y'' - 4y = 0$.

3.1.6. $y'' + 4y = 0$.

3.1.7. $3y'' + 5y' - 2y = 0$.

3.1.8. $y'' - y' - 6y = 0$.

3.1.9. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3.1.10. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

3.1.11. $5y'' + 13y' - 6y = 0$.

3.1.12. $y'' + 3y' = 0$.

3.1.13. $y'' + 9y = 0$.

3.1.14. $y'' - 9y = 0$.

Найти частные решения уравнений:

3.1.15. $y'' + y' - 6y = 0$ при $y(0) = 2,\ y'(0) = 9$.

3.1.16. $y'' - 8y' + 16y = 0$ при $y(0) = -3,\ y'(0) = -4$.

3.1.17. $y'' - y = 0$ при $y(0) = 3,\ y'(0) = -4$.

3.1.18. $y'' + 4y = 0$ при $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4$.

Составить линейные однородные дифференциальные уравнения, если известны корни характеристических уравнений, и написать их общие решения:

3.1.19. $k_1 = -2,\ k_2 = 4$.

3.1.20. $k_1 = k_2 = 5$.

3.1.21. $k_1 = 3 + 5i,\ k_2 = 3 - 5i$.

3.1.22. $k_1 = 3,\ k_2 = -3$.

3.1.23. $k_1 = k_2 = 2$.

3.1.24. $k_1 = -2 + 4i,\ k_2 = -2 - 4i$.

3.2 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим *линейное неоднородное уравнение*

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{3.3}$$

с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2 и с непрерывной правой частью $f(x)$. Уравнение с теми же коэффициентами, но с правой частью, равной нулю,

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{3.4}$$

называется *линейным однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению* (3.3).

Общее решение линейного неоднородного уравнения (3.3) можно записать в виде суммы

$$y = \bar{y} + y^*, \tag{3.5}$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (3.4), а y^* – частное решение неоднородного уравнения (3.3). Нахождение $\bar{y}$ было рассмотрено в подразделе 3.1.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов или методом подбора формы частного решения (другой способ – метод вариации произвольных постоянных – будет рассмотрен в следующем разделе). Этот способ применим, если правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x), \tag{3.6}$$

где $P_n(x)$ и $Q_l(x)$ – многочлены степеней n и l с действительными коэффициентами; α и β – действительные числа, которые могут равняться и нулю. В этом случае частное решение y^* уравнения (3.3) ищется в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x), \tag{3.7}$$

где $R_m(x)$ и $S_m(x)$ – многочлены степени m (наибольшей из степеней n и l) с неопределенными буквенными коэффициентами, а r – кратность, с которой число $k = \alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения (3.2) (если $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то полагаем $r = 0$).

Подчеркнем, что многочлены $R_m(x)$ и $S_m(x)$ должны быть полными (т. е. содержать все степени x от нуля до m) с различными неопределенными коэффициентами у одних и тех же степеней x в обоих многочленах и что при этом, если в выражение функции $f(x)$ входит хотя бы одна из функций $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, то y^* должно содержать обе функции.

Чтобы найти неопределенные коэффициенты многочленов $R_m(x)$ и $S_m(x)$, искомое частное решение y^* и его производные $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ подставляют в левую часть уравнения (3.3) и в полученном тождестве сравнивают коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях.

Рассмотрим вид частного решения y^* для отдельных случаев функции (3.7):

1) $f(x) = P_n(x)$; здесь $\alpha = 0, \beta = 0$, поэтому $k = \alpha \pm \beta i = 0$ и частное решение ищется в виде

$$y^* = x^r(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n), \tag{3.8}$$

где r – кратность, с которой нуль входит в число корней характеристического уравнения;

2) $f(x) = ae^{\alpha x}$; здесь $k = \alpha$ и частное решение нужно искать в виде

$$y^* = x^r A e^{\alpha x}, \tag{3.9}$$

где r – кратность корня $k = \alpha$, A – неопределенный коэффициент;

3) $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$; здесь $\beta = 0$, поэтому $k = \alpha \pm \beta i = \alpha$ и частное решение ищется в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n), \tag{3.10}$$

где r – кратность, с которой $k = \alpha$ является корнем характеристического уравнения;

4) $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$; здесь $\alpha = 0$, поэтому $k = \pm\beta i$ и частное решение ищется в виде

$$y^* = x^r(A\cos\beta x + B\sin\beta x), \tag{3.11}$$

где r – кратность, с которой $k = \pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения.

***Пример* 3.2.1.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' - 2y = 4x^2$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, правая часть есть многочлен второй степени, т.е. мы имеем частный случай 1 [для функции (3.6) $k = 0$, $n = 2$].

Найдем общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения. Запишем характеристическое уравнение:

$$k^2 - k - 2 = 0;\ k_1 = 2,\ k_2 = -1.$$

Отсюда $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. Частное решение y^* следует искать, согласно (3.8), в виде

$$y^* = x^0 (Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C.$$

(Так как $k = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$). Находим производные

$$y^{*\prime} = 2Ax + B;\ y^{*\prime\prime} = 2A.$$

Подставляем выражения для y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение:

$$2A - 2Ax - B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 4x^2.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой частях полученного тождества:

$$\begin{cases} -2A = 4; \\ -2A - 2B = 0; \\ 2A - B - 2C = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A = -2; \\ B = -A = 2; \\ 2C = 2A - B = -4 - 2 = -6; \quad C = -3. \end{cases}$$

Таким образом, $y^* = -2x^2 + 2x - 3$.

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3.$$

***Пример* 3.2.2.** Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' = 8xe^{2x}$.

Решение. Найдем корни характеристического уравнения:

$$k^2 - 2k = 0;\ k_1 = 0,\ k_2 = 2;$$

тогда $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Правая часть уравнения представляет собой произведение многочлена первой степени на функцию e^{2x}, т.е. мы имеем частный случай 3 функции (3.6), где $k=2,\ n=1$. Частное решение y^* будем искать согласно формуле (3.10):

$$y^* = x(Ax+B)e^{2x} = Ax^2e^{2x} + Bxe^{2x}.$$

Так как $k=2$ встречается среди корней характеристического уравнения один раз, то $r=1$. Дифференцируя y^*, получим

$$y^{*\prime} = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x} + Be^{2x} + 2Be^{2x};$$

$$y^{*\prime\prime} = 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} + 2Be^{2x} + 2Be^{2x} + 4Bxe^{2x}.$$

Подставляя в данное уравнение $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ и сократив на e^{2x}, находим

$$2A + 4Ax + 4Ax + 4Ax^2 + 2B + 2B + 4Bx - 4Ax - 4Ax^2 - 2B - 4Bx = 8x;$$

$$4Ax + 2A + 2B = 8x.$$

Приравняем коэффициенты:

$$\begin{cases} 4A = 8; \\ 2A + 2B = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 2; \\ B = -A = -2. \end{cases}$$

Тогда $y^* = 2x^2e^{2x} - 2xe^{2x}$ и общее решение

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2e^x + 2x^2e^{2x} - 2xe^{2x}.$$

Пример **3.2.3.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$ при начальных условиях $y(0)=1;\ y'(0)=2$.

Решение. Имеем: $k^2 + k - 2 = 0;\ k_1 = 1;\ k_2 = -2;$ тогда $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Правая часть уравнения является частным случаем 4 функции (3.6), где $\alpha = 0; \beta = 1; k = \alpha \pm \beta i = \pm i$. Поскольку такого корня у характеристического уравнения нет, то $r=0$ и

$$y^* = A\cos x + B\sin x;$$

$$y^{*\prime} = -A\sin x + B\cos x;$$

$$y^{*\prime\prime} = -A\cos x - B\sin x.$$

Итак,

$$-A\cos x - B\sin x - A\sin x + B\cos x - 2A\cos x - 2B\sin x = \cos x - 3\sin x;$$

$$(B-3A)\cos x-(3B+A)\sin x=\cos x-3\sin x .$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} B-3A=1; \\ 3B+A=3. \end{cases}$$

Решая ее, находим $A=0; B=1.$ Следовательно, частное решение имеет вид $y^*=\sin x$, а общее – $y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\sin x.$

Найдем производную:

$$y'=C_1e^x-2C_2e^{-2x}+\cos x .$$

Составим систему уравнений для нахождения C_1 и C_2, используя начальные условия:

$$\begin{cases} C_1e^0+C_2e^0+\sin 0=1; \\ C_1e^0-2C_2e^0+\cos 0=2; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1+C_2=1; \\ C_1-2C_2=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1=1;\ C_2=0,$ т.е. частное решение данного уравнения имеет вид

$$y=e^x+\sin x .$$

***Пример* 3.2.4.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-3y'=12x^3+x$.

Решение. Находим $k^2-3k=0;\ k_1=0;\ k_2=3;\ \bar{y}=C_1+C_2e^{3x}$.

Правая часть уравнения является многочленом третьей степени [частный случай 1), где $\alpha=0; \beta=0; k=0; r=1; m=3$].

Следовательно,

$$y^*=x(Ax^3+Bx^2+Cx+D) .$$

Находим

$$A=-1; B=-\frac{4}{3}; C=-1,5; D=-1 .$$

$$y=C_1+C_2e^{3x}-x^4-\frac{4}{3}x^3-1,5x^2-x .$$

***Пример* 3.2.5.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'+4y=12xe^{2x}$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$k^2-4k+4=0;\, k_1=k_2=2;\, \bar{y}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}.$$

Правая часть уравнения является произведением многочлена первой степени на функцию e^{2x} [частный случай 3) функции (3.6), где $\alpha=2; \beta=0; k=2; m=1; r=2$]. Ищем частное решение в виде

$$y^*=x^2(Ax+B)e^{2x}.$$

Находим $A=2, B=0, y^*=2x^3e^{2x}$. Общее решение

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+2x^3e^{2x}.$$

Пример **3.2.6.** Указать вид частного решения неоднородного уравнения $y''+9y=xe^{2x}\sin 3x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$k^2+9=0;\, k_{1,\,2}=\pm 3i.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y^*=e^{2x}((Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x).$$

Пример **3.2.7.** Указать вид частного решения неоднородного уравнения $y''+4y'+13y=x^2e^{-2x}\cos 3x$.

Решение. Находим корни характеристического уравнения:

$$k^2+4k+13=0;\, k_{1,\,2}=-2\pm 3i.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\bar{y}=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Частное решение ищем в виде

$$y^*=xe^{-2x}((Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(Dx^2+Ex+F)\sin 3x).$$

Если правая часть уравнения (3.3) есть сумма функций вида (3.6):

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

то для отыскания частного решения этого уравнения нужно использовать теорему наложения решений: надо найти частные решения y_1^* и y_2^*, соответствующие функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$, тогда их сумма $y^* = y_1^* + y_2^*$ будет являться частным решением исходного дифференциального уравнения.

***Пример* 3.2.8.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = x^2 + 2xe^{-x}$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$k^2 - 1 = 0;\, k_1 = 1;\, k_2 = -1;\, \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Правая часть является суммой двух функций: $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = 2xe^{-x}$.

Частное решение ищем, пользуясь теоремой наложения, в виде

$$y_1^* = Ax^2 + Bx + C;\, y_2^* = x(Dx + E)e^{-x};$$

$$y^* = Ax^2 + Bx + C + x(Dx + E)e^{-x}.$$

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + Ax^2 + Bx + C + x(Dx + E)e^{-x}.$$

Найти общие решения уравнений:

3.2.1. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

3.2.2. $y'' - y = 2e^x$.

3.2.3. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

3.2.4. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.

3.2.5. $y'' + 4y = 8\sin 2x$.

3.2.6. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x$.

3.2.7. $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$.

3.2.8. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$.

3.2.9. $y'' + y = 4x\cos x$.

3.2.10. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

3.2.11. $y'' + y = 4xe^x$.

3.2.12. $y'' + y = 4\sin x$.

3.2.13. $y'' + y' = 4x^2 e^x$.

3.2.14. $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$.

3.2.15. $y'' + 8y' = 8x$.

3.2.16. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.

3.2.17. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x$.

3.2.18. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$.

3.2.19. $y'' + 4y' = -2xe^{-4x}$.

3.2.20. $y'' - 4y = e^{2x}\sin x$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

3.2.21. $y'' + 4y = \sin x;\; y(0) = 1;\; y'(0) = 1$.

3.2.22. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3);\; y(0) = 2;\; y'(0) = 2$.

3.2.23. $y'' + y = -\sin 2x;\; y(\pi) = 1;\; y'(\pi) = 1$.

3.2.24. $y'' - y' = 2 - 2x;\; y(0) = 1;\; y'(0) = 1$.

3.2.25. $y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x};\; y(0) = 0;\; y'(0) = 1$.

Указать вид частного решения уравнений:

3.2.26. $y'' + 2y' + 5y = x^2 e^{-x}$.

3.2.27. $y'' - 2y' - 8y = xe^{4x}$.

3.2.28. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x^2)e^{4x}$.

3.2.29. $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}\sin 2x$.

3.2.30. $y'' - 2y' = x^3 + 1$.

3.2.31. $y'' + 3y' = x^2 + xe^{-3x}\sin x$.

3.2.32. $y'' - y = x^2 e^x$.

3.2.33. $y'' + 9y = x\sin 3x$.

3.2.34. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + \sin 2x$.

3.2.35. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$.

3.2.36. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.

3.2.37. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$.

3.2.38. $y'' + 9y = e^{3x}\sin x$.

3.2.39. $y'' - 7y' + 6y = (x - 1)\cos x + 2\sin x$.

3.2.40. $y'' + 4y = e^{2x} + \sin 2x$.

3.3 Метод вариации произвольных постоянных

Если известно общее решение

$$\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (3.11)$$

однородного уравнения (3.4), соответствующего неоднородному уравнению (3.3), то для определения частного решения y^* уравнения (3.3) можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Сущность этого метода состоит в том, что частное решение неоднородного уравнения (3.3) ищется в форме (3.11), причем C_1 и C_2 рассматриваются как некоторые пока неизвестные функции от x:

$$y^* = C_1(x)\cdot y_1(x) + C_2(x)\cdot y_2(x)\,.$$

Производные от функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0; \\ C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (3.12)$$

Этот метод можно применить для любого вида функции $f(x)$, но если $f(x)$ имеет вид (3.6), то проще применить метод неопределенных коэффициентов.

***Пример* 3.3.1.** Найти интеграл уравнения $y'' + y = \mathrm{ctg}\,x$.

Решение. Правая часть $f(x) = \mathrm{ctg}\,x$ этого дифференциального уравнения не является функцией вида (3.6), поэтому воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,\,2} = \pm i$, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x\,.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^* = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x\,.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0; \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \mathrm{ctg}\,x. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \mathrm{ctg}\,x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\cos x\,;$$

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \operatorname{ctg} x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=\frac{-\cos x\cdot\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\sin x}\ .$$

Интегрируя полученные равенства, получим

$$C_1(x)=-\int\cos x dx=-\sin x+C_1;$$

$$C_2(x)=\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx=\int\frac{dx}{\sin x}-\int\sin x dx=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\cos x+C_2\,.$$

Подставляя $C_1(x)$ и $C_2(x)$, запишем общее решение данного уравнения:

$$y=(-\sin x+C_1)\cos x+\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\cos x+C_2\right)\sin x=C_1\cos x+$$

$$+C_2\sin x+\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

Пример **3.3.2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+2y'+y=\dfrac{1}{xe^x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+2k+1=0$ имеет корни $k_1=k_2=-1$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}\,.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^*=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)xe^{-x}\,.$$

Составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)xe^{-x}=0;\\ -C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)(e^{-x}-xe^{-x})=\dfrac{1}{xe^x}.\end{cases}$$

Решая систему, получим

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & xe^{-x}\\ \frac{1}{xe^{-x}} & e^{-x}-xe^{-x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-x} & xe^{-x}\\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{-e^{-2x}}{e^{-2x}-xe^{-2x}+xe^{-2x}}=\frac{-e^{-2x}}{e^{-2x}}-1,$$

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}e^{-x} & 0\\ -e^{-x} & \frac{1}{xe^{x}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-x} & xe^{-x}\\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{xe^{2x}}}{e^{-2x}}=\frac{1}{x}.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(x)=\int(-1)dx=-x+C_1;$$

$$C_2(x)=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C_2.$$

Подставляя найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$, получим общее решение заданного уравнения

$$y=(-x+C_1)e^{-x}+(\ln|x|+C_2)e^{-x}x=$$
$$=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}-xe^{-x}+xe^{-x}\ln|x|.$$

Решить уравнения:

3.3.1. $y''+y=\operatorname{tg}x$.

3.3.2. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

3.3.3. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

3.3.4. $y''-2y=\dfrac{2}{x^3}(x^2-1)$.

3.3.5. $y''+4y'+4y=e^{-x}\ln x$.

3.3.6. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

3.3.7. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

3.3.8. $y''+4y=2\operatorname{tg}x$.

3.3.9. $y''+5y'+6y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$.

3.3.10. $y''+4y=\operatorname{ctg}2x$.

3.4 Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (3.13)$$

называется *линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Алгебраическое уравнение

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0 \qquad (3.14)$$

называется *характеристическим* для уравнения (3.13).

Частные решения уравнения (3.13) зависят от вида корней характеристического уравнения:

Характер корня характеристического уравнения	Частные решения уравнения
1. k – простой вещественный корень	e^{kx}
2. k – вещественный корень кратности r	e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx} ,…, $x^{r-1}e^{kx}$
3. $\alpha\pm\beta i$ – простые комплексные сопряженные корни	$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$
4. $\alpha\pm\beta i$ – комплексные сопряженные корни кратности r	$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Общее решение уравнения (3.13) имеет вид

$$\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_{n-1}y_{n-1}+C_ny_n\,, \qquad (3.15)$$

где $y_1, y_2,\ldots,y_n$ – n частных решений этого уравнения, указанных в таблице.

***Пример* 3.4.1.** Найти общее решение уравнения $y^{(5)}+4y'''=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^5+4k^3=0$, его корни с соответствующей кратностью:

$$k_1=k_2=k_3=0;\ r=3;\ k_{4,5}=\pm 2i;\ r_{4,5}=1\,.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$\bar{y}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x\,.$$

Пример **3.4.2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - k^2 - 2k = 0$, его корни $k_1 = 0; k_2 = 2; k_3 = -1; r = 1;$ следовательно, общее решение имеет вид

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}.$$

Пример **3.4.3.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' + 2y'' + 10y' = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2;\ y'(0) = 1;\ \ y''(0) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 + 2k^2 + 10k = 0$ имеет простые корни $k_1 = 0; k_{2,3} = -1 \pm 3i$. Общее решение

$$\bar{y} = C_1 + e^{-x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x).$$

Чтобы найти частное решение, найдем производные:

$$\bar{y}' = -e^{-x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x + 3C_2 \sin 3x - 3C_3 \cos 3x);$$

$$\bar{y}'' = e^{-x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x + 3C_2 \sin 3x - 3C_3 \cos 3x + 3C_2 \sin 3x - \\ -3C_3 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x - 9C_3 \sin 3x).$$

Подставим начальные условия в y, y', y'':

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2; \\ -C_2 + 3C_3 = 1; \\ C_2 - 3C_3 - 3C_3 - 9C_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 2; \\ C_2 - 3C_3 = -1; \\ 8C_2 + 6C_3 = -1. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C_1 = 2{,}3;\ C_2 = -0{,}3;\ C_3 = \dfrac{7}{30}$.

Частное решение имеет вид

$$\bar{y} = 2{,}3 + e^{-x}\left(-0{,}3\cos 3x + \frac{7}{30}\sin 3x\right).$$

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (3.16)$$

называется *неоднородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*. Решение такого уравнения находится по той же схеме, как и для уравнения второго порядка:

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Пример **3.4.4.** Найти общее решение уравнения $y''' + 4y' = 8e^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 + 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0, k_{2,3} = \pm 2i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Частное решение ищем в виде $y^* = Ae^{2x}$. Тогда $y^{*\prime} = 2Ae^{2x}$; $y^{*\prime\prime} = 4Ae^{2x}$; $y^{*\prime\prime\prime} = 8Ae^{2x}$. Подставим производные в уравнение

$$8Ae^{2x} + 8Ae^{2x} = 8Ae^{2x}, \ A = 0,5.$$

Следовательно,

$$y = 0,5e^{2x};$$

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + 0,5e^{2x}.$$

Пример **3.4.5.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, k_{2,3} = \pm i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения будет

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y^* = Ax^2 + Bx + C.$$

Находим производные:

$$y^{*\prime} = 2Ax + B; \ y^{*\prime\prime} = 2A; \ y^{*\prime\prime\prime} = 0.$$

Подставляем их в уравнение, получаем

$$-2A + 2Ax + B - Ax^2 - Bx - C = x^2 + x,$$

откуда

$$\begin{cases} -A = 1; \\ 2A - B = 1; \\ -2A + B - C = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A = -1; B = -3; C = -1$.

Тогда частное решение уравнения будет $y^* = -x^2 - 3x - 1$, а общее –

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1.$$

***Пример* 3.4.6.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 4y' = 24x^2 - 12$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1;\ \ y'(0) = 4;\ \ y''(0) = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0, k_2 = 2; k_3 = -2$, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y^* = x(Ax^2 + Bx + C).$$

Находим производные

$$y^{*\prime} = 3Ax^2 + 2Bx + C;\ y^{*\prime\prime} = 6Ax + 2B;\ y^{*\prime\prime\prime} = 6A$$

и подставляем их в уравнение

$$6A - 12Ax^2 - 8Bx - 4C = 24x^2 - 12.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{cases} -12A = 24; \\ \quad 8B = 0; \\ \quad 6A - 4C = -12. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = -2; B = 0; C = 0$ и получаем

$$y^* = -2x^3;\ y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} - 2x^3.$$

Найдем частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Продифференцируем два раза общее решение неоднородного уравнения:

$$y' = 2C_2 e^{2x} - 2C_3 e^{-2x} - 6x^2;$$

$$y'' = 4C_2 e^{2x} + 4C_3 e^{-2x} - 12x.$$

Подставив начальные условия, получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1; \\ 2C_2 - 2C_3 = 4; \\ 4C_2 + 4C_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 1; C_2 = 1; C_3 = -1$.

Следовательно, $y = 1 + e^{2x} - e^{-2x} - 2x^3$ – искомое частное решение.

***Пример* 3.4.7.** Установить вид частного решения уравнения $y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 \cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = i; k_3 = k_4 = -i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\bar{y} = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y^* = x^2\left((Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x\right).$$

***Пример* 3.4.8.** Установить вид частного решения уравнения $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = x^2 e^{-2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 + 4k^3 + 4k^2 = 0;$ $k^2(k+2)^2 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 0; k_3 = k_4 = -2$. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} + C_4 x e^{-2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}.$$

Найти общие решения уравнений:

3.4.1. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

3.4.2. $y''' + 2y'' + y' = 0$.

3.4.3. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

3.4.4. $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$.

3.4.5. $y^{(4)} - y'' = 0$.

3.4.6. $y''' - 8y = 0$.

3.4.7. $y^{(4)} + y''' - 6y'' = 0$.

3.4.8. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

3.4.9. $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$.

3.4.10. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$.

3.4.11. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

3.4.12. $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

3.4.13. $y^{(4)} - y = 1$.

3.4.14. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$.

3.4.15. $y''' - y = \sin x$.

3.4.16. $y^{(4)} - 2y'' + y = \cos x$.

3.4.17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \cos 2x$.

3.4.18. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$.

3.4.19. $y^{(4)} - y = 5e^x \sin x$.

3.4.20. $y^{(5)} + y''' = x^2 - 1$.

3.4.21. $y^{(4)} - y = 5e^x \sin x$.

3.4.22. $y^{(5)} + 4y''' = e^x + 3\sin 2x$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

3.4.23. $y''' - y' = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = -1;\ y''(0) = 1.$

3.4.24. $y^{(4)} - y = 8e^{2x};\ y(0) = -1;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = 1;\ y'''(0) = 0.$

3.4.25. $y''' - y = 2x;\ y(0) = y'(0) = 0;\ y''(0) = 2.$

3.4.26. $y''' - y' = -2x;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1;\ y''(0) = 2.$

3.4.27. $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x);\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = -1.$

3.4.28. $y''' - 3y' = 3(2 - x^2);\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$

3.4.29. $y''' + 2y'' + 2y' + y = x;\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

3.4.30. $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x};\ y(0) = 2;\ y'(0) = 1;\ y''(0) = 1.$

4 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1 Нормальная система дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{4.1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные функции независимой переменной t, называется *нормальной системой*. В некоторых случаях нормальная система может быть сведена к одному уравнению n-го порядка.

***Пример* 4.1.1.** Решить систему уравнений методом исключения неизвестных:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Найти частное решение системы, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 3;\ y(0) = 1$.

Решение. Продифференцируем первое уравнение системы по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}. \tag{4.2}$$

Подставим в (4.2) значение $\dfrac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4y. \tag{4.3}$$

Теперь из первого уравнения найдем y и подставим его в (4.3):

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4\left(\frac{dx}{dt} - 2x\right).$$

Отсюда

$$\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}+5x=0.$$

Получилось однородное линейное уравнение второго порядка. Находим его общее решение $x=C_1e^t+C_2e^{5t}$. Отсюда дифференцированием получаем

$$\frac{dx}{dt}=C_1e^t+5C_2e^{5t}.$$

Подставляем значения x и $\frac{dx}{dt}$ в (4.3):

$$y=C_1e^t+5C_2e^{5t}-2(C_1e^t+C_2e^{5t})=-C_1e^t+3C_2e^{5t}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{5t}; \\ y=C_1e^t+3C_2e^{5t}. \end{cases}$$

Найдем теперь частное решение системы, для чего подставим в общее решение значение $t=0$. Получим

$$\begin{cases} 3=C_1+C_2; \\ 1=-C_1+3C_2, \end{cases}$$

откуда находим $C_1=2; C_2=1$. Подставляя значения произвольных постоянных в общее решение, получим частное решение

$$\begin{cases} x=\ \ 2e^t+e^{5t}; \\ y=-2e^t+3e^{5t}. \end{cases}$$

Найти общие решения систем:

4.1.1. $\begin{cases} x'=4x-2y; \\ y'=3x-y. \end{cases}$ 4.1.2. $\begin{cases} x'=7x+3y; \\ y'=6x+4y. \end{cases}$

4.1.3. $\begin{cases} x'=2x+y; \\ y'=4y-x. \end{cases}$ 4.1.4. $\begin{cases} x'=x+y; \\ y'=3y-2x. \end{cases}$

Найти частные решения:

4.1.5. $\begin{cases} x'=x-y; \\ y'=y-4x; \end{cases}$ 4.1.6. $\begin{cases} x'=3x+5y; \\ y'=-2x-8y; \end{cases}$

$$x(0)=2,\ y(0)=0. \qquad\qquad x(0)=2,\ y(0)=5.$$

4.2 Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и ее решение с помощью характеристического уравнения

Пусть дана нормальная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y; \\ y' = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{4.4}$$

Решение системы будем искать в виде

$$x = \alpha e^{\lambda t};\ \ y = \beta e^{\lambda t}. \tag{4.5}$$

Подставив значения x и y в систему (4.4), получим

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0; \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Чтобы эта система имела ненулевое решение, ее определитель должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{11}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.7}$$

Из этого характеристического уравнения находим два корня: λ_1 и λ_2. В случае, когда эти корни вещественны и различны, подставим их в (4.6) и для λ_1 находим решение α_1 и β_1, а для λ_2 – решение α_2 и β_2. Получаем два частных решения:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}; \\ y_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 t}; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}; \\ y_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Общее решение системы (4.6) запишется в виде

$$\begin{cases} x = C_1x_1 + C_2x_2; \\ y = C_1y_1 + C_2y_2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}; \\ y = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

***Пример* 4.2.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Замечание. Эта система решена методом исключения неизвестных в подразделе 4.1.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0;\ \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 5$. Подсавляя $\lambda_1 = 1$ в систему (4.6), получим

$$\begin{cases} (2-1)\alpha + \beta = 0; \\ 3\alpha + (4-1)\beta = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0; \\ 3\alpha + 3\beta = 0. \end{cases}$$

Одному из неизвестных даем произвольное значение, например, $\alpha = 1$, тогда $\beta = -1$. Итак, мы получили первую пару значений: $\alpha_1 = 1; \beta_1 = -1$. Ей соответствует частное решение системы $x_1 = e^t;\ y_1 = -e^t$. Аналогично для $\lambda_2 = 5$ найдем $\alpha_2 = 1; \beta_2 = 3$. Этой паре значений соответствует частное решение $x_2 = e^{5t};\ y_2 = 3e^{5t}$. Общее решение запишется в виде

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}; \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

Решить следующие системы уравнений:

4.2.1. $\begin{cases} x' = 4x + 3y; \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

4.2.2. $\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

4.2.3. $\begin{cases} x' = x + 3y; \\ y' = 6x + 4y, \end{cases}$
$x(0) = 6,\ y(0) = 1.$

4.2.4. $\begin{cases} x' = x - 2y; \\ y' = 4x + 7y, \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = 3.$

5 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1 Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

5.1.1 Способ последовательного дифференцирования

Этот способ состоит в том, что частное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения ищется в виде разложения в степенной ряд Тейлора:

$$y = y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$$

Коэффициенты этого ряда отыскиваются из начальных условий и путем последовательного дифференцирования данного дифференциального уравнения.

***Пример* 5.1.1.** Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения уравнения $y' = 2xy^2$, $y(1) = 1$.

Решение. Ищем решение уравнения в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$:

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots.$$

Первый коэффициент ряда известен из начального условия. Подставляя в дифференциальное уравнение $x = 1$, находим $y'(1) = 2 \cdot 1 \cdot 1^2 = 2$. Для отыскания y'' дифференцируем обе части дифференциального уравнения:

$$y'' = 2y^2 + 4xyy'.$$

При $x = 1$ получаем $y''(1) = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 = 10$. Подставим значения производных в степенной ряд, получим приближенное решение дифференциального уравнения в виде частичной суммы ряда:

$$y \approx 1 + 2(x-1) + 5(x-1)^2.$$

5.1.2 Способ неопределенных коэффициентов

По этому способу частное решение дифференциального уравнения ищется в виде разложения в степенной ряд с неопределенными коэффициентами:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots .$$

Коэффициенты находят подстановкой ряда в дифференциальное уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $x - x_0$ в обеих частях полученного равенства.

***Пример* 5.1.2.** Проинтегрировать уравнение $y'' - xy = 0$.

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Дифференцируем этот ряд:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots ;$$

$$y'' = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots .$$

Подставляя y и y'' в исходное уравнение, получаем

$$2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots -$$

$$-x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right) \equiv 0 .$$

Соберем члены с одинаковыми степенями x:

$$2a_2 + (3 \cdot 2 a_3 - a_0)x + (4 \cdot 3 a_4 - a_1)x^2 + \ldots + \left(n(n-1)a_n - a_{n-3}\right) + \ldots \equiv 0.$$

Приравниваем нулю все коэффициенты полученного ряда:

$$a_2 = 0, 3 \cdot 2 a_3 - a_0 = 0, \ldots, n(n-1) a_n - a_{n-3} = 0, \ldots .$$

Последовательно находим все коэффициенты искомого разложения (a_0 и a_1 остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных интегрирования):

$$a_2 = 0, a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3}, a_5 = \frac{a_2}{5 \cdot 4} = 0, a_6 = \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \ldots .$$

Таким бразом, общее решение уравнения имеет вид

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{a_1}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} x^6 + \ldots =$$

$$= a_0\left(1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \ldots\right).$$

В следующих уравнениях найти первые четыре члена разложения в ряд решения дифференциального уравнения:

5.1.1. $y' = xy + e^y$; $y(0) = 0$.

5.1.2. $y' = x^2 + y^3$; $y(1) = 1$.

5.1.3. $y'' = xy' - y + e^x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

5.1.4. $y'' = xy^2 - y'$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$.

6 САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

6.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Определить, к какому виду относятся указанные по вариантам (В) уравнения; указанное уравнение решить.

В1. 1. $y' + xy = x^2$.

2. $(x^2 y + x^2 \cos y)dx + e^x y dy = 0$.

3. $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$.

4. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$.

Решить однородное уравнение.

В2. 1. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$.

2. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$.

3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

4. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.

Решить уравнение с разделяющимися переменными.

В3. 1. $y' \cos x = \dfrac{y}{\ln y}$.

2. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{x^2}$.

3. $y' = \dfrac{x}{y}\left(e^{\frac{y}{x}} + 1\right)$.

4. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$.

Решить уравнение Бернулли.

В4. 1. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$.

2. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$.

3. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1+e^x)\sec^2 y dy = 0$.

4. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Решить линейное уравнение.

В5. 1. $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$.

2. $xyy' + x^2 - 1 = 0$.

3. $xyy' = y^2 + 2x^2$.

4. $y' + xy = \sqrt{y}$.

Решить линейное уравнение.

В6. 1. $x^2 y' + xy = 1$.

2. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

3. $(xy^2 + y^2)dy + \left(x^2 - x^2 y\right)dx = 0$.

4. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

Решить линейное уравнение.

В7. 1. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \cdot y' = 0$.

2. $xy' + 2y = x^3$.

3. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$.

4. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^4$.

Решить линейное уравнение.

В8. 1. $\operatorname{tg} x dy-(1+y)dx=0.$

2. $y'x+y=-xy^2.$

3. $(y-x)ydx+x^2dy=0.$

4. $y'-\dfrac{y}{x}=3x.$

Решить уравнение Бернулли.

В9. 1. $y'+xy=x.$

2. $(1+y^2)y'-y=0.$

3. $y'=\dfrac{y}{x}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}.$

4. $y'+y=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}.$

Решить однородное уравнение.

В10. 1. $y'+2xy=e^{-x^2}.$

2. $x(1+y^2)+y(1+x^2)y'=0.$

3. $(y^2-x^2)dx+2xydy=0.$

4. $y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{y^2}{x^2}.$

Решить линейное уравнение.

6.2 Дифференциальные уравнения первого порядка, сводящиеся к квадратурам

Найти общее решение дифференциального уравнения:

В1. 1. $\left(1+e^x\right)y'=ye^x.$

2. $\left(y-\sqrt{xy}\right)dx=xdy.$

3. $y'-6y=8xe^{6x}.$

В2. 1. $ydx+\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy=0.$

2. $xy'+y=xy^2\ln x.$

3. $xy'=5y+x.$

В3. 1. $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$.

2. $y' - xy^2 = 2xy$.

3. $2x\cos^2 y dx + \left(8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$.

В4. 1. $y' + \dfrac{y}{x} = 1 + 2\ln x$.

2. $(2xy - 3)dx + \left(x^2 + 1\right)dy = 0$.

3. $(y-1)^2 dx + (1-x)^3 dy = 0$.

В5. 1. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

2. $\left(1 + x^2\right)y' = xy - y\sqrt{1+x^2}$.

3. $xy' = y + x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

В6. 1. $\left(x^2 + y - 4\right)dx + \left(x + y + e^y\right)dy = 0$.

2. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$.

3. $y' - 7y = 8e^{2x}$.

В7. 1. $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$.

2. $(xy' - y)\sin\dfrac{y}{x} = x$.

3. $\ln x \cdot \sin^3 y dx + x\cos y dy = 0$.

В8. 1. $y' - 7y = 8e^{3x}$.

2. $\left(4x^2 - 3xy - y^2\right)dx + x^2 dy = 0$.

3. $\left(e^{x-y} - e^{-y}\right)dx + \left(e^{x+y} + e^x\right)dy = 0$.

В9. 1. $\left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy = 0$.

2. $y' = 2 + \dfrac{y}{x}$.

3. $\left(1 + x^2\right)y' = xy - y\sqrt{1+x^2}$.

В10. 1. $y' = \dfrac{y - 3x^2}{4y - x}$.

2. $y^2 dx = \left(x^2 - xy\right) dy = 0$.

3. $\sin^2 y \cdot \operatorname{ctg} x dx + \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} y dy = 0$.

6.3 Дифференциальные уравнения высших порядков

В задаче 1 проверить, что данная функция служит решением дифференциального уравнения; в задаче 2 указать тип уравнения и метод понижения порядка; в задаче 3 найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

В1. 1. $y = e^x (x - 1),\ xy'' - y' = e^x x^2$.

2. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$.

3. $y'' = x \ln x,\ y(1) = y'(1) = 0$.

В2. 1. $y = \operatorname{arctg} x,\ y'' + 2x(y')^2 = 0$.

2. $y(1 - \ln y) y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$.

3. $y'' = xe^x,\ y(0) = y'(0) = 0$.

В3. 1. $y = x(\ln x - 1),\ y'' x \ln x - y' = 0$.

2. $4y' + (y'')^2 = 4xy''$.

3. $y'' = \dfrac{1}{1 + x^2},\ y(0) = y'(0) = 0$.

В4. 1. $y = \dfrac{\sin x}{x},\ y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = 0$.

2. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

3. $y'' = \dfrac{x}{x + 1},\ y(0) = y'(0) = 0$.

В5. 1. $y = \dfrac{1}{2} x \ln^2 x,\ y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0$.

2. $\dfrac{y''}{y'} - \dfrac{2yy'}{1 + y^2} = 0$.

3. $y''=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

В6. 1. $y=e^{x^2}$, $xyy''-x(y')^2-yy'=0$.

2. $x^2y''+xy'=1$.

3. $y''=\dfrac{1}{x}$, $y(1)=0,\ y'(1)=1$.

В7. 1. $y=\arcsin^2 x$, $(1-x^2)y''-xy'=2$.

2. $y'+xy''=2yy'$.

3. $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

В8. 1. $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $2yy''-3(y')^2-4y^2=0$.

2. $x^2y''+xy'=\cos x$.

3. $y''=\dfrac{2x+1}{x}$, $y(1)=y'(1)=2$.

В9. 1. $y=e^{\frac{x+1}{x}}$, $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)(y')^2=0$.

2. $y'+xy''=y+xy'$.

3. $y''=\dfrac{x-1}{x}$, $y(1)=y'(1)=0$.

В10. 1. $y=2\ln x$, $y''+(y')^2=2e^{-y}$.

2. $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$.

3. $y''=-\dfrac{1}{1+x^2}$, $y(0)=y'(0)=0$.

6.4 Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

В задаче 1 найти частное решение дифференциального уравнения, а в задачах 2 и 3 – общее решение.

В1. 1. $y''=x+\sin x$, $y(0)=-3$, $y'(0)=0$.

2. $\left(1-x^2\right)y''-xy'=2.$

3. $y''+2y\left(y'\right)^3=0.$

B2. 1. $y''=\cos^2 x,\ y(0)=1,\ y'(0)=-\dfrac{1}{8}.$

2. $x^3y''+x^2y'=1.$

3. $2yy''=\left(y'\right)^2.$

B3. 1. $y''=\cos x+e^{-x},\ y(0)=-e^{-\pi},\ y'(0)=-1.$

2. $y''x\ln x-y'=0.$

3. $yy''=\left(y'\right)^2-\left(y'\right)^3.$

B4. 1. $y''=e^{-3x}-x,\ y(0)=\dfrac{1}{9},\ y'(0)=1.$

2. $2xy'y''=\left(y'\right)^2-1.$

3. $2yy''=\left(y'\right)^2+1.$

B5. 1. $y''=\cos 4x,\ y(0)=\dfrac{1}{16},\ y'(0)=1.$

2. $y''\operatorname{tg}x-y'-1=0.$

3. $yy''+\left(y'\right)^2=0.$

B6. 1. $y''=\dfrac{1}{x^2},\ y(1)=3,\ y'(1)=1.$

2. $y''=\dfrac{y'}{x}+x.$

3. $y''+\dfrac{2\left(y'\right)^2}{1-y}=0.$

B7. 1. $y''=4\cos 2x,\ y(0)=1,\ y'(0)=3.$

2. $x^4y''+x^3y'=1.$

3. $yy''-2\left(y'\right)^2=0.$

B8. 1. $y''=\dfrac{6}{x^3},\ y(1)=0,\ y'(1)=5.$

2. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$.

3. $yy'' = (y')^2$.

В9. 1. $y'' = e^{\frac{x}{2}} + 1,\ y(0) = 8,\ y'(0) = 5.$

2. $x(y''+1) + y' = 0.$

3. $(y')^2 + 2yy'' = 0.$

В10. 1. $y'' = x^2 - \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

2. $2xy''y' = (y')^2 - 4.$

3. $\dfrac{y''}{y'} - \dfrac{2yy'}{1+y^2} = 0.$

6.5 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В задачах 1 и 2 найти общее решение дифференциального уравнения, а в задаче 3 – частное решение.

В1. 1. $y'' + y' - 12y = 0.$

2. $y'' + 6y' + 13y = 0.$

3. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 5.$

В2. 1. $y'' + 6y' + 9y = 0.$

2. $y'' + 4 = 0.$

3. $y'' - 6y' + 8y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6.$

В3. 1. $y'' - y' - 12y = 0.$

2. $y'' - 6y' + 10y = 0.$

3. $y'' - 8y' + 16y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6.$

В4. 1. $y'' - 10y' + 25y = 0.$

2. $y'' - 3y' - 10y = 0.$

3. $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$

В5. 1. $y'' + 3y' - 10y = 0.$

2. $y'' + 8y' + 25y = 0.$

3. $y'' + 3y' = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -3.$

В6. 1. $2y'' - 7y' - 4y = 0.$

2. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

3. $y'' - 4y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0.$

В7. 1. $y'' + 2y = 0.$

2. $y'' + 4y' + 20y = 0.$

3. $y'' - 4y' = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 8.$

В8. 1. $3y'' - 17y' - 6y = 0.$

2. $y'' + 16y = 0.$

3. $y'' - y' = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 3.$

В9. 1. $y'' + 6y' + 25y = 0.$

2. $y'' - 3y' - 10y = 0.$

3. $y'' + 2y' = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = -6.$

В10. 1. $y'' - 2y' + y = 0.$

2. $y'' + 8y' + 20y = 0.$

3. $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$

6.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

В задаче 1 найти общее решение уравнения, в задаче 2 записать вид частного решения с неопределенного коэффициентами, в задаче 3 составить линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, если известны корни характеристического уравнения, и написать его общее решение.

В1. 1. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

2. $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x.$

3. $k_1 = 1 - 2i,\ k_2 = 1 + 2i.$

В2. 1. $y'' + 4y' + 5y = 0.$

2. $y'' - 4y' + 4y = x \sin 2x.$

3. $k_1 = -3,\ k_2 = 4.$

В3. 1. $2y'' - y' - 6y = 0.$

2. $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}.$

3. $k_1 = k_2 = 5.$

В4. 1. $y'' + 2y' + 5y = 0.$

2. $y'' + y' - 12y = x^2 e^{3x}.$

3. $k_1 = -3, k_2 = 5.$

В5. 1. $y'' - 4y' = 0.$

2. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x.$

3. $k_1 = -3, k_2 = -1.$

В6. 1. $4y'' + 7y' - 2y = 0.$

2. $y'' + 5y' = x^2 - 1.$

3. $k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i.$

В7. 1. $y'' - 6y' + 9y = 0.$

2. $y'' + 3y' - 4y = xe^x.$

3. $k_1 = 0, k_2 = 3.$

В8. 1. $y'' - 3y' - 4y = 0.$

2. $y'' + 2y' = x^3 - 5.$

3. $k_1 = -\dfrac{1}{2}, k_2 = 4.$

В9. 1. $y'' - 6y' + 13y = 0.$

2. $y'' + y' - 6y = x \cos 2x.$

3. $k_1 = k_2 = 5.$

В10. 1. $2y'' + y' - 6y = 0.$

2. $y'' - 3y' = 2x - x^2.$

3. $k_1 = 4 + i, k_2 = 4 - i.$

6.7 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В задаче 1 найти частное решение дифференциального уравнения, в задачах 2 и 3 найти общее решение.

В1. 1. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

2. $y'' - y' - 6y = 9\cos x - \sin x.$

3. $y'' + y' - 12y = (16x + 26)e^{4x}.$

В2. 1. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4.$

2. $y'' + 3y' + 2y = \cos x - 3\sin x.$

3. $y'' + 3y' - 4y = 3xe^{-4x}.$

В3. 1. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

2. $y'' - 2y' + y = -12\cos x - 9\sin 2x.$

3. $y'' - 6y' + 9y = (x - 2)e^{3x}.$

В4. 1. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

2. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x.$

3. $y'' - 2y' + 2y = (2x - 3)e^{4x}.$

В5. 1. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$

2. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x.$

3. $y'' - 4y' + 5y = -2xe^{x}.$

В6. 1. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3,2.$

2. $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x.$

3. $y'' + 3y' + 2y = (3x - 7)e^{-x}.$

В7. 1. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,\ y(0) = \dfrac{4}{3},\ y'(0) = \dfrac{1}{27}.$

2. $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x.$

3. $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}.$

В8. 1. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5,\ y(0) = 8,\ y'(0) = -4.$

2. $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x.$

3. $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^{x}.$

В9. 1. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$

2. $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x.$

3. $y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^{3x}.$

В10. 1. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

2. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x.$

3. $y'' + y' - 6y = (6x+1)e^{3x}.$

6.8 Системы дифференциальных уравнений

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений (двумя способами):

В1. $\begin{cases} x' = 5x - y; \\ y' = 3x - 3y. \end{cases}$

В2. $\begin{cases} x' = 3x + y; \\ y' = -4x - 2y. \end{cases}$

В3. $\begin{cases} x' = 3x - 2y; \\ y' = 5x - 4y. \end{cases}$

В4. $\begin{cases} x' = 5x - 2y; \\ y' = 7x - 4y. \end{cases}$

В5. $\begin{cases} x' = x - 2y; \\ y' = x + 4y. \end{cases}$

В6. $\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$

В7. $\begin{cases} x' = 4x - 2y; \\ y' = 3x - y. \end{cases}$

В8. $\begin{cases} x' = 2x - 4y; \\ y' = x - 3y. \end{cases}$

В9. $\begin{cases} x' = x + y; \\ y' = 4x + y. \end{cases}$

В10. $\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 4x - y. \end{cases}$

7 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

В задачах 1, 3, 4 найти общие интегралы дифференциальных уравнений, в 2, 5 – частные решения, в 6 – указать вид частного решения (неопределенные коэффициенты не находить).

В1. 1. $(1+e^x)yy' = e^x.$

2. $y' + 2xy = 2x,\ y(0) = 2.$

3. $y''\operatorname{tg} x = y' + 1.$

4. $y''' = -x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x.$

5. $y'' + 16y = (34x+13)e^{-x},$
$y(0) = y'(0) = 0.$

6. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = xe^{-x}.$

В2. 1. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0.$

2. $y' + \frac{y}{x+1} = 6x,\ y(0) = 2.$

3. $xy'' + 2y' = 0.$

4. $y''' = e^{2x} - 3\cos 3x.$

5. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5,$
$y(0) = y'(0) = 1.$

6. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = \sin 2x.$

В3. 1. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

2. $xy' + y = e^{-x}$, $y(1) = -\dfrac{1}{e}$.

3. $x(y'' + 1) + y' = 0$.

4. $y''' = \dfrac{1}{x^3} - \sin 2x$.

5. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$,
$y(0) = y'(0) = -2$.

6. $y^{(4)} - y = \cos x$.

В4. 1. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$.

2. $y' - 3x^2 y = x^2$, $y(0) = 0$.

3. $y'' y^3 = 1$.

4. $y''' = \dfrac{3}{x^4} - \cos\dfrac{1}{2}x$.

5. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$,
$y(0) = y'(0) = 2$.

6. $y''' + y' = x\cos x$.

В5. 1. $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$.

2. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{xy}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x^2}$, $y(0) = 0$.

3. $y'' x\ln x - y' = 0$.

4. $y''' = e^{-2x} + \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

5. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

6. $y^{(4)} + y'' = x^3$.

В6. 1. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

2. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \cdot y' = 0$, $y(0) = -2$.

3. $y''(2y - 1) + 2(y')^2 = 0$.

4. $y''' = 2\sin\dfrac{x}{2} - \cos x$.

5. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

6. $2y^{(4)} + 4y''' = xe^{2x}$.

В7. 1. $x^2 y' + xy = 1$.

2. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$, $y(1) = 0$.

3. $y''(x - 1) - y' = 0$.

4. $y''' = x + \sin 2x.$

5. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0; \ y'(0) = 1.$

6. $y''' - y' = e^x \sin x.$

В8. 1. $y'x + y = -xy^2.$

2. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}, \ y(1) = 1.$

3. $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0.$

4. $y^{(4)} = 1 - \cos\dfrac{x}{2}.$

5. $y'' + 25y = 0, \ y(0) = 1; \ y'(0) = 0.$

6. $y^{(4)} - y'' = (x + 1)e^x.$

В9. 1. $\operatorname{tg} x dy - (1 + y)dx = 0.$

2. $y' + 2\dfrac{y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}, \ y(0) = 0.$

3. $yy'' - (y')^2 = 0.$

4. $y''' = 2 - x + e^x.$

5. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2; \ y'(0) = 1.$

6. $y''' + y' = x \sin 2x.$

В10. 1. $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2 y)dy = 0.$

2. $xy' + 2y = x^3, \ y(-1) = 1.$

3. $y''(3y - 1) - 3(y')^2 = 0.$

4. $y^{(4)} = e^{2x} - 1.$

5. $y'' + 5y' + 6y = 0, \ y(0) = 1; \ y'(0) = 6.$

6. $2y''' - 3y'' = x \cos x.$

В11. 1. $y' \sin x = y \ln y.$

2. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x, \ y(1) = 1.$

3. $yy'' - (y')^2 = 0.$

4. $y''' = 12x - \sin 2x.$

5. $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 2; \ y'(0) = 1.$

6. $y^{(4)} + y''' = \cos x.$

В12. 1. $y' - \dfrac{y}{x} = -x.$

2. $y^2 + x^2 y' = xyy',\ y(3) = 4.$

3. $y'' = 4y'.$

4. $y^{(4)} = 16e^{2x} - 24x^2 + 36.$

5. $y'' + 6y' + 9y = 0,\ \ y(0) = -2;\ y'(0) = 5.$

6. $y''' + y'' + y' + y = xe^x.$

В13. 1. $(1 + y^2)dx + xydy = 0.$

2. $y' - \dfrac{2x}{1+x^2} y = 0,\ y(1) = 2.$

3. $2xy'' = y'.$

4. $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}.$

5. $3y'' + 7y' - 6y = 0,\ \ y(0) = 4;\ y'(0) = -1.$

6. $y''' - y'' + y' - y = xe^x.$

В14. 1. $y' + 2xy = 2x^3 y^3.$

2. $2x^2 dy = (x^2 + y^2)dx,\ y(-1) = 1.$

3. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$

4. $y''' = 27e^{3x} + 120x^3.$

5. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 2;\ y'(0) = 3.$

6. $y''' + y'' = x^2 - 4.$

В15. 1. $(1 + y^2)dx = xdy.$

2. $y' + y = e^x,\ y(0) = 1.$

3. $x^2 y'' + xy' = 1.$

4. $y''' = 24x^2 - \cos 2x.$

5. $y'' + 2y' - 8y = 0,\ \ y(0) = 0;\ y'(0) = 12.$

6. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = xe^{-x}.$

ОТВЕТЫ

1.2.1 $\frac{x+y}{xy}+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C.$ **1.2.2** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|y^2-4\right|=C.$

1.2.3 $x^2+y^2=2\ln|Cx|.$ **1.2.4** $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.$

1.2.5 $y^3=3\left(x^2+x+C\right).$ **1.2.6** $x+y+\ln x-\frac{y^2}{2}+C=0.$

1.2.7 $x^2=2+2y^2.$ **1.2.8** $y=e^{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}x}.$ **1.2.9** $2(x-2)=\ln^2 y.$

1.2.10 $y^2-x^2=12.$ **1.2.11** $y=\sqrt{\ln^3\left|1-x^2\right|}.$

1.2.12 $\operatorname{tg}y=1-x+\operatorname{tg}x.$ **1.2.13** $y=\frac{1}{2-x}.$ **1.2.14** $s=-2t^3+2t^2+6.$

1.3.1 $\ln\left(x^2+y^2\right)=C-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$ **1.3.2** $x(y-x)=Cy; y=0.$

1.3.3 $\sin\frac{y}{x}=Cx.$ **1.3.4** $Cx=e^{-\frac{2x}{y-x}}.$ **1.3.5** $\ln|Cx|=e^{-\frac{y}{x}}.$

1.3.6 $\ln|Cx|=-e^{-\frac{y}{x}}.$ **1.3.7** $y-x=Cx^2.$ **1.3.8** $y=\frac{4x}{\ln x+C}.$

1.3.9 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=Cx.$ **1.3.10** $\ln\frac{y^2}{x}=C-\frac{y}{x}.$ **1.3.11** $y^2=2x^2\ln x+x^2.$

1.3.12 $\sin\frac{y}{x}+\ln x=0.$ **1.3.13** $y=x-2x^3.$ **1.3.14** $\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2.$

1.3.15 $y=3x^2-2x.$ **1.3.16** $\left(2y^2-x^2\right)^3=Cx^2.$

1.3.17 $(y+2)^2=C(x+y-1); y=1-x.$

1.3.18 $(y-x+2)^2+2x=C.$ **1.3.19** $(y-x+5)^5\cdot(x+2y-2)=C.$

1.4.1 $y=\frac{x^2}{4}+\frac{C}{x^2}.$ **1.4.2** $y=Ce^{7x}-2e^{3x}.$ **1.4.3** $y=x(3x+C).$

1.4.4 $y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x).$ **1.4.5** $y=\frac{x^3}{2}+Cx.$

1.4.6 $y=e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3+C\right)$. **1.4.7** $y=Cy+y^2$. **1.4.8** $xy=e-\ln x$.

1.4.9 $y=x(\sin x+C)$. **1.4.10** $y=\left(1+x^2\right)(x+C)$.

1.4.11 $y=-\cos x$. **1.4.12** $y=\frac{x}{\cos x}+1$. **1.4.13** $y=1$.

1.4.14 $y=\frac{x-1}{x^2}$. **1.4.15** $y=-x^2$. **1.4.16** $i=\frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{R}{L}t}\right)$.

1.4.17 $y=-4x+C_1x^2$. **1.4.18** $y=-\frac{1}{x^2}+\frac{C}{x}$. **1.4.19** $y=xe^{-x+C}$.

1.4.20 $y=\ln x+\frac{C}{x}$.

1.5.1 $y=\left(e^x+Ce^{2x}\right)=1;\ y=0$. **1.5.2** $y=\frac{x-1}{C-x}$.

1.5.3 $2y^2(x+C)=e^{x^2}$. **1.5.4** $y=\frac{1}{x\ln|Cx|}$.

1.5.5 $\frac{1}{y}=x\left(C-\frac{1}{2}\ln^2 x\right)$. **1.5.6** $xy=1;\ x=y(x-2)^2$.

1.6.1 $x^2+x^3y-y^3=C$. **1.6.2** $x^2-3x^3y^2+y^4=C$.

1.6.3 $e^x+xy+x\sin y+e^y=C$. **1.6.4** $\frac{1}{2}x^2+x\sin y-\cos y=C$.

1.6.5 $xy+e^x\sin y=C$. **1.6.6** $\frac{1}{3}x^3+xy^2+xy+e^y=1$.

1.6.7 $xe^{-y}-y^2=C$. **1.6.8** $x^2y^3+4xy=C$.

1.6.9 $x^3e^y-ye^{-x}+\ln|\sin y|=C$. **1.6.10** $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=0$.

1.7.23 $2\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln\frac{C}{x}$. **1.7.24** $\ln\frac{y}{x}+4=Cx$. **1.7.25** $y=(x+C)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

1.7.26 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\ln\frac{y}{Cx}$. **1.7.27** $y=\frac{C\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

1.7.28 $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=\ln\dfrac{x}{4}+1$. **1.7.29** $y=x^2e^{6x}$. **1.7.30** $x^2y^3+4yx=C$.

1.7.31 $y^2x+e^x\cos y-\cos y=C$. **1.7.32** $x=Cy+\dfrac{2}{y}$.

2.2.1 $y=-\dfrac{1}{2x}+C_1x+C_2$. **2.2.2** $y=-\dfrac{1}{9}\sin 3x+C_1x+C_2$.

2.2.3 $y=x\ln x-x+C_1x+C_2$. **2.2.4** $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+C_1x+C_2$.

2.2.5 $y=\dfrac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$. **2.2.6** $y=-\dfrac{2}{25}\cos 5x+C_1x+C_2$.

2.2.7 $y=-\ln|\cos x|+x+2$. **2.2.8** $y=\dfrac{1}{2}x^2+x+1$. **2.2.9** $y=-\ln|x|$.

2.2.10 $y=3\ln|x|+x+1$.

2.3.1 $y=-\dfrac{C_1}{x}+C_2$. **2.3.2** $y=\dfrac{1}{2}\ln^2|x|+C_1\ln|x|+C_2$.

2.3.3 $y=\ln\left|e^{2x}+C_1\right|-x+C_2$. **2.3.4** $y=C_1\left(x-e^{-x}\right)+C_2$.

2.3.5 $y=(1+C_1)^2\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$.

2.3.6 $y=\dfrac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2$. **2.3.7** $y=\dfrac{1}{2}x^2$. **2.3.8** $y=\dfrac{2}{3}x^2\sqrt{2x}$.

2.3.9 $y=\dfrac{1}{x}-1$. **2.3.10** $y=(x-1)^3-x$. **2.3.11** $y=x^3+3x$.

2.3.12 $y=2+\ln\dfrac{x^2}{4}$. **2.3 13** $y=x^2+1$. **2.3.14** $y=\dfrac{1}{1-x}$.

2.4.1 $1+C_1y^2=(C_1x+C_2)^2$. **2.4.2** $y=\pm\sqrt{x^2+C_1x+C_2}$.

2.4.3 $y=C_1e^{C_2x}+\dfrac{1}{C_2}$. **2.4.4** $2\sqrt{y}-2C_1\ln\left|C_1+\sqrt{y}\right|=x+C_2$.

2.4.5 $y=x^2+1$. **2.4.6** $2y^2-4x^2=1$.

2.5.1 $y=\dfrac{1}{2}x^2+C_1\ln|x|+C_2$. **2.5.2** $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x}$.

2.5.3 $y=\ln|x|-\dfrac{C_1}{x}+C_2$. **2.5.4** $y=\pm\sqrt{(x+C_1)^3}+C_2$.

3.1.1 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-4x}$. **3.1.2** $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$.

3.1.3 $y=e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$. **3.1.4** $y=C_1+C_2e^{-4x}$.

3.1.5 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$. **3.1.6** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

3.1.7 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{\frac{x}{3}}$. **3.1.8** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$.

3.1.9 $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$. **3.1.10** $y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

3.1.11 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{0,4x}$. **3.1.12** $y=C_1+C_2e^{-3x}$.

3.1.13 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. **3.1.14** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

3.1.15 $y=3e^{2x}-3e^{-3x}$. **3.1.16** $y=2e^{4x}-3xe^{4x}$.

3.1.17 $y=e^{x}+2e^{-x}$. **3.1.18** $y=2\cos 2x$.

3.1.19 $y''-2y'-8y=0$; $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}$.

3.1.20 $y''-10y'+25y=0$; $y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}$.

3.1.21 $y''-6y'+34y=0$; $y=e^{3x}\left(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x\right)$.

3.1.22 $y''-9y=0$; $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

3.1.23 $y''-4y'+4y=0$; $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

3.1.24 $y''+4y'+20y=0$.

3.2.1 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{5}e^{4x}$. **3.2.2** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+xe^{x}$.

3.2.3 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}+\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x\right)e^{x}$.

3.2.4 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-2x}+\left(\dfrac{1}{16}x-\dfrac{1}{32}\right)e^{2x}$.

3.2.5 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-2x\cos 2x$.

3.2.6 $y=e^{-x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+0,5xe^{-x}\sin x$.

3.2.7 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-5x}+2x^2e^{-5x}$.

3.2.8 $y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+0,25xe^{-x}\sin 2x$.

3.2.9 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2\sin x$.

3.2.10 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}-\left(0,5x^2+x\right)e^{x}$.

3.2.11 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\left(2x-2\right)e^{x}$.

3.2.12 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x.$

3.2.13 $y=C_1+C_2e^{-x}+\left(2x^2-6x+7\right)e^{x}.$

3.2.14 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{3x}+e^{x}\left(4\cos x+3\sin x\right).$

3.2.15 $y=C_1+C_2e^{-8x}+0,5x^2-0,125x.$

3.2.16 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}-4,5xe^{-3x}.$

3.2.17 $y=\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)e^{-2x}+5xe^{-2x}\sin x.$

3.2.18 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-2x}+4x^2e^{-2x}.$

3.2.19 $y=C_1+C_2e^{-4x}+\left(\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{8}x\right)e^{-4x}.$

3.2.20 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-0,05e^{-2x}\left(2\cos 2x+\sin 2x\right).$

3.2.21 $y=\cos 2x+\dfrac{1}{3}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin x.$

3.2.22 $y=e^{2x}+e^{x}\left(-x^2-x+1\right).$

3.2.23 $y=-\cos x-\dfrac{1}{3}\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 2x.$ **3.2.24** $y=e^{x}+x^2.$

3.2.25 $y=e^{2x}\left(x^2+3x\right)-\dfrac{1}{3}e^{2x}+\dfrac{1}{3}e^{-4x}.$

3.2.26 $y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+e^{x}\left(Ax^2+Bx+C\right).$

3.2.27 $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}+e^{4x}x\left(Ax+B\right).$

3.2.28 $y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}+e^{4x}x^2\left(Ax^2+Bx+C\right).$

3.2.29 $y=e^{3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+xe^{3x}\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right).$

3.2.30 $y=C_1+C_2e^{2x}+x\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right).$

3.2.31 $y=C_1+C_2e^{-3x}+x\left(Ax^2+Bx+C\right)+\mathrm{e}^{-3x}\left(\left(Dx+E\right)\cos x+\right.$

$\left.+\left(Fx+H\right)\sin x\right).$ **3.2.32** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+x\left(Ax^2+Bx+C\right)\mathrm{e}^{x}.$

3.2.33 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\left(Ax+B\right)\cos 3x+\left(Dx+E\right)\sin 3x.$

3.2.34 $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+Ax^2e^{2x}+B\cos 2x+C\sin 2x.$

3.2.35 $y=e^{-x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+xe^{x}\left(A\cos x+B\sin x\right).$

3.2.36 $y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + xe^x\left(A\cos x + B\sin x\right).$

3.2.37 $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{-x}.$

3.2.38 $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + e^{3x}\left(A\cos x + B\sin x\right).$

3.2.39 $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \left(Ax + B\right)\cos x + \left(Cx + D\right)\sin x.$

3.2.40 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + Ae^{2x} + B\cos 2x + C\sin 2x.$

3.3.1 $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|.$

3.3.2 $y = C_1e^x + C_2xe^x + xe^x\ln|x|.$

3.3.3 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \dfrac{1}{2}x\sin x.$

3.3.4 $y = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} - \dfrac{1}{x}.$

3.3.5 $y = \left(\dfrac{1}{2}x^2\ln|x| - \dfrac{3}{4}x^2 + C_1 + C_2x\right)e^{-2x}.$

3.3.6 $y = \left(C_1 + \ln|\sin x|\right)\sin x + \left(C_2 - x\right)\cos x.$

3.3.7 $y = \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\left(e^x + 1\right) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$

3.3.8 $y = \sin 2x\ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x.$

3.3.9 $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + 0{,}5e^{-2x}\ln\left(1 + e^{2x}\right) - e^{-2x} + e^{-3x}\operatorname{arctg}e^x.$

3.3.10 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 0{,}25\sin 2x\ln|\operatorname{tg} 2x|.$

3.4.1 $y = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{-x}.$ **3.4.2** $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}.$

3.4.3 $y = C_1 + e^{-2x}\left(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x\right).$

3.4.4 $y = C_1e^{2x} + \left(C_2 + C_3x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5x\right)\sin x.$

3.4.5 $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}.$

3.4.6 $y = C_1e^{2x} + e^{-x}\left(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x\right).$

3.4.7 $y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + C_4e^{-3x}.$ **3.4.8** $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$

3.4.9 $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x.$

3.4.10 $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x\left(C_3\cos 3x + C_4\sin 3x\right).$

3.4.11 $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$

3.4.12 $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2.$

3.4.13 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 1.$

3.4.14 $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{4} x^2 e^x.$

3.4.15 $y = C_1 e^x + e^{-0,5x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) +$
$+ \frac{1}{2} (\cos x - \sin x).$

3.4.16 $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + \frac{1}{4} \cos x.$

3.4.17 $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 \right) e^x - \frac{1}{8} e^x \sin 2x.$

3.4.18 $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x} + \left(x^2 + x - 1 \right) e^{-x}.$

3.4.19 $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - e^x \sin x.$

3.4.20 $y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x - e^x \sin x +$
$+ \frac{1}{60} x^5 - \frac{1}{2} x^3.$ **3.4.21** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - e^x \sin x.$

3.4.22 $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^3 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x + 0,2e^x +$
$+ \frac{3}{32} x \sin 2x.$ **3.4.23** $y = e^{-x} + 2.$

3.4.24 $y = \cos x + 2 \sin x + e^{-x} + (2x - 3) e^x.$

3.4.25 $y = 2x - \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$ **3.4.26** $y = 0,5e^x - 0,5e^{-x} + x^2.$

3.4.27 $y = 4 + (3x - 5) e^x + 2(\sin x + \cos x).$ **3.4.28** $y = e^x + x^3.$

3.4.29 $y = e^{-x} + x - 2 + e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$

3.4.30 $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}.$

4.1.1 $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}; \\ y = \dfrac{3}{2} C_1 e^t + C_2 e^{2t}. \end{cases}$ **4.1.2** $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{10t}; \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}. \end{cases}$

4.1.3 $\begin{cases} x = \left(C_1 + C_2 t\right) e^{3t}; \\ y = \left(C_1 + C_2 + C_2 t\right) e^{3t}. \end{cases}$

4.1.4 $\begin{cases} x = e^{2t} \left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right); \\ y = e^{2t} \left(\left(C_1 + C_2\right) \cos t + \left(C_2 - C_1\right) \sin t\right). \end{cases}$

4.1.5 $\begin{cases} x = e^{-t} + e^{3t}; \\ y = 2e^{-t} - 2e^{3t}. \end{cases}$ **4.1.6** $\begin{cases} x = 5e^{2t} - 3e^{-7t}; \\ y = -e^{2t} + 6e^{-7t}. \end{cases}$

4.2.1 $\begin{cases} x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{2t}; \\ y = -3C_1 e^{-5t} - \dfrac{2}{3} C_2 e^{2t}. \end{cases}$ **4.2.2** $\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}; \\ z = -C_1 e^x + 2C_2 e^{3x}. \end{cases}$

4.2.3 $\begin{cases} x = 3e^{-2t} + 3e^{7t}; \\ y = -3e^{-2t} + 4e^{7t}. \end{cases}$ **4.2.4** $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} e^{3t} + \dfrac{3}{2} e^{5t}; \\ y = -\dfrac{1}{2} e^{3t} + \dfrac{7}{2} e^{5t}. \end{cases}$

5.1.1 $y = x + \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{2}{3} x^3 + \ldots.$

5.1.2 $y = 1 + 2\left(x-1\right) + 4\left(x-1\right)^2 + \dfrac{25}{3}\left(x-1\right)^3 + \ldots.$

5.1.3 $y = 1 + \dfrac{1}{6} x^3 + \ldots.$ **5.1.4** $y = 2 + \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{5x^3}{3!} + \ldots.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.

2 Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – Ч. 2. – 396 с.

3 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

4 Сборник задач по высшей математике. 2-й курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА………… 3
1.1 Общие понятия……………………………………………………….. 3
1.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными…….. 4
1.3 Однородные уравнения……………………………………………… 7
1.4 Линейные уравнения……………………………………………...... 11
1.5 Уравнение Бернулли………………………………………………… 15
1.6 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах…………… 16
1.7 Задачи различных типов…………………………………………….. 18
2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ……….. 20
2.1 Общие понятия………………………………………………………. 20
2.2 Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ ……………………………………….. 22
2.3 Уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$ ……………………………………. 23
2.4 Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$ ……………………………………. 24
2.5 Уравнение в полных производных………………………………… 25
3 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ…………………… 26
3.1 Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами……………..…………………. 26
3.2 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами…………………………… 28
3.3 Метод вариации произвольных постоянных………………………… 36
3.4 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами……………………………………………………… 39
4 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ………………. 45
4.1 Нормальная система дифференциальных уравнений………………. 45
4.2 Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и ее решение с помощью характеристического уравнения……………………………………………………………….. 47
5 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ… 49
5.1 Интегрирование дифференциальных уравнеий с помощью степенных рядов……………………………………………………………….. 49
5.1.1 Способ последовательного дифференцирования…………………. 49
5.1.2 Способ неопределенных коэффициентов………………………… 50
6 САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ………………………………………… 52
6.1 Дифференциальные уравнения первого порядка…………………….. 52
6.2 Дифференциальные уравнения первого порядка, сводящиеся к квадратурам……………………………………………………………… 54
6.3 Дифференциальные уравнения высших порядков…………………… 55
6.4 Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка……………………………………………………….. 57
6.5 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами………………………………… 59
6.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами……………………………………………………………….. 60
6.7 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами………………………………… 61
6.8 Системы дифференциальных уравнений…………………………….. 62
7 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА…………………………………………… 63
ОТВЕТЫ…………………………………………………………………….. 67
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……………………………………………… 75

Учебное издание

ЩЕРБО Аркадий Митрофанович
ЗАДОРОЖНЮК Елена Андреевна
ПРОКОПЕНКО Алла Ивановна

Дифференциальные уравнения

Учебно-методическое пособие

Редактор И. И. Эвентов
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 19.11.2013 г. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 3,84. Тираж 1000 экз.
Зак №   . Изд № 99.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34