Об одном критерии π-сверхразрешимости конечной группы[1]

Васильева Т.И., Коранчук А.Г.
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь
Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь
tivasilyeva@mail.ru, melchenkonastya@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Согласно [1] подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$. Группы с системами $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп изучались в ряде работ (см., например, [1]— [6]).

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Ввиду теоремы Хупперта [7, VI, 9.2] во всякой π-сверхразрешимой группе индекс любой максимальной подгруппы является либо простым числом из π, либо π'-числом.

Определение [8]. *Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}_\pi$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ есть или простое число из π, или π'-число для любого $i = 1, \ldots, n$.*

Теорема 1. *Класс всех π-замкнутых групп, в которых любая силовская подгруппа $\mathbb{P}_\pi$-субнормальна, является наследственной насыщенной формацией.*

Теорема 2. *Пусть G — π-замкнутая группа. Тогда и только тогда G π-сверхразрешима, когда в G являются $\mathbb{P}_\pi$-субнормальными $N_G(G_p)$ и $N_G(G_{\pi'})$ для любой силовской p-подгруппы G_p, где $p \in \pi \cap \pi(G)$, и любой π'-холловой подгруппы $G_{\pi'}$ из G.*

Отметим, что в теореме 2 условие $\mathbb{P}_\pi$-субнормальности нормализаторов π'-холловых подгрупп из G является существенным. Например, пусть $G = A_4$ — знакопеременная группа степени 4 и $\pi = \{2\}$. Так как силовская 2-подгруппа P нормальна в G, $N_G(P) = G$ является $\mathbb{P}_\pi$-субнормальной подгруппой в G; π'-холловы подгруппы из G совпадают с силовскими 3-подгруппами, которые самонормализуемы и не $\mathbb{P}_\pi$-субнормальны в G. Группа G π-замкнута, но не π-сверхразрешима.

Ясно, что если $\pi(G) \subseteq \pi$, в частности, если $\pi = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то понятия $\mathbb{P}_\pi$-субнормальной и $\mathbb{P}$-субнормальной подгрупп совпадают.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ "Конвергенция-2025 № гос. рег. 20211750).

Следствие 1 [1]. *Класс* w$\mathfrak{U}$ *всех групп, в которых любая силовская подгруппа* $\mathbb{P}$*-субнормальна, является наследственной насыщенной формацией.*

Следствие 2 [3]. *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда в ней* $\mathbb{P}$*-субнормальны нормализаторы всех силовских подгрупп.*

Список литературы

[1] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов. О конечных группах сверхразрешимого типа. *Сиб. матем. журн.* **51**: 6 (2010), 1270–1281.

[2] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов. О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах. *Сиб. матем. журн.* **53**: 1 (2012), 59-67.

[3] V. N. Kniahina, V. S. Monakhov. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups. *Internal. J. Group Theory.* **2**: 4 (2013), 21–29.

[4] В. И. Мурашко. Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами. *Сиб. матем. журн.* **55**: 6 (2014), 1353–1367.

[5] В. А. Васильев. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами. *Сиб. матем. журн.* **56**: 6 (2015), 1277–1288.

[6] A. Ballester-Bolinches, Y. Li, M. C. Pedraza-Aguilera, N. Su. On Factorised Finite Groups. *Mediterr. J. Math.* **17**: 2 (2020), 65.

[7] B. Huppert. Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967.

[8] Т. И. Васильева, А. Г. Коранчук. О π-сверхразрешимости конечных групп. *Проблемы физики, математики и техники.* **1**: 54 (2023), 69–74.