Проблемы физики, математики и техники, № 1 (54), 2023 **ISSN 2077-8708**

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_69
EDN: QVPXWQ

О π-СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева[1], **А.Г. Коранчук**[2]

[1]*Белорусский государственный университет транспорта*, *Гомель*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

ON π-SUPERSOLVABILITY OF FINITE GROUPS

T.I. Vasilyeva[1], **A.G. Koranchuk**[2]

[1]*Belarusian State University of Transport*, *Gomel*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Подгруппа *H* группы *G* называется $\mathbb{P}_\pi$-субнормальной в *G*, если либо *H* = *G*, либо от *H* до *G* существует цепь подгрупп, каждый индекс которой является или простым числом из π, или π'-числом (π – некоторое множество простых чисел). Для конечной π-замкнутой группы *G* с заданными $\mathbb{P}_\pi$-субнормальными подгруппами получены необходимые и достаточные условия π-сверхразрешимости *G*.

Ключевые слова: π-*разрешимая группа*, π-*сверхразрешимая группа*, $\mathbb{P}_\pi$-*субнормальная подгруппа*, *нормализаторы силовских подгрупп*.

Для цитирования: *Васильева*, *Т.И.* О π-сверхразрешимости конечных групп / Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 69–74. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_69. – EDN: QVPXWQ

Abstract. A subgroup *H* of a group *G* is called $\mathbb{P}_\pi$-subnormal in *G* if either *H* = *G* or from *H* to *G* there exists a chain of subgroups, whose every index is either a prime in π or a π'-number (π is some set of primes). For a finite π-closed group with given $\mathbb{P}_\pi$-subnormal subgroups, the necessary and sufficient conditions of π-supersolvability are obtained.

Keywords: π-soluble group, π-supersoluble group, $\mathbb{P}_\pi$-subnormal subgroup, normalizers of Sylow subgroups.

For citation: *Vasilyeva*, *T.I.* On π-supersolvability of finite groups / T.I. Vasilyeva, A.G. Koranchuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 69–74. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_69 (in Russian). – EDN: QVPXWQ

Введение

В работе используются стандартные обозначения и определения, при необходимости см. монографии [1], [2], под словом группа понимается только конечная группа. Имеется много насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, обладающих тем свойством, что группа *G* принадлежит $\mathfrak{F}$ в случае, когда в *G* все нормализаторы силовских подгрупп являются $\mathfrak{F}$-подгруппами (см., например, [3]–[8]). Формация всех сверхразрешимых групп этого свойства не имеет. Некоторые критерии сверхразрешимости группы со сверхразрешимыми нормализаторами силовских подгрупп были получены в [9]. В [10] была доказана сверхразрешимость группы, в которой все нормализаторы силовских подгрупп являются $\mathbb{P}$-субнормальными в смысле определения 1 из [11]. Настоящая работа относится к отмеченному направлению исследования групп.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Ввиду теоремы Хупперта [12, гл. VI, теорема 9.2.], если *G* – π-сверхразрешимая группа и *M* – ее максимальная подгруппа, то индекс *M* в *G* является либо простым числом из π, либо π'-числом. На основании этого введем следующее

***Определение* 0.1.** *Подгруппу H группы G будем называть* $\mathbb{P}_\pi$*-субнормальной в G, если либо H = G, либо существует цепь подгрупп*

$$H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ *есть или простое число из* π, *или* π'*-число для любого* $i = 1,\ldots,n$.

Через $sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ будем обозначать множество всех $\mathbb{P}_\pi$-субнормальных подгрупп группы *G*.

Отметим, если π совпадает с множеством всех простых чисел $\mathbb{P}$, то определение 0.1 превращается в определение $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы, введенное в [11].

Нами с использованием определения 0.1 получены критерии π-сверхразрешимости группы по свойствам нормализаторов ее силовских подгрупп.

1 Предварительные сведения

Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел, π – некоторое подмножество из $\mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если G – группа, то $|G|$ – порядок G, $\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей $|G|$, G_p – силовская p-подгруппа из G для $p \in \mathbb{P}$, G_π – π-холлова подгруппа из G, $\mathrm{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп из G, $\mathrm{Syl}(G)$ – множество всех силовских подгрупп из G.

Группа G называется π-*замкнутой*, если G имеет π-холлову подгруппу $G_\pi \trianglelefteq G$, π-*нильпотентной*, если G π'-замкнута и π-холлова подгруппа из G нильпотентна, π-*разрешимой*, если G обладает главным рядом, у которого каждый фактор является либо абелевой π-группой, либо π'-группой, π-*сверхразрешимой*, если G обладает главным рядом, у которого каждый фактор является либо циклической π-группой, либо π'-группой.

Группа G, где $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ и простые числа $p_1 > \cdots > p_n$, называется *дисперсивной по Оре* или *имеет силовскую башню сверхразрешимого типа*, если в G существуют нормальные подгруппы порядков $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ для любого $k = 1, \ldots, n$.

Согласно теореме Холла – Чунихина (см., например, [12, гл. VI, §1]) любая π-разрешимая группа G обладает π-холловой подгруппой, все π-холловы подгруппы сопряжены в G, всякая π-подгруппа из G содержится в некоторой π-холловой подгруппе из G и в G π-холлова подгруппа разрешима.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если из условия $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы H из G; *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ – формация, то $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G называется подгруппа $G^{\mathfrak{F}} = \cap N$ для всех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Через $\mathfrak{U}^\pi$ обозначается класс всех π-сверхразрешимых групп. Нам потребуются некоторые известные свойства π-сверхразрешимых групп (см., например, [1, с. 35], [12, гл. VI, §8, 9]): $\mathfrak{U}^\pi$ – наследственная насыщенная формация; всякая p-сверхразрешимая группа имеет p-нильпотентный коммутант; всякая сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре.

2 Множество $sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и π-сверхразрешимость группы

Лемма 2.1. *Пусть H – подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если G π-разрешима и H субнормальна в G, то $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$*;

2) *если G π-сверхразрешима, то $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из свойств π-разрешимой группы.

Утверждение 2). Если G π-сверхразрешима и H – ее подгруппа, то по теореме Хупперта H можно соединить с G максимальной цепью подгрупп, каждый индекс которой является либо простым числом из π, либо π'-числом, т. е. $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. □

Лемма 2.2. *Пусть G – группа, $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $H \cap N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(N)$;

2) $HN/N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N)$;

3) $H^g \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ *для любого* $g \in G$.

Доказательство. Подгруппа H $\mathbb{P}_\pi$-субнормальна в G. Для $H \neq G$ рассмотрим цепь подгрупп из определения 0.1. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Утверждение 1). Заметим, что
$$|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N| = |(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|$$
и $H_{i-1} \le (H_i \cap N)H_{i-1} \le H_i$. Допустим, что $|H_i : H_{i-1}| = p \in \pi$. Тогда H_{i-1} максимальна в H_i. Поэтому либо $H_i \cap N = H_{i-1} \cap N$, либо $|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N| = p$. Предположим, что $|H_i : H_{i-1}|$ – π'-число. Тогда либо $H_i \cap N = H_{i-1} \cap N$, либо $|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N|$ есть π'-число. Итак, $H \cap N$ $\mathbb{P}_\pi$-субнормальна в N, т. е. $H \cap N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(N)$.

Утверждение 2). Индекс
$$|H_i N/N : H_{i-1}N/N| = \frac{|H_i : H_{i-1}|}{|(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|}.$$
Если $|H_i : H_{i-1}| = p \in \pi$, то из
$$H_{i-1} \le (H_i \cap N)H_{i-1} \le H_i$$
следует, что либо $H_i N/N = H_{i-1}N/N$, либо $|H_i N/N : H_{i-1}N/N| = p$. Если $|H_i : H_{i-1}|$ – π'-число, то или $|H_i N/N : H_{i-1}N/N| = 1$ или $|H_i N/N : H_{i-1}N/N|$ – π'-число. Значит, HN/N $\mathbb{P}_\pi$-субнормальна в G/N, т. е.
$$HN/N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N).$$

Утверждение 3) следует из того, что $|H_i^g : H_{i-1}^g| = |H_i : H_{i-1}|$ для любого $g \in G$. □

***Лемма* 2.3.** *Пусть H – подгруппа группы G. Пусть выполняется одно из следующих утверждений*:

1) $H/N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N)$ *для* $N \trianglelefteq G$ *и* $N \le H$;

2) $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K)$ *и* $K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$;

3) $G^{\mathfrak{U}^\pi} \le H$.

Тогда $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.

Доказательство. Пусть выполняется утверждение 1), т. е. $H/N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N)$ для $N \trianglelefteq G$ и $N \le H$. Можно считать, что $H/N \ne G/N$. Так как H/N $\mathbb{P}_\pi$-субнормальна в G/N, существует цепь подгрупп

$$H/N = H_0/N < H_1/N < \cdots$$
$$\cdots < H_{n-1}/N < H_n/N = G/N,$$

где $|H_i/N : H_{i-1}/N|$ – есть либо простое число из π, либо π'-число. Из $|H_i/N : H_{i-1}/N| = |H_i : H_{i-1}|$ следует, что для H $\mathbb{P}_\pi$-субнормальна в G и $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.

Если выполняется утверждение 2), то $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ по определению 0.1.

Допустим, что справедливо утверждение 3), т. е. $G^{\mathfrak{U}^\pi} \le H$. Тогда $H/G^{\mathfrak{U}^\pi} \le G/G^{\mathfrak{U}^\pi}$ π-сверхразрешима. По 2) леммы 2.1 $H/G^{\mathfrak{U}^\pi} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/G^{\pi})$. Поэтому для H выполняется утверждение 1) и по доказанному выше $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. □

***Лемма* 2.4.** *Пусть G – группа*,

$$\mathrm{Syl}_p(G) \subseteq sn_{\mathbb{P}_\pi}(G) \text{ и } N \trianglelefteq G.$$

Тогда $\mathrm{Syl}_p(N) \subseteq sn_{\mathbb{P}_\pi}(N)$ *и*

$$\mathrm{Syl}_p(G/N) \subseteq sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N).$$

Доказательство. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_p(N)$. По теореме Силова $S \le H$ для некоторой $H \in \mathrm{Syl}_p(G)$. По условию леммы $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Так как $S = H \cap N$, по 1) леммы 2.2 $S \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(N)$.

Рассмотрим $R/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$. Так как $G_pN/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$ для любой $G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$, по теореме Силова $R/N = (G_pN/N)^{gN}$ для некоторого $g \in G$. Отсюда $R/N = G_p^gN/N$. Ввиду $G_p^g \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и 2) леммы 2.2 $R/N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N)$. □

***Лемма* 2.5.** *Если G – π-замкнутая группа, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $N_G(P) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$, где p – наибольшее простое число из $\pi \cap \pi(G)$, то $P \trianglelefteq G$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Выберем группу G наименьшего порядка такую, что $N_G(P) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для наибольшего простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, но P не является нормальной в G.

Обозначим $H = N_G(P)$. Из $H \ne G$ следует, что в G существует цепь подгрупп из определения 0.1. Так как H_{n-1} – π-замкнутая группа, $H = N_{H_{n-1}}(P) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H_{n-1})$, $P \in \mathrm{Syl}_p(H_{n-1})$ и p – наибольшее простое число из $\pi \cap \pi(H_{n-1})$, заключаем, что $P \trianglelefteq H_{n-1}$ по выбору G.

Предположим, что $|H_n : H_{n-1}| = q \in \pi$. Из $H_{n-1} = N_G(P)$ по теореме Силова $|G : N_G(P)| = q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Получили противоречие с $q < p$.

Пусть $|H_n : H_{n-1}|$ – π'-число. По условию в G существует нормальная π-холлова подгруппа G_π. Из

$$|G| = |G_\pi| \cdot |G : G_\pi| =$$
$$= |H_{n-1} \cap G_\pi| \cdot |H_{n-1}G_\pi / G_\pi| \cdot |H_n : H_{n-1}|$$

следует, что $G_\pi = H_{n-1} \cap G_\pi$ – π-холлова подгруппа в H_{n-1}. По теореме Силова P^x – силовская p-подгруппа из G_π для некоторого $x \in H_{n-1}$. Тогда $P \le (G_\pi)^{x^{-1}} = G_\pi$. Из $P \trianglelefteq G_\pi \trianglelefteq G$ и характеристичности P в G_π следует, что $P \trianglelefteq G$. Полученное противоречие с выбором G завершает доказательство леммы. □

***Лемма* 2.6.** *Если G – π-замкнутая группа, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $P \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$, где p – наибольшее простое число из $\pi \cap \pi(G)$, то $P \trianglelefteq G$.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Для $P = G$ утверждение леммы выполняется. Пусть $P \ne G$. Так как P $\mathbb{P}_\pi$-субнормальна в G, имеется цепь подгрупп $P = P_0 < P_1 < \cdots < P_{m-1} < P_m = G$ такая, что $|P_i : P_{i-1}|$ есть либо простое число из π, либо π'-число, $i = 1, 2, \ldots, m$. Так как $P \in \mathrm{Syl}_p(P_{m-1})$ и $P \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(P_{m-1})$, по индукции $P \trianglelefteq P_{m-1}$. Поэтому $P_{m-1} \le N_G(P)$.

Если $P_{m-1} = N_G(P)$, то $N_G(P) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и по лемме 2.5 $P \trianglelefteq G$.

Предположим, что $P_{m-1} \ne N_G(P)$.

Если $|P_m : P_{m-1}| = q \in \pi$, то $N_G(P) = G$ ввиду максимальности P_{m-1} в $P_m = G$, т. е. $P \trianglelefteq G$.

Если $|P_m : P_{m-1}|$ – π'-число, то из $P_{m-1} < N_G(P) \le G$ следует, что $N_G(P) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и по лемме 2.5 $P \trianglelefteq G$. □

***Лемма* 2.7.** *Пусть G – π-замкнутая группа и $\mathrm{Syl}_{p_i}(G) \subseteq sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для любого $p_i \in \pi \cap \pi(G) = \{p_1, \ldots, p_n \mid p_1 > \ldots > p_n\}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда G имеет нормальную π_k-холлову подгруппу для любого $\pi_k = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Так как π-холлова подгруппа G_π из G нормальна в G, G_π содержит

G_{p_i} для любого $i=1,2,\ldots,n.$ По лемме 2.6 $G_{p_1}\trianglelefteq G.$ Из 2) леммы 2.2 следует, что $G_{p_1}G_{p_2}/G_{p_1}\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/G_{p_1}).$ Ввиду леммы 2.6 $G_{p_1}G_{p_2}/G_{p_1}\trianglelefteq G/G_{p_1}.$ Откуда $G_{p_1}G_{p_2}\trianglelefteq G.$ Применяя далее 2) леммы 2.2 и лемму 2.4, заключаем, что $G_{p_1}G_{p_2}\cdots G_{p_k}\trianglelefteq G,$ $k=1,2,\ldots,n.$ □

Отметим, что в леммах 2.5–2.7 π-замкнутость группы нельзя отбросить. В качестве примера возьмем группу $G=PSL(2,7)$ и $\pi=\{7\}.$ Тогда для $p=7$ из $|N_G(G_p):G_p|=3$ и $|G:N_G(G_p)|=8$ заключаем, что $G_p\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и $N_G(G_p)\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G).$ При этом силовская 7-подгруппа не является нормальной в G.

Из примера 1 работы [10] следует, что в неразрешимой группе пересечение $\mathbb{P}_\pi$-субнормальных подгрупп не всегда $\mathbb{P}_\pi$-субнормальная подгруппа.

***Лемма* 2.8.** *Пусть G – π-замкнутая π-разрешимая группа, $H\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и K – подгруппа из G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $H\cap K\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K);$

2) *если* $K\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G),$ *то* $H\cap K\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G).$

Доказательство. Утверждение 1) докажем индукцией по $|G|$. Можно считать, что $H\neq G.$ Рассмотрим цепь подгрупп из определения 0.1 и

$$H\cap K=H_0\cap K\le H_1\cap K\le\cdots$$
$$\cdots\le H_{n-1}\cap K\le H_n\cap K=K.$$

Утверждение верно, если $H_{i-1}\cap K=H_i\cap K$ для любого $i\in 1,2,\ldots,n.$ Пусть $H_{i-1}\cap K\neq H_i\cap K$ для некоторого i и пусть $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ такое, что $H_{j-1}\cap K\neq H_j\cap K,$ а $H_j\cap K=K.$ По индукции $H\cap K=H\cap(H_{j-1}\cap K)\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H_{j-1}\cap K).$ Для $j<n$ по индукции утверждение выполняется.

Рассмотрим $j=n.$

Допустим, что $|H_n:H_{n-1}|=p\in\pi.$ Так как G/C π-разрешима и H_{n-1} максимальна в G, имеем $G/C=H_{n-1}/C\cdot L/C,$ где $C=\mathrm{Core}_G(H_{n-1})$ и L/C – некоторая минимальная нормальная подгруппа из $G/C.$ Из π-разрешимости G/C и $p\in\pi\cap\pi(L/C)$ следует, что L/C – p-группа. По теореме 15.2, гл. A из [2] L/C – единственная минимальная нормальная подгруппа в $G/C,$ $C_{G/C}(L/C)=L/C$ и $H_{n-1}/C\cap L/C=C/C.$ Поэтому $|L/C|=|G/C:H_{n-1}/C|=p$ и $H_{n-1}/C\cong$ $\cong G/C/C_{G/C}(L/C)\cong\mathrm{Aut}_{G/C}(L/C)$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(Z_p)\cong Z_{p-1}.$ Итак, G/C сверхразрешима. Поэтому сверхразрешимой является $K/K\cap C\cong KC/C.$ По 2) леммы 2.1 $H_{n-1}\cap K/K\cap C\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K/K\cap C).$ Ввиду выполнимости 1) леммы 2.3 $H_{n-1}\cap K\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K).$

Предположим, что $|H_n:H_{n-1}|$ – π'-число. Из π-разрешимости G следует, что ее π-холлова подгруппа G_π содержится в $H_{n-1}.$ Так как $G_\pi\trianglelefteq G,$ $K\cap G_\pi$ – π-холлова подгруппа в K. Тогда из $K\cap G_\pi\le H_{n-1}\cap K$ следует, что $|K:H_{n-1}\cap K|$ – π'-число. Значит,

$$H_{n-1}\cap K\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K).$$

Так как $H\cap K\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H_{n-1}\cap K),$ по лемме 2.3 $H\cap K\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K).$

Утверждение 2). По доказанному

$$H\cap K\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K).$$

По лемме 2.3 $H\cap K\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G).$ □

***Лемма* 2.9.** *Пусть G – π-замкнутая π-разрешимая группа и ее силовская p-подгруппа G_p содержится в подгруппе H из G. Если $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G),$ то $N_H(G_p)^{\mathfrak{X}}\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H),$ где $\mathfrak{X}$ – формация всех π-нильпотентных групп.*

Доказательство. Из наследственности $\mathfrak{X}$ заключаем, что $N_H(G_p)^{\mathfrak{X}}\le N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}.$ Так как $N_H(G_p)^{\mathfrak{X}}\trianglelefteq N_H(G_p),$ имеем

$$N_H(G_p)^{\mathfrak{X}}\trianglelefteq N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}\cap H.$$

Ввиду π-разрешимости $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}\cap H$ по 1) леммы 2.1 $N_H(G_p)^{\mathfrak{X}}\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(N_G(H)^{\mathfrak{X}}\cap H).$ Из 1) леммы 2.8 следует, что $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}\cap H\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H).$ Поэтому $N_H(G_p)^{\mathfrak{X}}\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H)$ по лемме 2.3. □

***Теорема* 2.1.** *Если $\mathfrak{F}=(G$ – группа $|$ $G_\pi\trianglelefteq G$ и $\mathrm{Syl}(G)\subseteq sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)),$ то $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.*

***Теорема* 2.2.** *Пусть G – π-замкнутая группа. Тогда и только тогда G π-сверхразрешима, когда $N_G(G_p)\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для любого $p\in\pi\cap\pi(G)$ и $N_G(G_{\pi'})\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для любой π'-холловой подгруппы $G_{\pi'}$ из G.*

Отметим, что в теореме 2.2 условие принадлежности $sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ нормализаторов π'-холловых подгрупп из G является существенным. В качестве примера выступает знакопеременная группа A_4 степени 4 и $\pi=\{2\}.$ Если $G=A_4$ и $p=2,$ то $N_G(G_p)=G\in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G),$ в G π'-холловы подгруппы совпадают с силовскими 3-подгруппами, которые самонормализуемы и не принадлежат $sn_{\mathbb{P}_\pi}(G).$ Группа G π-замкнута, но не является π-сверхразрешимой.

Теорема 2.3. *Пусть G – π-замкнутая группа. Тогда и только тогда G π-сверхразрешима, когда G – π-разрешимая группа такая, что для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы G_p из G нормализатор $N_G(G_p)$ π-сверхразрешим и $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$, где $\mathfrak{X}$ – формация всех π-нильпотентных групп.*

Доказательство. Необходимость следует из наследственности формации всех π-сверхразрешимых групп и 2) леммы 2.1.

Достаточность. Допустим, что существуют группы, для которых достаточность не выполняется. Выберем среди них группу G наименьшего порядка. Тогда G – π-замкнутая π-разрешимая группа, нормализатор $N_G(G_p)$ π-сверхразрешим и $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и $G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$, а G не является π-сверхразрешимой.

Рассмотрим любую минимальную нормальную подгруппу N из G. Тогда $N \neq G$ ввиду π-разрешимости и выбора G.

Если G/N – π'-группа, то G/N π-сверхразрешима. Пусть G/N – не π'-группа. Рассмотрим $q \in \pi \cap \pi(G/N)$ и $S_1/N \in \mathrm{Syl}_q(G/N)$. Тогда $S_1/N = SN/N$ для некоторой $S \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $N_G(S_1/N) = N_G(S)N/N \cong N_G(S)/N_G(S) \cap N$ π-сверхразрешим. Обозначим $A/N = N_G(S_1/N)$. Тогда $A = N_G(S)N$ и по [1, лемма 1.2] $(A/N)^{\mathfrak{X}} = A^{\mathfrak{X}}N/N$, а также $N_G(S)^{\mathfrak{X}}N = A^{\mathfrak{X}}N$. Поэтому $N_G(S_1/N)^{\mathfrak{X}} = N_G(S)^{\mathfrak{X}}N/N$. Из $N_G(S)^{\mathfrak{X}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ по 2) леммы 2.2 получаем, что $N_G(S_1/N)^{\mathfrak{X}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N)$. Значит, G/N π-сверхразрешима по выбору G.

Из свойств $\mathfrak{U}^\pi$ следует, что N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и $\Phi(G) = 1$. Тогда в G имеется максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$, причем $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Отметим, что G не является π'-группой. Из π-замкнутости G следует, что G имеет нормальную π-холлову подгруппу G_π. Тогда $N \leq G_\pi$. Из разрешимости G_π заключаем, что N – p-группа для некоторого $p \in \pi \cap \pi(G)$. По [2, гл. A, теорема 15.2] $N = C_G(N)$, $N \cap M = 1$. По [2, гл. A, лемма 13.6] $O_p(M) = 1$. Так как $N \leq G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $N_G(G_p)$ π-сверхразрешим, имеем $N \neq G_p$ и

$$1 \neq M_p \in \mathrm{Syl}_p(M).$$

Пусть q – наибольшее простое число из $\pi \cap \pi(M)$ и $M_q \in \mathrm{Syl}_q(M)$. Из $G_\pi \trianglelefteq G$ следует, что $M_\pi = G_\pi \cap M$ – нормальная π-холлова подгруппа в M. Так как $M \cong G/N$ и G/N π-сверхразрешима, заключаем, что M_π сверхразрешима. Поэтому $M_q \trianglelefteq M_\pi$. Из M_q char M_π следует, что $M_q \trianglelefteq M$. Тогда $q > p$. Это означает, что $|\pi \cap \pi(M)| > 1$.

Из $\mathrm{Core}_G(M) = 1$ и $M \leq N_G(M_q)$ заключаем, что $M = N_G(M_q)$. Ввиду того, что $M_q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $q \in \pi \cap \pi(G)$ по условию $M^{\mathfrak{X}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.

Из выбора G следует, что $1 \neq M^{\mathfrak{X}} \neq M$.

Так как M' s-нильпотентен для любого $s \in \pi \cap \pi(M)$, M' π-нильпотентен. Из $M^{\mathfrak{X}} \leq M'$ следует, что $M^{\mathfrak{X}}$ π-нильпотентен. Тогда $M^{\mathfrak{X}} = M_1 M_2$, где M_1 – нильпотентная π-холлова подгруппа в $M^{\mathfrak{X}}$, M_2 – нормальная π'-холлова подгруппа в $M^{\mathfrak{X}}$.

Если $p \in \pi(M^{\mathfrak{X}})$, то $P_1 \leq M_1$ для $P_1 \in \mathrm{Syl}_p(M^{\mathfrak{X}})$. Ввиду π-замкнутости G имеем, что $M_1 \trianglelefteq M^{\mathfrak{X}}$. Но тогда $P_1 \trianglelefteq M^{\mathfrak{X}}$. Из $M^{\mathfrak{X}} \trianglelefteq M$ получаем противоречие $1 \neq P_1 \leq O_p(M) = 1$.

Итак, $p \notin \pi(M^{\mathfrak{X}})$.

1. Пусть $|\pi \cap \pi(M)| = 2$.

(a) Предположим, что $M_1 \neq 1$. Тогда M_1 – q-группа. Рассмотрим подгруппу $H = NM_1$. Из $M^{\mathfrak{X}} \cap H = M_1$ и 1) леммы 2.8 получаем, что $M_1 \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H)$. Отметим, что $q > p$ и $M_1 \in \mathrm{Syl}_q(H)$. По лемме 2.6 $M_1 \trianglelefteq H$. Получили противоречие $1 \neq M_1 \leq C_H(N) \leq C_G(N) = N$.

(b) Предположим, что $M_1 = 1$. Тогда $M^{\mathfrak{X}} = M_2$ – π'-группа, причем $M^{\mathfrak{X}}$ не является π'-холловой подгруппой в M, так как $O_p(M) = 1$. Обозначим $B = G_\pi M^{\mathfrak{X}}$. Пусть $Q \in \mathrm{Syl}(B)$ и $\pi(Q) \subseteq \{p, q\} = \pi \cap \pi(B)$. Так как $Q \in \mathrm{Syl}(G)$, по выбору G имеем $N_G(Q)$ π-сверхразрешим и $N_G(Q)^{\mathfrak{X}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Но тогда $N_G(Q) \cap B = N_B(Q)$ π-сверхразрешим. По лемме 2.9 $N_B(Q)^{\mathfrak{X}}$ $\mathbb{P}_\pi$-*sn* B. Так как $|B| < |G|$, по выбору G подгруппа B π-сверхразрешима. Тогда G_π сверхразрешима. Из $q > p$ следует, что $B_q \trianglelefteq G_\pi$, где $B_q \in \mathrm{Syl}_q(B)$. А так как $G_\pi \trianglelefteq B$, заключаем что $B_q \trianglelefteq B$. Значит,

$$1 \neq B_q \leq C_B(N) \leq C_G(N) = N.$$

Получили противоречие.

2. $|\pi \cap \pi(M)| > 2$. Заметим, что $G_p = N(G_p \cap M)$. Так как $M_q \trianglelefteq M$, $(G_p \cap M)M_q$ – подгруппа в M,

а $N(G_p \cap M)M_q = G_p M_q$ – подгруппа в G. Рассмотрим подгруппу $K = G_p M_q$. Тогда $\pi(K) = \{p, q\} \subseteq \pi \cap \pi(G)$. Пусть $R \in \mathrm{Syl}(K)$. Тогда $R \in \mathrm{Syl}(G)$. По выбору G имеем $N_G(R)$ π-сверхразрешим и $N_G(R)^{\mathfrak{X}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Тогда $N_K(R) = N_G(R) \cap K$ π-сверхразрешим и по лемме 2.9 $N_K(R)^{\mathfrak{X}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K)$. Из $|K| < |G|$ следует, что K π-сверхразрешима, а значит, и сверхразрешима. Из $q > p$ следует, что $M_q \trianglelefteq K$. Поэтому $1 \neq M_q \leq C_K(N) \leq C_G(N) = N$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Отметим, что в теореме 2.3 π-замкнутость группы G нельзя отбросить. Например, пусть $G = S_4$ – симметрическая группа степени 4 и $\pi = \{2\}$. Так как $\pi \cap \pi(G) = \{2\}$, в G для $p = 2$ любая силовская p-подгруппа $G_p = N_G(G_p)$. Поэтому $N_G(G_p)$ π-сверхразрешим и $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}} = 1$. В G имеется цепь подгрупп $1 < H_1 < H_2 < H_3 < G$, где $|H_1| = 2$, $|H_2| = 4$, $H_3 = A_4$. Поэтому $1 \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Но группа G не является π-сверхразрешимой, хотя G π-разрешима.

Заключение

В работе найдены критерии π-сверхразрешимости π-замкнутой группы G с заданными подгруппами из $sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Из приведенных теорем можно получить как известные, так и новые результаты.

При $\pi = \mathrm{P}$ теорема 2.1 включает теорему 2.7 из [11], теорема 2.2 – теорему 3.1 из [10].

Через $\mathfrak{A}$ обозначается формация всех абелевых групп, $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп. Так как $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, имеем

$$N_G(G_p)^{\mathfrak{X}} \leq N_G(G_p)^{\mathfrak{N}} \leq N_G(G_p)'.$$

Поэтому, если $N_G(G_p)$ π-сверхразрешим, по 2) леммы 2.1 $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(N_G(G_p)^{\mathfrak{N}})$ и $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(N_G(G_p)'$. С учетом леммы 2.3 из теоремы 2.3 вытекают следующие критерии π-сверхразрешимости группы.

***Следствие* 2.1.** *Пусть G – π-замкнутая группа. Тогда и только тогда G π-сверхразрешима, когда G – π-разрешимая группа такая, что для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы G_p из G нормализатор $N_G(G_p)$ π-сверхразрешим и $N_G(G_p)^{\mathfrak{N}} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.*

***Следствие* 2.2.** *Пусть G – π-замкнутая группа. Тогда и только тогда G π-сверхразрешима, когда G – π-разрешимая группа такая, что для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы G_p из G нормализатор $N_G(G_p)$ π-сверхразрешим и $N_G(G_p)' \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.*

Для $\pi = \mathbb{P}$ из теоремы 2.3 получается следствие 2.1 из [9] и следствия 3.4–3.7 из [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

3. *Glauberman*, *G.* Prime-power factor groups of finite groups II / G. Glauberman // Math. Z. – 1970. – Vol. – 117. – P. 46–51.

4. *On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers* / M. Bianchi, A. Gillio Berta Mauri, P. Hauck // Arch. Math. – 1986. – Vol. 47, № 3. – P. 193–197.

5. *Баллестер-Болинше*, *А.* О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах / А. Баллестер-Болинше, Л.А. Шеметков // Сиб. мат. журнал. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 3–5.

6. *Монахов*, *В.С.* Нормальные подгруппы конечных групп и формации с нормализаторными условиями / В.С. Монахов, М.В. Селькин // Мат. заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 867–870.

7. *D'Aniello*, *A.* Saturated formations and Sylow normalizers / A. D'Aniello, C. De Vivo, G. Giordano // Bull. Austral. Math. Soc. – 2004. – Vol. 69, № 1. – P. 25–33.

8. *Kazarin*, *L.* On Sylow normalizers of finite groups / L. Kazarin, A. Martinez-Pastor, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra Appl. – 2014. – Vol. 13, № 3. – P. 1350116–1-20.

9. *Васильева*, *Т.И.* Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов / Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Сиб. мат. журнал. – 2022. – Т. 63, № 4. – С. 805–813.

10. *Kniahina*, *V.N.* On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Internal. J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

11. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

12. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen. I / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 795 s.

13. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах с полусубнормальными корадикалами силовских нормализаторов / А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 58–62.

Поступила в редакцию 28.01.2023.

Информация об авторах

Васильева Татьяна Ивановна – к.ф.-м.н., доцент

Коранчук Анастасия Геннадьевна – аспирантка