$$+\frac{2aF_0}{\pi ES}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\cos\frac{\pi a(2n+1)\left(t+\frac{T}{2}\right)}{2l}}{(2n+1)\sin\frac{\pi aT(2n+1)}{4l}}.$$

В полученном соотношении для функции $u(x,t)$ второе слагаемое описывает вынужденные колебания стержня со спектром частот импульсной силы, третье слагаемое – собственные колебания стержня, наличие первого слагаемого – статический сдвиг сечения стержня, обусловлено периодическим характером внешней импульсной силы.

Список литературы

1 *Ершова, В. В.* Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В. В. Ершова. – Минск : Выш. шк., 1976. – 255 с.

2 *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самар ский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.

3 *Пчелин, Б. К.* Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление / Б. К. Пчелин. – М. : Высш. шк., 1973. – 464 с.

4 *Свешников, А. Г.* Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1967 – 304 с.

УДК 517.925:51-7

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ. НЕКОНСЕРВАТИВНАЯ СИСТЕМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

При рассмотрении процессов колебаний в реальных механических системах необходимо учитывать, что подавляющее число систем являются неконсервативными, т. е. колебательные процессы в них происходят с диссипацией (потерей) энергии. Прежде всего, потери энергии вызываются влиянием среды на механическую систему. В целом ряде случаев, однако, влияние среды на систему можно учесть достаточно простым образом, полагая, что на тело действует сила трения. Обычно силу трения, действующую на систему, совершающую одномерные малые колебания с обобщенной координатой y, записывают в виде $F_{\text{тр}} = -\alpha\dot{y}$, где α – положительный коэффициент. Как следствие, уравнение движения для одномерного осциллятора с учётом силы трения и внешней вынуждающей силы, действующей на осциллятор [1, 2], будет иметь вид

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = \frac{f(t)}{m}, \qquad (1)$$

где ω_0 – частота свободных колебаний осциллятора, величина δ $\left(2\delta = \frac{\alpha}{m}\right)$ называется коэффициентом затухания, m – масса осциллятора.

Наибольший интерес представляют колебательные процессы, происходящие под действием периодических сил. Рассмотрим колебания осциллятора под действием силы $f(t)$ (рисунок 1) с периодом T и амплитудой F_0:

$$f(t) = F_0 \begin{cases} \dfrac{2t}{T}, \, 0 \le t < \dfrac{T}{2}, \\ \dfrac{2(T-t)}{T}, \, \dfrac{T}{2} \le t < T. \end{cases}$$

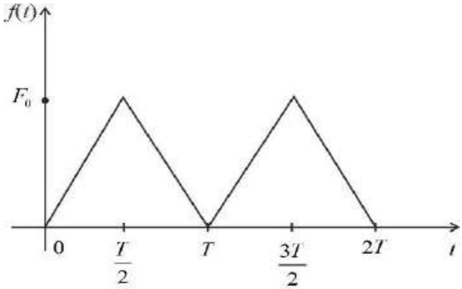

Рисунок 1

Лаплас-образ функции $f(t)$ с периодом T имеет вид [3]

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}, \qquad (2)$$

где укороченный лаплас-образ

$$F_0(p) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} te^{-pt}dt + 2\int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)e^{-pt}dt = \frac{2}{pT}\left(Te^{-pT} - Te^{-\frac{pT}{2}}\right) + \frac{2}{p^2T}\left(e^{-pT} - 2e^{-\frac{pT}{2}} + 1\right) -$$

$$-\frac{2}{p}\left(e^{-pT} - e^{-\frac{pT}{2}}\right) = \frac{2}{p^2T}\left(1 - e^{-\frac{pT}{2}}\right)^2.$$

Подставляя полученное соотношение для $F_0(p)$ в формулу (2), находим требуемый лаплас-образ:

$$F(p)=\frac{2\left(1-e^{-\frac{pT}{2}}\right)^2}{p^2T\left(1-e^{-pT}\right)}=\frac{2\left(1-e^{-\frac{pT}{2}}\right)}{p^2T\left(1+e^{-\frac{pT}{2}}\right)}=\frac{2\left(e^{\frac{pT}{4}}-e^{-\frac{pT}{4}}\right)}{p^2T\left(e^{\frac{pT}{4}}+e^{-\frac{pT}{4}}\right)}=\frac{2\operatorname{sh}\frac{pT}{4}}{Tp^2\operatorname{ch}\frac{pT}{4}}.$$

Перейдя к лаплас-образам в обеих частях уравнения (1) (начальные условия нулевые, т. е. $y(0)=0$, $\dot y(0)=0$), получим требуемое уравнение для лаплас-образа $Y(p)$ неизвестной функции $y(t)$

$$\left(p^2+2\delta p+\omega_0^2\right)Y(p)=F(p),$$

из которого находим, с учетом явного вида лаплас-образа $F(p)$, требуемое соотношение для лаплас-образа функции $y(t)$:

$$Y(p)=\frac{2F_0}{mT}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{pT}{4}}{p^2\operatorname{ch}\frac{pT}{4}\left(p^2+2\delta p+\omega_0^2\right)}=\frac{2F_0}{mT}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{pT}{4}}{B(p)}.$$

Функцию-оригинал, отвечающую полученному лаплас-образу $Y(p)$, найдем, используя основную теорему обращения [4]:

$$y(t)=\sum\operatorname{Res}\left(Y(p)e^{pt}\right)+\sum 2\operatorname{Re}\operatorname{Res}\left(Y(p)e^{pt}\right), \qquad (3)$$

где первая сумма берется по всем действительным корням функции $B(p)$, а вторая сумма – по комплексным корням функции $B(p)$, лежащим в верхней полуплоскости.

Функция $B(p)=p^2\operatorname{ch}\frac{pT}{4}\left(p^2+2\delta p+\omega_0^2\right)$ имеет бесконечно много нулей в точках $p=p_n$, являющихся корнями уравнения $\operatorname{ch}\frac{pT}{4}=0$, $\frac{p_nT}{4}=i\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $p_n=\frac{i2\pi(2n+1)}{T}=i\omega(2n+1)$ ($\omega=\frac{2\pi}{T}$ – циклическая частота колебаний), $n=0,1\ldots$ Нулю функции $B(p)$ отвечает простой полюс функции $Y(p)$ в точке $p=p_n$. Вычет функции $Y(p)e^{pt}$ в простом полюсе p_n находим по формуле [3]:

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(Y(p)e^{pt}\right)=\frac{2F_0}{mT}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{pT}{4}e^{p_nt}}{B'(p_n)}. \qquad (4)$$

Производная функции

$$B'(p)=\frac{T}{4}\operatorname{sh}\frac{pT}{4}p^2\left(p^2+2\delta p+\omega_0^2\right)+\operatorname{ch}\frac{pT}{4}\left(p^2\left(p^2+2\delta p+\omega_0^2\right)\right)'_p,$$

поэтому (с учетом явного выражения для $p_n = i\omega(2n+1)$)

$$B'(p_n) = \frac{T}{4}\operatorname{sh}\frac{p_nT}{4}\left(-\omega^2(2n+1)^2\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2(2n+1) + 2i\delta\omega(2n+1)\right) =$$

$$= \frac{T}{4}\operatorname{sh}\frac{p_nT}{4}\,\omega^2(2n+1)^2\left(\omega^2(2n+1)^2 - \omega_0^2 - 2i\delta\omega(2n+1)\right).$$

Подставляем полученное выражение для $B'(p_n)$ в равенство (4):

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(Y(p)e^{pt}\right) = \frac{2F_0}{mT}\cdot\frac{4\operatorname{sh}\frac{p_nT}{4}e^{i\omega(2n+1)}}{T\omega^2\operatorname{sh}\frac{p_nT}{4}(2n+1)^2\left(\omega^2(2n+1)^2 - \omega_0^2 - 2i\delta\omega(2n+1)\right)} =$$

$$= \frac{8F_0}{m(T\omega)^2}\cdot\frac{\left(\omega^2(2n+1)^2 - \omega_0^2 + 2i\delta\omega(2n+1)\right)\left(\cos\omega(2n+1)t + i\sin\omega(2n+1)t\right)}{(2n+1)^2\left(\left(\omega^2(2n+1)^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4(\delta\omega)^2(2n+1)^2\right)}\ .$$

Выделив в полученном соотношении действительную часть, после элементарных преобразований окончательно представим в следующем виде (с учетом равенства $T\omega = 2\pi$):

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(Y(p)e^{pt}\right) = \frac{2F_0}{m\pi^2}\cdot\frac{\cos\left(\omega(2n+1)t + \varphi_n\right)}{(2n+1)^2\sqrt{\left(\omega^2(2n+1)^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4(\delta\omega)^2(2n+1)^2}}, \qquad (5)$$

где $\operatorname{tg}\varphi_n = \dfrac{2\delta\omega(2n+1)}{\omega^2(2n+1)^2 - \omega_0^2}$.

Разлагая гиперболический синус в ряд Маклорена, представим лаплас-образ $Y(p)$ в виде

$$Y(p) = \frac{2F_0}{mT}\cdot\frac{\frac{pT}{4}\left(1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2 + \text{K}\right)}{p^2\operatorname{ch}\frac{pT}{4}\left(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2\right)} = \frac{F_0}{2m}\cdot\frac{1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2 + \text{K}}{p\operatorname{ch}\frac{pT}{4}\left(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2\right)}.$$

Как видно из этого соотношения, точка $p = 0$ является полюсом 1-го порядка, поэтому получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left(Y(p)e^{pt}\right) = \frac{F_0}{2m}\cdot\lim_{p\to 0}\left[p\frac{1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2 + \text{K}}{p\operatorname{ch}\frac{pT}{4}\left(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2\right)}\right] = \frac{F_0}{2m\omega_0^2}\ . \qquad (6)$$

Функция $B(p)$ имеет также два простых комплексно сопряженных нуля $p_1=-\delta+iv$, $\overline{p_1}=-\delta-iv$ ($v=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$), являющихся корнями уравнения $p^2+2\delta p+\omega_0^2=0$.

Представив лаплас-образ $Y(p)$ в виде

$$Y(p)=\frac{2F_0}{mT}\cdot\frac{\mathrm{sh}\frac{pT}{4}}{p^2\mathrm{ch}\frac{pT}{4}(p-p_1)\left(p-\overline{p_1}\right)},$$

вычисляем вычет в простом полюсе $p=p_1$:

$$\operatorname*{Res}_{p=p_1}\left(Y(p)e^{pt}\right)=\frac{2F_0}{mT}\cdot\lim_{p\to p_1}\left[(p-p_1)\frac{\mathrm{sh}\frac{pT}{4}e^{p_1t}}{p^2\mathrm{ch}\frac{pT}{4}(p-p_1)\left(p-\overline{p_1}\right)}\right]=$$

$$\frac{2F_0}{mT}\cdot\frac{\mathrm{sh}\frac{p_1T}{4}e^{p_1t}}{(2iv)\,p_1^2\mathrm{ch}\frac{p_1T}{4}}=\frac{F_0}{mTv}\cdot\frac{\mathrm{sh}\frac{T(-\delta+iv)}{4}}{i\mathrm{ch}\frac{T(-\delta+iv)}{4}}\cdot\frac{e^{-\delta t}e^{ivt}}{(-\delta+iv)^2}. \qquad (7)$$

Дробь с гиперболическими функциями после элементарных вычислений (в процессе вычислений используем равенства $\mathrm{ch}ix=\cos x$, $\mathrm{sh}ix=i\sin x$ и необходимые тождества для гиперболических функций) приводится к виду

$$\frac{\mathrm{sh}\frac{T(-\delta+iv)}{4}}{i\mathrm{ch}\frac{T(-\delta+iv)}{4}}=\frac{\sin\frac{vT}{2}+i\mathrm{sh}\frac{vT}{2}}{2\left(\cos^2\frac{vT}{4}+\mathrm{sh}^2\frac{T\delta}{4}\right)}.$$

Подставляя это соотношение в равенство (7), приводим его к виду:

$$\operatorname*{Res}_{p=p_1}\left(Y(p)e^{pt}\right)=\frac{F_0e^{-\delta t}}{mTv}\cdot\frac{\left(\sin\frac{vT}{2}+i\mathrm{sh}\frac{vT}{2}\right)(\delta^2-v^2+2iv\delta)e^{ivt}}{2\left((\delta^2-v^2)^2+4(v\delta)^2\right)\left(\cos^2\frac{vT}{4}+\mathrm{sh}^2\frac{T\delta}{4}\right)}.$$

Выделяем в полученном выражении действительную часть и окончательно получаем:

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_1}\left(Y(p)e^{pt}\right)=\frac{F_0e^{-\delta t}}{mTv\omega_0^2}\cdot\frac{\sqrt{\sin^2\frac{vT}{2}+\mathrm{sh}^2\frac{T\delta}{2}}\cos(vt+\varphi_0)}{2\left(\cos^2\frac{vT}{4}+\mathrm{sh}^2\frac{T\delta}{4}\right)}=$$

$$=\frac{F_0 e^{-\delta t}}{mTv\omega_0^2}\cdot\frac{\sqrt{\sin^2\frac{vT}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{T\delta}{2}}\cos(vt+\varphi_0)}{\cos\frac{vT}{2}+\operatorname{ch}\frac{T\delta}{2}}, \text{ где } \operatorname{tg}\varphi_0=\frac{(\delta^2-v^2)\operatorname{sh}\frac{T\delta}{2}+2v\delta\sin\frac{vT}{2}}{(\delta^2-v^2)\sin\frac{vT}{2}-2v\delta\operatorname{sh}\frac{T\delta}{2}}.$$

Все полученные соотношения для вычетов (5), (6), (8) подставляем в формулу (2) и получаем решение задачи

$$y(t)=2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_1}\left(Y(p)e^{pt}\right)+\operatorname*{Res}_{p=0}\left(Y(p)e^{pt}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(Y(p)e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{2F_0}{mTv\omega_0^2}\cdot\frac{\sqrt{\sin^2\frac{vT}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{T\delta}{2}}e^{-\delta t}\cos(vt+\varphi_0)}{\cos\frac{vT}{2}+\operatorname{ch}\frac{T\delta}{2}}+\frac{F_0}{2m\omega_0^2}+$$

$$+\frac{4F_0}{m\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\omega(2n+1)t+\varphi_n\right)}{(2n+1)^2\sqrt{\left(\omega^2(2n+1)^2-\omega_0^2\right)^2+4(\delta\omega)^2(2n+1)^2}}.$$

Первое слагаемое в полученном решении описывает собственные колебания системы, которые из-за экспоненциального множителя быстро затухают со временем. Поэтому в установившемся режиме колебаний (при $t\to+\infty$) осциллятор совершает вынужденные колебания под действием внешней силы.

Список литературы

1 *Голдстейн, Г.* Классическая механика / Г. Голдстейн. – М. : Наука, 1975. – 416 с.
2 *Ландау, Л. Д.* Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 216 с.
3 *Пчелин, Б. К.* Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление / Б. К. Пчелин. – М. : Высш. шк., 1973. – 464 с.
4 *Свешников, А. Г.* Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1974. – 320 с.

УДК 512.76.001.57

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ В БИОМЕХАНИКЕ СПОРТА В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

М. А. КИРКОР, А. Е. ПОКАТИЛОВ, А. М. ГАЛЬМАК, Ю. В. ВОРОНОВИЧ
Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, г. Могилев

Во многих видах спорта движение спортсмена является пространственным. При этом сложилось несколько вариантов проведения исследования