

УДК 621.865.8:531.8

*А. В. ЛОКТИОНОВ, А. А. СИДОРОВИЧ*

*Витебский государственный технологический университет, Витебск, Беларусь*

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЦЕНТРА СХВАТА ПРОМЫШЛЕННОГО РОБОТА IRB 1400**

Рассматривается кинематический анализ многозвенного пространственного разомкнутого шарнирного механизма промышленного робота IRB 1400. Представлены математические соотношения, позволяющие осуществить матричным методом определение скорости и ускорения центра схвата робота в неподвижной и подвижных системах координат.

**Ключевые слова:** робот IRB 1400, матричный способ, центр схвата, подвижная система отсчета.

Значительное число технологических операций на современных промышленных предприятиях выполняется роботами-манипуляторами. Их применение позволяет исключить ручной труд и добиться высокого качества выполнения работ [1]. Чтобы оценить технические возможности существующих и проектируемых промышленных роботов, необходимо произвести кинематический анализ их движения [2].

Известны несколько методов расчетов геометрических и кинематических параметров, которые могут быть использованы для исследования механизмов роботов-манипуляторов [3–6]. Векторный метод, при котором находятся проекции звеньев механизма на неподвижные оси координат, а затем дифференцированием выражений координат вычисляются проекции скорости и ускорения, удобнее всего использовать в случае расположения звеньев в одной плоскости [5]. Матричный метод связан с рассмотрением перемещений звеньев манипулятора как движения подвижного трехмерного пространства в неподвижном [7]. В таком случае математическое описание движения осуществляется путем комбинирования операций параллельного переноса и поворота. Все виды движений в этом случае рассматриваются на основе единого алгоритма. Используя транспонированные матрицы перехода, удастся определить скорость и ускорение требуемой точки механизма в подвижной системе координат.

Ранее в работе [8] было рассмотрено определение скорости центра схвата робота IRB 1400 в неподвижной системе координат. Однако не найдены его скорость в подвижной системе отсчета, а также ускорения в различных базисах. Целью представленной работы является разработка алгоритма нахождения кинематических параметров в подвижной системе отсчета, связанной с центром схвата, как это рассмотрено, например, в работах [9, 10].

**Конструкция робота.** Промышленный робот IRB 1400 (рисунок 1, *а*) представляет собой автоматическое устройство, которое состоит из исполнительного механизма в виде манипулятора и механизма программного управления. Он используется для сварки, нанесения различного рода покрытий и иных работах, где необходимо перемещение инструмента или груза небольшой массы. Такой робот используется и в лёгкой промышленности [6]. В частности, он установлен на обувном предприятии «Марко» и выполняет операцию нанесения разделительной смазки на прессформу, в которой изготавливается полиуретановая подошва и заготовка верха обуви, одетая на колодку.

Рассматриваемый манипулятор робота включает основание, нижнюю и верхнюю руки и обладает шестью степенями свободы (рисунок 1, *б*). Изменение каждого из соответствующих углов осуществляется с помощью отдельного электродвигателя. Ось 1 обеспечивает вращение манипулятора по отношению к основанию, ось 2 – движение вперед и назад нижней руки, которая образует вместе с параллельной штангой параллелограмм, связанный с верхней рукой. Ось 3 поднимает верхнюю руку манипулятора. Находящийся на ней двигатель оси 4 вращает верхнюю руку, на конце которой закреплен кистевой сустав, охватывающий оси 5 и 6. Они образуют крест и предназначены соответственно для качания и вращения. На конце кистевого сустава располагается монтажный фланец для различных инструментов.

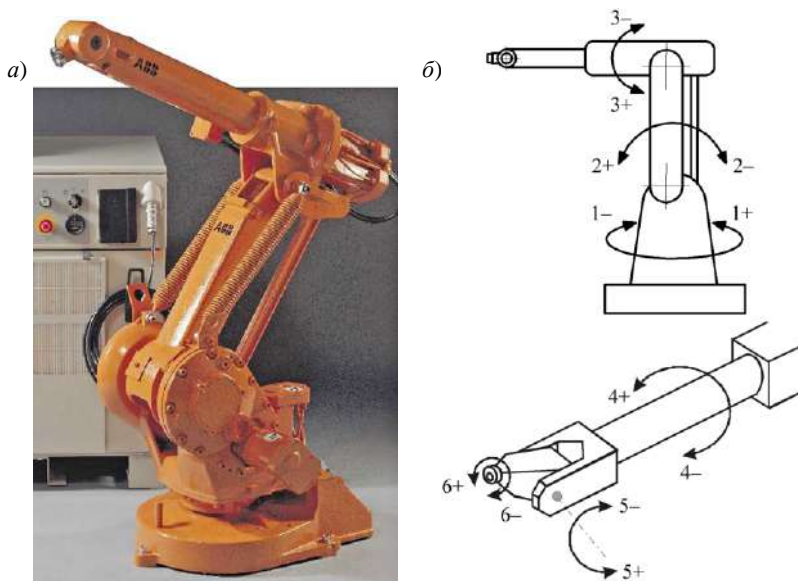


Рисунок 1 – Робот-манипулятор IRB 1400 (*а*) и схема вращения его звеньев (*б*)

Расчетная схема для кинематического анализа механизма манипулятора робота IRB 1400 представлена на рисунке 2. Рассмотрим ее особенности.

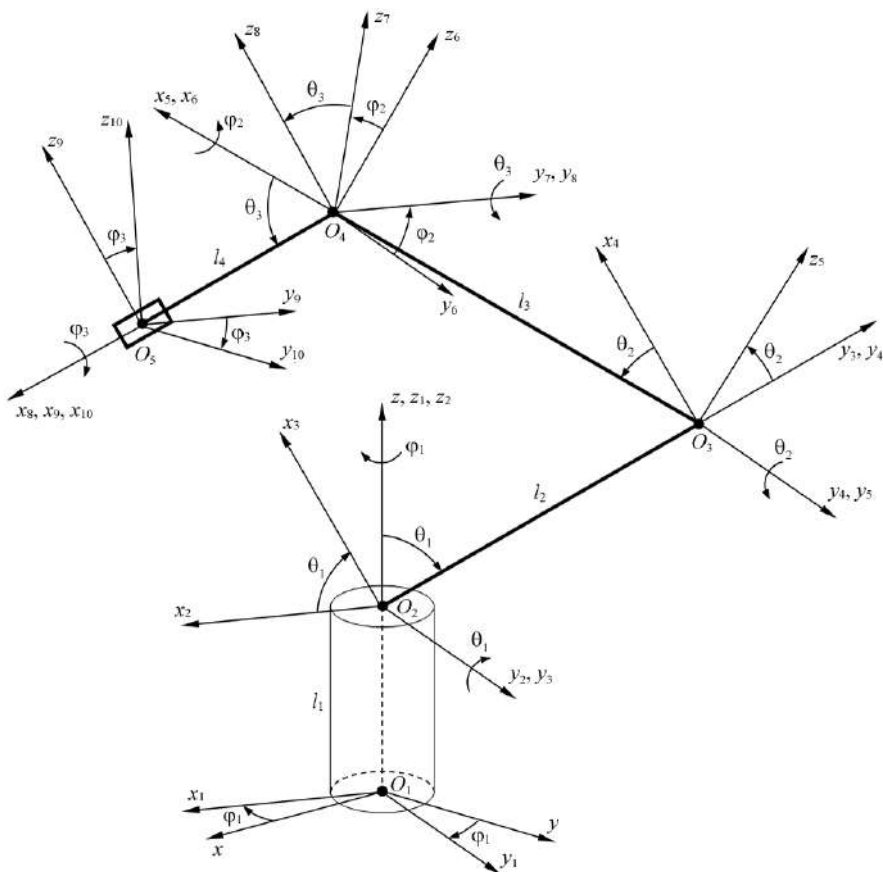


Рисунок 2 – Схема манипулятора робота IRB 1400

Подвижная система координат  $x_1y_1z_1$  получается поворотом неподвижной  $xyz$  на угол  $\varphi_1$ . Затем, смещая начало координат  $O_1$  на расстояние  $l_1$  до положения  $O_2$ , изображаем такую систему  $x_2y_2z_2$ , в вертикальной плоскости которой  $x_2O_2z_2$  перемещаются оси звеньев механизма. Далее поворотом системы  $x_2y_2z_2$  вокруг оси  $O_2y_2$  на угол  $\theta_1$  получаем систему  $x_3y_3z_3$ . Перемещая начало координат  $O_2$  на расстояние  $l_2$ , приходим к системе координат  $x_4y_4z_4$ . Ее поворотом на угол  $\theta_2$  вокруг оси  $O_3y_4$  получаем систему осей  $x_5y_5z_5$ , которая затем перемещением на расстояние  $l_3$  переводится в  $x_6y_6z_6$ . Следующее преобразование поворотом вокруг оси  $O_4x_6$  на угол  $\varphi_2$  переводит систему коор-

динат  $x_6y_6z_6$  в  $x_7y_7z_7$ . В свою очередь, поворот ее на угол  $\theta_3$  вокруг оси  $O_4y_7$  приводит к системе осей  $x_8y_8z_8$ , а ее перемещение на расстояние  $l_4$  дает систему координат  $x_9y_9z_9$ . Завершающее преобразование поворотом на угол  $\varphi_3$  вокруг оси  $O_5x_9$  переводит данную систему в  $x_{10}y_{10}z_{10}$ .

Для каждого преобразования осей последовательно составляем матрицы, устанавливающие связь между рассматриваемыми системами координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = A_{\theta_2} \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} = A_{\varphi_2} \begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \\ z_7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \\ z_7 \end{pmatrix} = A_{\theta_3} \begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \\ z_7 \end{pmatrix} = A_{\theta_3} \begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{pmatrix} = A_{\varphi_3} \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix},$$

Выражения координат центра схвата в неподвижной системе отчета  $xuz$  получаем через координаты в системе  $x_{10}y_{10}z_{10}$  последовательной подстановкой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} =$$

$$= A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} =$$

$$= A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix} =$$

$$= A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix}.$$

где

$$A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_{\theta_1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix};$$

$$A_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}; \quad A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix};$$

$$A_{\theta_3} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \end{pmatrix}; \quad A_{\varphi_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 \\ 0 & -\sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения скорости  $\bar{v}$  центра схвата по отношению к неподвижной системе  $xuz$  выполняем дифференцирование координат по времени, учитывая, что  $l_i = \text{const}$ ,  $x_{10} = \text{const}$ ,  $y_{10} = \text{const}$ ,  $z_{10} = \text{const}$ ):

$$\begin{aligned} \bar{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \left( \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \left( \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \right) \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \left( \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_2 + \right. \\ &+ \left. A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3 \right) \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_1 + \\ &+ A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3 \left) \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \left( \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_2 + \right. \\ &+ \left. A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_3 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_3 \right) \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\dot{A}_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ -\cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \dot{A}_{\theta_1} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 \end{pmatrix};$$

$$\dot{A}_{\theta_2} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \end{pmatrix}; \quad \dot{A}_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_2 & -\cos \varphi_2 \\ 0 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \end{pmatrix};$$

$$\dot{A}_{\theta_3} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_3 & 0 & -\sin \theta_3 \end{pmatrix}; \quad \dot{A}_{\varphi_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \\ 0 & -\cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \end{pmatrix}.$$

Выполняя преобразования в соответствии с приведенной формулой, можно записать выражения проекций на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Например, проекция скорости на ось  $x$  при условии, что  $x_{10} = 0$ ,  $y_{10} = 0$ ,  $z_{10} = 0$ , имеет вид

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} = & (\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1) l_2 + (-\dot{\varphi}_1 (\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\ & + \sin \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_1 (-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2) + \\ & + \dot{\theta}_2 (-\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2)) l_3 + \\ & + (\dot{\varphi}_1 ((-\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \cos \theta_3 - \\ & - (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + (-\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2) \cos \varphi_2) \sin \theta_3) + \\ & + \dot{\theta}_1 ((-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2) \cos \theta_3 - \\ & - (-\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \cos \varphi_2 \sin \theta_3) + \\ & + \dot{\theta}_2 ((-\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2) \cos \theta_3 - \\ & - (\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \cos \varphi_2 \sin \theta_3) - \\ & - \dot{\varphi}_2 (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - (-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2) \sin \varphi_2) \sin \theta_3 + \\ & + \dot{\theta}_3 (-(\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \sin \theta_3 - \\ & - (-\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + (-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \\ & + \cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2) \cos \varphi_2) \cos \theta_3) l_4. \end{aligned}$$

Выражения остальных проекций приводить не будем из-за их громоздкости. Модуль скорости центра схвата рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \\ = \left( l_2^2 + 2 \left( \sin \theta_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) l_3 + \left( \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1) + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \cos \theta_2 + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\varphi}_1 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 + \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_3 \cos \theta_2 \Big) l_4 \Big) l_2 + \\
& + (\dot{\varphi}_1^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2) l_3^2 + 2 \Big( (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 - 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1) \cos \theta_3 \cos \varphi_2 + \\
& + (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\varphi}_1 \cos \theta_3 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_2 + (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2 \Big) l_3 l_4 + \\
& + \Big( 2(\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3) + \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 \Big) l_4^2 \Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

В свою очередь вектор скорости  $\bar{v}$  центра схвата в системе  $x_{10}y_{10}z_{10}$

$$\bar{v}_{10} = \bar{v} A^T, \quad (1)$$

где  $A^T$  – транспонированная матрица, которая равна произведению транспонированных матриц-смножителей, взятых в обратном порядке:

$$A^T = A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T,$$

$$\text{где } A_{\varphi_1}^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_{\theta_1}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix};$$

$$A_{\varphi_2}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ 0 & -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}; \quad A_{\theta_2}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix};$$

$$A_{\varphi_3}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix}; \quad A_{\theta_3}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & -\sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученное ранее выражение скорости  $\bar{v}$  в (1), получаем выражение скорости в подвижной системе координат для случая  $l_i = \text{const}$

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{10} = A^T \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\
&+ \left( A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + \\
&+ \left( A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \right) \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3 \right) \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \left( A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_2 + A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3 + A_{\varphi_3}^T \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_3 \right) \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда проекции этого вектора на подвижные оси  $x_{10}$ ,  $y_{10}$  и  $z_{10}$ :

$$\begin{aligned}
v_{10_x} &= (\sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 - \cos \theta_3 \cos \theta_2) l_2 + \\
& + (\dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_1 \sin \theta_3 \sin \varphi_2 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_3 \cos \varphi_2) l_3; \\
v_{10_y} &= (\dot{\theta}_2 \sin \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 - \varphi_1 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 + \dot{\theta}_1 \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 - \\
& - \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_3 \cos \theta_3 \sin \varphi_2 - \dot{\theta}_1 \sin \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 - \dot{\theta}_2 \cos \varphi_3 \sin \varphi_2) l_3 + \\
& + (\dot{\theta}_2 \sin \varphi_3 + \dot{\theta}_3 \sin \varphi_3 - \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_3 - \dot{\theta}_1 \sin \varphi_3) l_4 + \\
& + (\sin \theta_2 \sin \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_3 \sin \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \varphi_3 \sin \varphi_2) l_2; \\
v_{10_z} &= (-\sin \theta_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_3 \sin \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2) l_2 + \\
& + (-\dot{\theta}_2 \cos \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_3 \cos \theta_3 \sin \varphi_2 + \\
& + \dot{\theta}_1 \cos \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 + \dot{\theta}_1 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 - \dot{\theta}_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2) l_3 + \\
& + (\dot{\theta}_1 \cos \varphi_3 - \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_3 - \dot{\theta}_2 \cos \varphi_3 - \dot{\theta}_3 \cos \varphi_3) l_4.
\end{aligned}$$

Модуль этой скорости определяется по формуле

$$v_{10} = \sqrt{v_{10_x}^2 + v_{10_y}^2 + v_{10_z}^2}.$$

Ускорение центра схвата в системе  $x_{10} y_{10} z_{10}$  определяем дифференцированием скорости по времени:

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \left( \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + \ddot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1^2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\
& + \left( \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + \ddot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{\varphi}_1^2 + A_{\varphi_1} \ddot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + \\
& + \left( \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + \ddot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\varphi}_1^2 + A_{\varphi_1} \ddot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\theta}_1^2 + \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \ddot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \Big) \begin{pmatrix} I_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \left( \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \ddot{\theta}_2 + \right. \\
& + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \ddot{\varphi}_2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \ddot{\theta}_3 + \ddot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_1^2 + \\
& + A_{\varphi_1} \ddot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_1^2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \ddot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_2^2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \ddot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_2^2 + \\
& + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \ddot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3^2 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + \\
& + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\
& + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_2 + \\
& \left. + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_3 \right) \begin{pmatrix} I_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \left( \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \ddot{\theta}_2 + \right. \\
& + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \ddot{\theta}_3 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \ddot{\varphi}_3 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \ddot{\varphi}_2 + \\
& + \ddot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1^2 + A_{\varphi_1} \ddot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_1^2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \ddot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_2^2 + \\
& + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \ddot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_2^2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \ddot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_3^2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \ddot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_3^2 + \\
& + 2 \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \\
& + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + \\
& + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \\
& + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_3 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_2 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \\
& + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_3 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_3 + \\
& \left. + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_3 \dot{\varphi}_3 \right) \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где  $\ddot{A}_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\ddot{A}_{\theta_1} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 \end{pmatrix}$ ;

$$\ddot{A}_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ 0 & -\sin \varphi_2 & -\cos \varphi_2 \end{pmatrix}; \quad \ddot{A}_{\theta_2} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 \end{pmatrix};$$

$$\ddot{A}_{\varphi_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_3 & -\cos \varphi_3 \end{pmatrix}; \quad \ddot{A}_{\theta_3} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_3 & 0 & -\sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & -\cos \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Выражения проекций вектора ускорения на неподвижные оси координат  $x, y, z$  находятся из полученного выражения вектора скорости аналогично соответствующим проекциям скорости. Здесь их приводить не будем из-за громоздкости. Модуль ускорения центра схвата находится по формуле

$$a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Определение вектора ускорения центра схвата по отношению к подвижной системе  $x_{10}y_{10}z_{10}$  выполняется по той же схеме, что и в случае вектора скорости. Для этого используется формула

$$\bar{a}_{10} = A^T \bar{a}.$$

В результате подстановки полученных ранее выражений имеем

$$\begin{aligned} \bar{a}_{10} = A^T \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = & \left( A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\ & + \left( A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1^2 + \right. \\ & + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1^2 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\varphi}_1 \ddot{\theta}_1 \left. \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + \\ & + \left( A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1^2 + \right. \\ & + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1^2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\varphi}_1 \ddot{\theta}_1 + \\ & + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\varphi}_1 \ddot{\theta}_1 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 \left. \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix} + \\ & + \left( A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\varphi_2} \ddot{\varphi}_2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \ddot{\theta}_3 + \right. \\ & + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1^2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1^2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2^2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\varphi_2} \ddot{\varphi}_2^2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \ddot{\theta}_3^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \\
& + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 + \\
& \quad + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_2 + \\
& \quad + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_3 \Big) \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \left( A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \ddot{\varphi}_2 + A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \ddot{\theta}_3 + A_{\varphi_3}^T \dot{A}_{\varphi_3} \ddot{\varphi}_3 + \right. \\
& + A_{\varphi_1}^T \ddot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1^2 + A_{\theta_1}^T \ddot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + A_{\theta_2}^T \ddot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + A_{\varphi_2}^T \ddot{A}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_2^2 + A_{\theta_3}^T \ddot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3^2 + A_{\varphi_3}^T \ddot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_3^2 + \\
& + 2A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + 2A_{\theta_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + 2A_{\varphi_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \\
& + 2A_{\theta_3}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + 2A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\
& + 2A_{\varphi_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 + 2A_{\theta_3}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_3 + \\
& + 2A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_2 + 2A_{\theta_3}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_3 + \\
& \left. + 2A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_3 \dot{\varphi}_3 \right) \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда можно достаточно просто найти проекции вектора ускорения центра схвата на подвижные оси координат  $x_{10}y_{10}z_{10}$ . Например, проекция на ось  $x_{10}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
a_{10_x} = \ddot{x}_{10} = & \left( -\ddot{\theta}_1 \cos \theta_3 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_3 \sin \theta_2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_3 \sin \varphi_2 + \right. \\
& + \ddot{\theta}_1 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 \cos \theta_2 - \\
& - 2\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_3 \cos \theta_2 + 2\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 \sin \theta_2 + \\
& \left. + 2\dot{\theta}_1^2 (\cos \theta_1)^2 \cos \theta_3 \sin \theta_2 + 2\dot{\theta}_1^2 (\cos \theta_1)^2 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 \cos \theta_2 \right) l_2 + \\
& + \left( -\dot{\varphi}_1^2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_3 - \ddot{\theta}_1 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 + \ddot{\theta}_2 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 - \ddot{\varphi}_1 \sin \theta_3 \sin \varphi_2 - \right. \\
& - \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_3 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \varphi_2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \varphi_2 \Big) l_3 + \\
& + \left( 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_3^2 - 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2^2 - \dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) l_4.
\end{aligned}$$

Модуль ускорения выражается через проекции формулой

$$a_{10} = \sqrt{a_{10_x}^2 + a_{10_y}^2 + a_{10_z}^2}.$$

Таким образом, в работе с применением матричного способа получены формулы скорости и ускорения центра схвата промышленного робота IRB 1400. Данные выражения могут быть использованы для оптимизации пространственных движений манипулятора, а также при оценке его динамических качеств.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Karabegović, I.** Industrial Robots : Design, Applications and Technology / I. Karabegović. – Hauppauge, NY : Nova Science Publishers, 2020. – 443 p.

2 **Лысова, О. С.** Технические возможности промышленных роботов в легкой промышленности / О. С. Лысова, А. В. Локтионов // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы междунар. науч.-техн. конф. : в 3 ч. – Могилев : Беларус.-Рос. ун-т, 2009. – Ч. 1. – С. 151–152.

3 Механика промышленных роботов : в 3 кн. / Е. И. Воробьев [и др.]. – М. : Высш. шк., 1988. – Кн. 1 : Кинематика и динамика. – 303 с.

4 **Воробьева, Н. С.** Динамический синтез алгоритмов управления манипулятором параллельно-последовательной структуры / Н. С. Воробьева, В. В. Жога, Л. В. Жога // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – Т. 21, № 12. – С. 706–715.

5 **Локтионов, А. В.** Расчет кинематических параметров исполнительного механизма / А. В. Локтионов, О. С. Лысова // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 24. – С. 293–299.

6 Positioning accuracy reliability analysis of industrial robots based on differential kinematics and saddlepoint approximation / P. Huang [et al.] // Mechanism and Machine Theory. – 2021. – Vol. 162. – Article 104367. – 18 p.

7 **Алам, М. М.** Kinematic modeling of six-axis industrial robot and its parameter identification: a tutorial / М. М. Alam, S. Ibaraki, K. Fukuda // International Journal of Automation Technology. – 2021. – Vol. 15, no. 5. – P. 599–610.

8 **Лысова, О. С.** Расчет кинематических параметров робота-манипулятора IRB 1400 предприятия «Марко» / О. С. Лысова, А. В. Локтионов // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. : в 3 ч. – Могилев : Беларус.-Рос. ун-т, 2010. – Ч. 1. – С. 119–120.

9 **Локтионов, А. В.** Расчёт кинематических параметров центра схвата промышленного робота «КОНТУР-002» / А. В. Локтионов, А. П. Прохоров // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2011. – № 3. – С. 92–101.

10 **Локтионов, А. В.** Расчёт кинематических параметров исполнительного механизма промышленного робота ТУР-10 / А. В. Локтионов, А. П. Прохоров // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2013. – № 4. – С. 47–57.

*A. V. LOKTIONOV, A. A. SIDOROVICH*  
*Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus*

#### KINEMATIC PARAMETERS DETERMINATION FOR THE INDUSTRIAL ROBOT IRB 1400 GRIPPER CENTER

The kinematic analysis of the multi-link spatial open articulated mechanism of the industrial robot IRB 1400 is considered. Mathematical relationships are presented that allow the matrix method to determine the speed and acceleration of the robot's gripping center in fixed and moving coordinate systems.

**Keywords:** IRB 1400 robot, matrix method, gripper center, moving reference system.

Получено 07.09.2021