

УДК 691-419:539.377

*А. Г. КОЗЕЛ**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель***ТЕРМОСИЛОВОЙ ИЗГИБ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, СВОБОДНО ЛЕЖАЩЕЙ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА**

Исследован термосиловой изгиб упругой трехслойной круговой пластины, свободно лежащей на упругом основании, работа которого описывается моделью Пастернака. Деформирование несущих слоев происходит в соответствии с гипотезами Кирхгофа, легкого относительно толстого заполнителя – с гипотезой Тимошенко. На контуре пластины установлена жесткая диафрагма. Краевая задача сводится к определению прогиба пластины, радиального перемещения срединной плоскости заполнителя относительно сдвига в нем и осадки основания за пределами пластины. Получено решение дифференциального уравнения четвертого порядка для прогиба в функциях Бесселя, через который выражены относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение. Частное аналитическое решение системы уравнений равновесия при произвольной осесимметричной нагрузке получено с помощью ядра Коши. Определены соответствующие граничным условиям константы интегрирования для случая произвольной осесимметричной нагрузки. Проведено численное исследование зависимости прогиба и осадки основания от его механических характеристик.

Ключевые слова: трехслойная пластина, термоупругость, основание Пастернака, осадка основания, осесимметричная нагрузка, ядро Коши.

Введение. При проектировании элементов конструкций и деталей машин стремятся создать функциональные и экономичные инженерные решения. Поэтому популярность приобрели многослойные композиты, обладающие рядом преимуществ по сравнению с традиционными однокомпонентными материалами. Сочетание физико-механических свойств разнородных материалов наряду с высокими прочностными и жесткостными характеристиками при минимальном удельном весе позволяет противостоять ряду негативных воздействий, возникающих при различных условиях эксплуатации. Внедрение композитных материалов в производство и строительство требует разработки эффективных, достоверных методов их расчета.

В монографиях [1–3] представлены основы механики многослойных конструкций. Термосиловые и терморadiационные воздействия на них рассмотрены в работах [4–6]. Статьи [7, 8] посвящены исследованию сжимаемости заполнителя в деформируемых упруго и упругопластически трехслойных круговых и прямоугольных пластинах. Неосесимметричное нагружение трехслойных пластин в своей плоскости изучалось в работе [9]. Осесимметричные колебания, возбуждаемые температурным воздействием, круглых пластин с изменяемой вдоль радиуса толщиной из функционально-градиентного материала исследованы в статьях [10, 11]. Собственные колебания ступенчатой круговой трехслойной пластины рассмотрены в работе [12]. Задачи динамики и статики композит-

ных пластин при взаимодействии с упругими основаниями решены в статьях [13, 14]. В работе [15] рассмотрен термосиловой изгиб связанных с двухпараметрическим основанием Пастернака сэндвич-пластин из функционально-градиентных материалов. В статье [16] на основе сравнения решений краевых задач о деформировании связанных с упругим основанием трехслойных круговых пластин, в которых использованы модели Винклера и Пастернака, сделан вывод о необходимости применения двухпараметрической модели.

Влияние механических характеристик материалов несущих слоев и заполнителя на перемещения и напряжения при изгибе связанной с основанием Пастернака упругой круговой сэндвич-пластины исследовано в статье [17]. Упругий и термоупругий изгиб под действием равномерно распределенных нагрузок круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, изучен в работах [18, 19]. В данной статье, в отличие от предыдущих публикаций, рассмотрен термосиловой изгиб упругой круговой трехслойной пластины, которая свободно лежит на основании Пастернака, под действием произвольной поперечной осесимметричной нагрузки.

Постановка краевой задачи. Рассмотрим термоупругий изгиб трехслойной круговой пластины радиуса R , свободно лежащей на основании Пастернака (рисунок 1). К верхнему несущему слою пластины приложена произвольная распределенная осесимметричная поперечная нагрузка интенсивностью q . Реакция упругого основания принимается в соответствии с моделью Пастернака [20]

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \left(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right), \quad (1)$$

где κ_0 , t_f – коэффициенты, характеризующие сжатие и сдвиг основания; запятой в нижнем индексе обозначена операция дифференцирования по координате r .

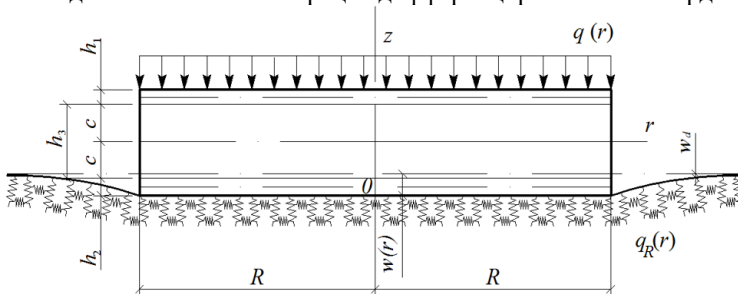


Рисунок 1 – Схема деформирования равномерно распределенной нагрузкой пластины при ее свободном опирании

Описание деформирования тонких и жёстких внешних слоев пластины толщиной h_1 и h_2 осуществляется с использованием гипотезы Кирхгофа. Для легкого несжимаемого по толщине срединного слоя (заполнителя) принята модель Тимошенко, радиальные перемещения распределены по толщине

$h_3 = 2c$ линейно, работа касательных напряжений не учитывается. Предполагается, что на контуре пластины расположена жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев.

Используется цилиндрическая система координат r, φ, z , связанная со срединной плоскостью заполнителя. Краевая задача сводится к определению четырех искомых функций: прогиба пластины $w(r)$, осадки основания $w_d(r)$ за пределами пластины, относительного сдвига $\psi(r)$ в заполнителе и радиального перемещения $u(r)$ координатной плоскости.

Физические уравнения, определяющие связь напряжений и деформаций в пластине, принимаются в виде ($\beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} s_{\beta}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \vartheta_{\beta}^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3(T_3) \vartheta_{rz}^{(3)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k \Delta T_k), \end{aligned} \quad (2)$$

где $s_{\beta}^{(k)}, \sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений слоя с номером k , Па; $\vartheta_{\beta}^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая часть тензора деформаций; $G_k(T_k), K_k(T_k)$ – зависящие от температуры модули сдвиговой и объёмной деформации материала, Па; α_k – коэффициент линейного температурного расширения; ΔT_k – приращение температуры, которое отсчитывается от некоторого начального значения T_0, K .

Полагаем, что зависимость от температуры модулей упругости несущих слоев определяется формулой Дж. Ф. Белла [21]

$$\begin{aligned} \{G_k(T), K_k(T)\} &= \{G_k(0), K_k(0)\} \varphi_{12}(T); \\ \varphi_{12}(T) &= \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < T/T_m \leq 0,06; \\ 1,03(1 - T/2T_m) & \text{при } 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases} \end{aligned}$$

а параметров упругости заполнителя (полимерного материала) – выражением, предложенным Э. И. Старовойтовым [3]

$$\begin{aligned} \{G_3(T), K_3(T)\} &= \{G_3(0), K_3(0)\} / \varphi_3(T); \\ \varphi_3(T) &= 1 + B[\Delta T / T_m]^{\gamma} \operatorname{sgn} \Delta T, \end{aligned}$$

где $G_k(0), K_k(0)$ – значения модулей упругости при температуре T_0 , принимаемой за начальную, Па; T_m – температура плавления материала, К; B, γ – параметры материала заполнителя, получаемые экспериментально; $\Delta T = T - T_0$.

Описывающая деформирование рассматриваемой пластины система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях получена в [19] с помощью принципа Лагранжа для общего случая, поэтому её можно использовать и здесь. Выражая внутренние усилия через перемещения с использованием (1), (2), получаем систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0,$$

$$\begin{aligned} L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) &= 0; \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) + t_f\Delta w - \kappa_0w &= -q, \end{aligned} \quad (3)$$

где L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы,

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}; \end{aligned}$$

a_i – коэффициенты, которые учитывают геометрические параметры и зависимость модулей упругости материалов слоев по толщине от температуры:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}^+; \quad a_2 = c(K_{10}^+ - K_{20}^+); \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}^+; \quad a_4 = K_{32}^+ + c^2(K_{10}^+ + K_{20}^+); \\ a_5 &= K_{32}^+ + c(K_{11}^+ - K_{21}^+); \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2}^+; \\ K_{km}^+ &= \int_{h_k} \left(K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k) \right) z^m dz, \quad m = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Во внешней по отношению к пластине области реакция основания отсутствует. Ее деформирование описывается однородным дифференциальным уравнением, которое имеет вид [22, с. 248]

$$\Delta w_d - \lambda^2 w_d = 0, \quad (4)$$

где
$$\lambda^2 = \frac{\kappa_0}{t_f \sqrt{\kappa_0 D}} = \frac{\sqrt{\kappa_0}}{t_f \sqrt{D}};$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Постановка краевой задачи завершается добавлением к системе (3) граничных условий на контуре свободно лежащей пластины ($r = R$)

$$\psi = 0, \quad T_r = 0, \quad M_r = 0, \quad Q = 0, \quad (5)$$

где T_r, M_r, Q – внутренние усилия на контуре пластины, выраженные через перемещения

$$\begin{aligned} T_r &= a_1 u_{,r} + a_7 \frac{u}{r} + a_2 \psi_{,r} + a_8 \frac{\psi}{r} - a_3 w_{,rr} - a_9 \frac{w_{,r}}{r} - T_t; \\ T_t &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 3K_k(T_k) \alpha_k \Delta T_k dz; \end{aligned}$$

$$M_r = a_3 u_{,r} + a_9 \frac{u}{r} + a_5 \Psi_{,r} + a_{11} \frac{\Psi}{r} - a_6 w_{,rr} - a_{12} \frac{w_{,r}}{r} - M_t ;$$

$$M_t = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 3K_k(T_k) \alpha_k \Delta T_k z dz ;$$

$$Q = M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = a_3 u_{,rr} + a_9 \frac{u_{,r} r - u}{r^2} + a_5 \Psi_{,rr} + a_{11} \frac{\Psi_{,r} r - \Psi}{r^2} - a_6 w_{,rrr} - a_{12} \frac{w_{,rr} r - w_{,r}}{r^2} + \frac{1}{r} \left(a_3 u_{,r} + a_9 \frac{u}{r} + a_5 \Psi_{,r} + a_{11} \frac{\Psi}{r} - a_6 w_{,rr} - a_{12} \frac{w_{,r}}{r} - a_9 u_{,r} - a_3 \frac{u}{r} - a_5 \frac{\Psi}{r} - a_{11} \Psi_{,r} + a_{12} w_{,rr} + a_6 \frac{w_{,r}}{r} \right) ;$$

$$a_7 = \sum_{k=1}^3 K_{k0}^- ; \quad a_8 = c(K_{10}^- - K_{20}^-) ; \quad a_9 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}^- ;$$

$$a_{10} = K_{32}^- + c^2 (K_{10}^- + K_{20}^-) ; \quad a_{11} = K_{32}^- + c (K_{11}^- - K_{21}^-) ; \quad a_{12} = \sum_{k=1}^3 K_{k2}^- ;$$

$$K_{km}^- = \int_{h_k} \left(K_k(T_k) - \frac{2}{3} G_k(T_k) \right) z^m dz , \quad m = 0, 1, 2.$$

Равенство прогибов на контуре пластины приводит к дополнительному условию

$$w(R) = w_d(R) . \quad (6)$$

Общее решение краевой задачи. Чтобы решить систему уравнений (3), используя первое уравнение, исключаем из второго и третьего функцию u . Теперь второе уравнение дает возможность исключения из первого и третьего функции ψ . Двукратное интегрирование первых двух полученных уравнений и преобразование третьего дает

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r} ; \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r} ;$$

$$w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - t_f D(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r}) + \kappa_0 D w = q D , \quad (7)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования;

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2} , \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2} .$$

Решение третьего уравнения системы (7) получено по методике, представленной в [18], в виде

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}kr) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}kr) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr) + w_p(r), \quad (8)$$

где C_5, C_6, C_7, C_8 – константы интегрирования; $J_0(\sqrt{a}kr), J_0(\sqrt{\bar{a}}kr)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr), H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка; $\kappa^4 = \kappa_0 D$, a и \bar{a} – коэффициенты, которые зависят от характеристик упругого основания [18]; $w_p(r)$ – частное решение уравнения.

Решение уравнения (4) в соответствии с [22] может быть записано в виде

$$w_d = C_9 I_0(\lambda kr) + C_{10} K_0(\lambda kr), \quad (9)$$

где C_9, C_{10} – константы интегрирования; $I_0(\lambda kr), K_0(\lambda kr)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода (функция Макдональда) нулевого порядка аргумента λkr .

Функции $H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr), H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr)$ неограниченно возрастают при $r = 0$, поэтому в решении (8) необходимо принять $C_6 = C_8 = 0$. Также искомое решение ограничено в начале координат, поэтому $C_2 = C_4 = 0$. Функция $I_0(\lambda kr)$ при $r \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, в то время как осадки упругого основания вдали от места приложения нагрузки пренебрежимо малы ($w_d \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$). Следовательно, необходимо положить $C_9 = 0$.

Таким образом, общее решение задачи об изгибе круговой упругой трехслойной пластины на основании Пастернака в температурном поле, соответствующее формулам (7)–(9), принимает вид

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r;$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r;$$

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}kr) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}kr) + w_p(r);$$

$$w_d = C_{10} K_0(\lambda kr), \quad (10)$$

где $C_1, C_3, C_5, C_7, C_{10}$ – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (5), (6).

Случай произвольной осесимметричной нагрузки. Построим частное решение $w_p(r)$ дифференциального уравнения (8), используя ядро Коши $K(r, s)$ [23, с. 122], в виде

$$w_p(r) = \int_0^r K(r, s) q_1(s) ds, \quad (11)$$

где $q_1 = qD$ – правая часть третьего уравнения системы (7).

Ядро Коши выражается через фундаментальные решения:

$$K(r, s) = B_1^{(1)}(s)J_0(\sqrt{a}kr) + B_2^{(1)}(s)H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr) + \\ + B_3^{(1)}(s)J_0(\sqrt{a}kr) + B_4^{(1)}(s)H_0^{(2)}(\sqrt{a}kr). \quad (12)$$

Функции $B_i^{(1)}(s)$ можно определить из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} B_1^{(1)}J_0(\sqrt{a}ks) + B_2^{(1)}H_0^{(1)}(\sqrt{a}ks) + B_3^{(1)}J_0(\sqrt{a}ks) + B_4^{(1)}H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) = 0; \\ B_1^{(1)}J_0'(\sqrt{a}ks) + B_2^{(1)}H_0^{(1)'}(\sqrt{a}ks) + B_3^{(1)}J_0'(\sqrt{a}ks) + B_4^{(1)}H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) = 0; \\ B_1^{(1)}J_0''(\sqrt{a}ks) + B_2^{(1)}H_0^{(1)''}(\sqrt{a}ks) + B_3^{(1)}J_0''(\sqrt{a}ks) + B_4^{(1)}H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) = 0; \\ B_1^{(1)}J_0'''(\sqrt{a}ks) + B_2^{(1)}H_0^{(1)'''}(\sqrt{a}ks) + B_3^{(1)}J_0'''(\sqrt{a}ks) + B_4^{(1)}H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) = 1, \end{cases} \quad (13)$$

где штрихами обозначены операции дифференцирования по параметру s .

Решая систему (13) методом Крамера, получим выражения для определения функций, составляющих ядро Коши:

$$B_1^{(1)}(s) = \frac{W_1^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}; \quad B_2^{(1)}(s) = \frac{W_2^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}; \quad B_3^{(1)}(s) = \frac{W_3^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}; \quad B_4^{(1)}(s) = \frac{W_4^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}, \quad (14)$$

где определители выражаются через функции Бесселя и их производные

$$W^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}ks) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}ks) & J_0(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'(\sqrt{a}ks) & H_0^{(1)'}(\sqrt{a}ks) & J_0'(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) \\ J_0''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(1)''}(\sqrt{a}ks) & J_0''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(1)'''}(\sqrt{a}ks) & J_0'''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) \end{vmatrix};$$

$$W_1^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} 0 & H_0^{(1)}(\sqrt{a}ks) & J_0(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) \\ 0 & H_0^{(1)'}(\sqrt{a}ks) & J_0'(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) \\ 0 & H_0^{(1)''}(\sqrt{a}ks) & J_0''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) \\ 1 & H_0^{(1)'''}(\sqrt{a}ks) & J_0'''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) \end{vmatrix};$$

$$W_2^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}ks) & 0 & J_0(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'(\sqrt{a}ks) & 0 & J_0'(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) \\ J_0''(\sqrt{a}ks) & 0 & J_0''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'''(\sqrt{a}ks) & 1 & J_0'''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) \end{vmatrix};$$

$$W_3^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)}(\sqrt{a\kappa s}) & 0 & H_0^{(2)}(\sqrt{a\kappa s}) \\ J_0'(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)'}(\sqrt{a\kappa s}) & 0 & H_0^{(2)'}(\sqrt{a\kappa s}) \\ J_0''(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)''}(\sqrt{a\kappa s}) & 0 & H_0^{(2)''}(\sqrt{a\kappa s}) \\ J_0'''(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)'''}(\sqrt{a\kappa s}) & 1 & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a\kappa s}) \end{vmatrix};$$

$$W_4^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)}(\sqrt{a\kappa s}) & J_0(\sqrt{a\kappa s}) & 0 \\ J_0'(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)'}(\sqrt{a\kappa s}) & J_0'(\sqrt{a\kappa s}) & 0 \\ J_0''(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)''}(\sqrt{a\kappa s}) & J_0''(\sqrt{a\kappa s}) & 0 \\ J_0'''(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)'''}(\sqrt{a\kappa s}) & J_0'''(\sqrt{a\kappa s}) & 1 \end{vmatrix}.$$

Частное решение (11) и ядро Коши (12) удовлетворяют условиям

$$w_p(0) = w_p'(0) = w_p''(0) = w_p'''(0) = 0;$$

$$K(s, s) = K'(s, s) = K''(s, s) = 0; \quad K'''(s, s) = 1, \quad (15)$$

что в ряде случаев удобно при получении констант интегрирования.

Решение для свободного опирания контура пластины. Используя граничные условия (5), получим систему четырех алгебраических уравнений:

$$\psi(R) = b_2 w_{,r}(R) + C_3 R = 0;$$

$$T_r(R) = a_1 u_{,r}(R) + a_7 \frac{u(R)}{R} + a_2 \psi_{,r}(R) - a_3 w_{,rr}(R) - a_9 \frac{w_{,r}(R)}{R} - T_t = 0;$$

$$M_r(R) = a_3 u_{,r}(R) + a_9 \frac{u(R)}{R} + a_5 \psi_{,r}(R) - a_6 w_{,rr}(R) - a_{12} \frac{w_{,r}(R)}{R} - M_t = 0;$$

$$Q(R) = a_3 u_{,rr}(R) + a_9 \frac{u_{,r}(R)R - u(R)}{R^2} + a_5 \psi_{,rr}(R) + a_{11} \frac{\psi_{,r}R}{R^2} - a_6 w_{,rrr}(R) -$$

$$- a_{12} \frac{w_{,rr}(R)R - w_{,r}(R)}{R^2} - \frac{1}{R} \left(a_9 u_{,r}(R) + a_3 \frac{u(R)}{R} +$$

$$+ a_{11} \psi_{,r}(R) - a_{12} w_{,rr}(R) - a_6 \frac{w_{,r}(R)}{R} - M_t \right) = 0. \quad (16)$$

Производные от прогиба, входящие в систему (16), –

$$w_{,r}(R) = C_5 b_3 + C_7 b_4 + w_{p,r}(R);$$

$$w_{,rr}(R) = C_5 b_5 + C_7 b_6 + w_{p,rr}(R); \quad (17)$$

$$w_{,rrr}(R) = C_5 b_7 + C_7 b_8 + w_{p,rrr}(R),$$

где

$$b_3 = -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R); \quad b_4 = -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R);$$

$$w_{p,r}(r) = \frac{d}{dr} \int_0^r K(r,s)q_1(s) ds = \int_0^r \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) ds + K(r,r)q_1(r);$$

$$b_5 = \frac{\kappa\sqrt{a}}{R} J_1(\sqrt{a}\kappa R) - \kappa^2 J_0(\sqrt{a}\kappa R); \quad b_6 = \frac{\kappa\sqrt{a}}{R} J_1(\sqrt{a}\kappa R) - \bar{a}\kappa^2 J_0(\sqrt{a}\kappa R);$$

$$w_{p,rr}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_0^r \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) ds \right] = \int_0^r \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds + \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) \Big|_{s=r};$$

$$b_7 = \sqrt{a}\kappa \frac{\sqrt{a}\kappa R J_0(\sqrt{a}\kappa R) - 2J_1(\sqrt{a}\kappa R)}{R^2} + \kappa^3 a \sqrt{a} J_1(\sqrt{a}\kappa R);$$

$$b_8 = \sqrt{a}\kappa \frac{\sqrt{a}\kappa R J_0(\sqrt{a}\kappa R) - 2J_1(\sqrt{a}\kappa R)}{R^2} + \kappa^3 \bar{a} \sqrt{a} J_1(\sqrt{a}\kappa R);$$

$$w_{p,rrr}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_0^r \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds \right] = \int_0^r \frac{\partial^3 K(r,s)}{\partial r^3} q_1(s) ds + \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) \Big|_{s=r}.$$

Учитывая условия (15), получаем производные от частного решения (11) и их значения на контуре:

$$w_{p,r}(r) = \int_0^r \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) ds; \quad w_{p,r}(R) = \int_0^R \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) ds \Big|_{r=R};$$

$$w_{p,rr}(r) = \int_0^r \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds; \quad w_{p,rr}(R) = \int_0^R \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds \Big|_{r=R};$$

$$w_{p,rrr}(r) = \int_0^r \frac{\partial^3 K(r,s)}{\partial r^3} q_1(s) ds; \quad w_{p,rrr}(R) = \int_0^R \frac{\partial^3 K(r,s)}{\partial r^3} q_1(s) ds \Big|_{r=R}.$$

Используя первые два из решений (10), с учетом выражений производных прогиба (17) систему (16) приведем к виду

$$\begin{cases} C_3 R + C_5 b_2 b_3 + C_7 b_2 b_4 = -b_2 w_{p,r}(R); \\ C_1 (a_1 + a_7) + C_5 k_1 + C_7 k_2 = w_{p1}^*(R) + T_t; \\ C_1 (a_3 + a_9) + C_5 k_3 + C_7 k_4 = w_{p2}^*(R) + M_t; \\ -\frac{a_3 + a_9}{R} C_1 + C_5 k_5 + C_7 k_6 = w_{p3}^*(R) - \frac{M_t}{R}, \end{cases} \quad (18)$$

где введены коэффициенты

$$k_1 = \frac{b_3}{R}(a_7b_1 - a_2b_2 - a_9) + b_5(a_1b_1 + a_2b_2 - a_3),$$

$$k_2 = \frac{b_4}{R}(a_7b_1 - a_2b_2 - a_9) + b_6(a_1b_1 + a_2b_2 - a_3),$$

$$k_3 = \frac{b_3}{R}(a_9b_1 - a_5b_2 - a_{12}) + b_5(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6),$$

$$k_4 = \frac{b_4}{R}(a_9b_1 - a_5b_2 - a_{12}) + b_6(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6),$$

$$k_5 = b_7(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6) + \frac{b_3}{R^2}(-b_1(a_3 + a_9) + a_{12} + a_6),$$

$$k_6 = b_8(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6) + \frac{b_4}{R^2}(-b_1(a_3 + a_9) + a_{12} + a_6),$$

$$w_{p1}^*(R) = -\frac{w_{p'',r}(R)}{R}(a_7b_1 - a_2b_2 - a_9) - w_{p',rr}(R)(a_1b_1 + a_2b_2 - a_3),$$

$$w_{p2}^*(R) = -\frac{w_{p'',r}(R)}{R}(a_9b_1 - a_5b_2 - a_{12}) - w_{p',rr}(R)(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6),$$

$$w_{p3}^*(R) = -\frac{w_{p'',r}(R)}{R^2}(-b_1(a_3 + a_9) + a_{12} + a_6) - w_{p',rrr}(R)(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6).$$

В результате решения системы (18) имеем константы интегрирования

$$C_1 = \frac{W_1}{W}, C_3 = \frac{W_2}{W}, C_5 = \frac{W_3}{W}, C_7 = \frac{W_4}{W}, \quad (19)$$

где определители

$$W = \begin{vmatrix} 0 & R & b_2b_3 & b_2b_4 \\ (a_1 + a_7) & 0 & k_1 & k_2 \\ (a_3 + a_9) & 0 & k_3 & k_4 \\ -\frac{(a_3 + a_9)}{R} & 0 & k_5 & k_6 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} -b_2w_{p'',r}(R) & R & b_2b_3 & b_2b_4 \\ w_{p1}^*(R) + T_t & 0 & k_1 & k_2 \\ w_{p2}^*(R) + M_t & 0 & k_3 & k_4 \\ w_{p3}^*(R) - \frac{M_t}{R} & 0 & k_5 & k_6 \end{vmatrix},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 0 & -b_2w_{p'',r}(R) & b_2b_3 & b_2b_4 \\ (a_1 + a_7) & w_{p1}^*(R) + T_t & k_1 & k_2 \\ (a_3 + a_9) & w_{p2}^*(R) + M_t & k_3 & k_4 \\ -\frac{(a_3 + a_9)}{R} & w_{p3}^*(R) - \frac{M_t}{R} & k_5 & k_6 \end{vmatrix},$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 0 & R & -b_2 w_{p,r}(R) & b_2 b_4 \\ (a_1 + a_7) & 0 & w_{p1}^*(R) + T_t & k_2 \\ (a_3 + a_9) & 0 & w_{p2}^*(R) + M_t & k_4 \\ -\frac{(a_3 + a_9)}{R} & 0 & w_{p3}^*(R) - \frac{M_t}{R} & k_6 \end{pmatrix},$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 0 & R & b_2 b_3 & -b_2 w_{p,r}(R) \\ (a_1 + a_7) & 0 & k_1 & w_{p1}^*(R) + T_t \\ (a_3 + a_9) & 0 & k_3 & w_{p2}^*(R) + M_t \\ -\frac{(a_3 + a_9)}{R} & 0 & k_5 & w_{p3}^*(R) - \frac{M_t}{R} \end{pmatrix}.$$

Из условия равенства прогибов на контуре пластины (6) следует выражение для константы интегрирования

$$C_{10} = \frac{C_5 J_0 (\sqrt{a} \kappa R) + C_7 J_0 (\sqrt{a} \kappa R) + w_p(R)}{K_0 (\lambda \kappa R)}. \quad (20)$$

Решение (10) с константами интегрирования (19), (20) описывает перемещение упругой круглой трехслойной пластины с легким заполнителем при свободном опирании на основании Пастернака в случае произвольной осесимметричной нагрузки, распределенной по внешней поверхности верхнего слоя.

Численный параметрический анализ. Результаты расчета изотермического изгиба трехслойной пластины радиуса $R = 1$ м, свободно лежащей на упругом основании, получены при помощи математического пакета Maple. Нагрузка интенсивностью $q = -1$ МПа принята равномерно распределенной по верхнему слою пластины. Толщины несущих слоев приняты постоянными: $h_1 = h_2 = 0,04$ м, заполнителя – $h_3 = 0,4$ м. Механические характеристики материалов слоев приняты в соответствии с [3]: сплав Д16-Т для внешних слоев – $G = 0,267 \cdot 10^5$ МПа, $K = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; фторопласт-4 для заполнителя – $G_3 = 90$ МПа, $K_3 = 345$ МПа.

На рисунке 2 представлены зависимости прогиба пластины и осадки основания за ее пределами при постоянном коэффициенте сдвига основания $t_f = 1$ МПа·м для различных коэффициентов сжатия κ_0 . При увеличении коэффициента сжатия основания прогиб пластины уменьшается, при этом оставаясь равномерным под пластиной. Осадка основания за пределами пластины убывает сопоставимо коэффициенту сжатия. На графиках (рисунок 3) показана осадка основания w_d за пределами пластины. Коэффициент сжатия основания принят постоянным: $\kappa_0 = 100$ МПа/м, а коэффициенты сдвига t_f различны.

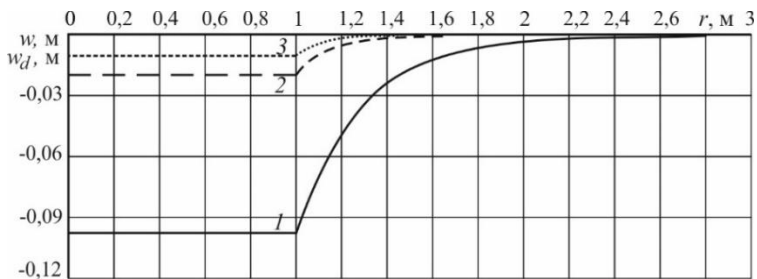


Рисунок 2 – Прогиб w и осадки основания w_d за границами пластины при постоянном коэффициенте сдвига основания $t_f = 1$ МПа·м:
 $1 - \kappa_0 = 10$ МПа/м; $2 - \kappa_0 = 50$ МПа/м; $3 - \kappa_0 = 100$ МПа/м

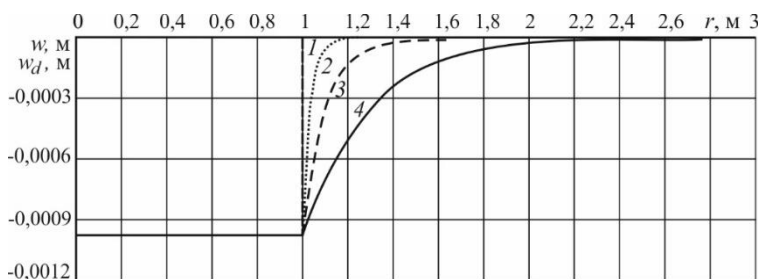


Рисунок 3 – Прогиб w и осадки основания w_d за границами пластины при постоянном коэффициенте сжатия основания $\kappa_0 = 100$ МПа/м:
 $1 - t_f = 0$; $2 - t_f = 0,1$ МПа·м; $3 - t_f = 1$ МПа·м; $4 - t_f = 10$ МПа·м

В случае $t_f = 0$, что соответствует модели Винклера, график идет по радиальной оси за пределами пластины, имея ступенчатый вид (кривая 1), так как перемещения за пределами пластины в этом случае отсутствуют, что вызывает сомнения в правомерности этой модели. При расчете в соответствии с моделью Пастернака увеличение коэффициента сдвига ведет к увеличению области за пределами пластины, в которой заметны осадки основания, а прогиб под пластиной остается постоянным.

Заключение. Предложенная в работе математическая модель, полученные общее и частное решения краевой задачи позволяют рассматривать осесимметричную нагрузку произвольного вида как равномерно распределенную, так и локально приложенную: круговую, кольцевую, погонную и т. д. Численный параметрический анализ показал существенную зависимость прогиба пластины и осадки основания за ее пределами пластины от параметров модели основания Пастернака.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т22М-072).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 2 **Reddy, J. N.** Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis / J. N. Reddy. – 2nd ed. – Boca Raton : CRC Press, 2003. – 858 p.
- 3 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 4 **Carrera, E.** Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F. A. Fazzolari, M. Cinefra. – Amsterdam : Academic Press, 2016. – 410 p.
- 5 **Старовойтов, Э. И.** Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.
- 6 **Pronina, P. F.** Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // *Periódico Tchê Química*. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.
- 7 **Захарчук, Ю. В.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 80–87.
- 8 **Зеленая, А. С.** Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Сер. Естественные науки*. – 2017. – № 6 (105). – С. 89–95.
- 9 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2020. – Вып. 35. – С. 246–252.
- 10 **Lal, R.** On radially symmetric vibrations of functionally graded non-uniform circular plate including non-linear temperature rise / R. Lal, R. Saini // *European journal of mechanics. A/Solids*. – 2019. – Vol. 77. – Article 103796.
- 11 **Saini, R.** Effect of thermal environment and peripheral loading on axisymmetric vibrations of non-uniform FG circular plates via generalized differential quadrature method / R. Saini, R. Lal // *Journal of vibration engineering*. – 2021. – Vol. 9. – P. 873–886.
- 12 **Маркова, М. В.** Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // *Механика. Исследования и инновации*. – 2021. – Вып. 14. – С. 147–158
- 13 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // *Механика композитных материалов*. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.
- 14 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2014. – № 1. – С. 59–63.
- 15 **Zenkour, A. M.** Thermomechanical bending response of functionally graded non-symmetric sandwich plates / A. M. Zenkour, N. A. Alghamdi // *Journal of Sandwich Structures and Materials*. – 2010. – Vol. 12, no. 1. – P. 7–46.

16 **Козел, А. Г.** Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А. Г. Козел // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

17 **Козел, А. Г.** Влияние материалов слоев на изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2022. – Вып. 36. – С. 21–26.

18 **Старовойтов, Э. И.** Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трёхслойной пластины / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2019. – № 2. – С. 107–114.

19 **Козел, А. Г.** Термосиловой изгиб упругой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации*. – 2021. – Вып. 14. – С. 90–96.

20 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Госстройиздат, 1954. – 56 с.

21 **Белл, Дж. Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых тел. Ч. 1. Малые деформации / Дж. Ф. Белл. – М. : Наука, 1984. – 600 с.

22 **Власов, В. З.** Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Физматлит, 1960. – 491 с.

23 **Тихонов, А. Н.** Курс высшей математики и математической физики. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М. : Наука, 1980. – 231 с.

A. G. KOZEL

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

THERMAL-FORCE BENDING OF AN ELASTIC THREE-LAYER PLATE FREELY LYING ON THE PASTERNAK FOUNDATION

There is investigated the thermal-force bending of an elastic three-layer circular plate lying freely on an elastic base, the operation of the plate is described by the Pasternak model. Deformation of the load-bearing layers occurs in accordance with the Kirchhoff's hypotheses, and of light filler relative to the thick one – with the Timoshenko's hypothesis. A rigid diaphragm is installed on the plate contour. The boundary value problem comes down to determining the plate deflection, the radial movement of the middle plane of the filler, the relative shear in it, and the drawdown of the base outside the plate. A solution to the fourth-order differential equation for deflection in the Bessel functions is obtained, the relative shift in the filler and radial displacement are expressed from it. A particular analytical solution to the system of equilibrium equations under an arbitrary axisymmetric load is obtained using the Cauchy kernel. The integration constants corresponding to the boundary conditions are determined for the case of an arbitrary axisymmetric load. A numerical analysis of the deflection and base drawdown dependence on its mechanical characteristics is carried out.

Keywords: three-layer plate, thermoelasticity, Pasternak foundation, foundation drawdown, axisymmetric load, Cauchy kernel.

Получено 08.10.2023.