10 **Vakhneev, S.** Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – 18(4). – P. 699–704.

11 **Pronina, P. F.** Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.

12 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

13 **Захарчук, Ю. В.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 80–87.

14 **Леоненко, Д. В.** Напряженно-деформированное состояние физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 2 (43). – С. 77–82.

15 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2017. – № 32. – С. 235–240.

16 **Козел, А. Г.** Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – № 34. – С. 165–171.

17 **Нестерович, А. В.** Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – № 13. – С. 116–121.

18 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – № 35. – С. 246–252.

19 Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, no 4. – P. 1023–1029.

УДК 539.374

ТЕРМОСИЛОВОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИН ПОГОННЫМИ СИЛАМИ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ, А. В. ЯРОВАЯ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

А. АБДУСАТТАРОВ
Ташкентский государственный транспортный университет, Республика Узбекистан

Монографии [1–5] посвящены разработке моделей деформирования трехслойных элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. Колебания и нестационарное нагружение неоднородных пластин и оболочек, в том числе связанных с упругим основанием, исследовались в публикациях [6–8]. Статьи [9–10] посвящены исследованию влияния нейтронного облучения на демпфирование колебаний и деформирование вязкоупругих тел. Математическая модель изгиба круговых трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем построена в работах [11–13]. В публикациях [14, 15] анализируются напряженно-деформированное состояние упругопластической трехслойной пластины, взаимодействующей с основанием Пастернака. Деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием неосесимметричных нагрузок рассмотрено в [16, 17]. Статья [18] посвящена исследованию деформирования композитной балки в температурном поле. Здесь исследовано деформирование в температурном поле несимметричных по толщине упругопластических трехслойных пластин с жестким заполнителем.

Кинематические допущения основаны на гипотезе «ломаной» нормали. Деформации малые. Перпендикулярно внешнему слою пластины действует распределенная по окружности силовая нагрузка погонная $q(r)$ и тепловой поток плотностью q_t:

$$q = Q_0 \delta(a - r).$$

Через $w(r)$ обозначен прогиб, $\psi(r)$ – дополнительный угол поворота нормали в заполнителе. На торце предполагаем наличие жесткой диафрагмы. Температурное поле в стержне считаем известным [1]. В слоях пластины используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k(T_k) f^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k) \text{э}_{ij}^{(k)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T_k) \qquad (k = 1, 2; \quad i, j = x, y, z),$$

где $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции физической нелинейности материалов слоев.

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины получены вариационным методом Лагранжа с учетом работы касательных напряжений в заполнителе. В случае погонной нагрузки соответствующая система дифференциальных уравнений в итерациях принимают вид:

$$\mathrm{L}_2(a_1u^{(n)} + a_2\psi^{(n)} - a_3w,_r^{(n)}) = p_\omega^{(n\text{-}1)},$$
$$\mathrm{L}_2(a_2u^{(n)} + a_4\psi^{(n)} - a_5w,_r^{(n)}) - 2cG_3\psi^{(n)} = h_\omega^{(n\text{-}1)},$$
$$\mathrm{L}_3(a_3u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6w,_r^{(n)}) = -Q_0\delta(a - r) + q_\omega^{(n\text{-}1)}.$$

где n – номер приближения; a_i – коэффициенты, определяемые через модули упругости материалов и толщины слоев при температуре T; L_2, L_3 – дифференциальные операторы [1].

Величины $p_\omega^{(n\text{-}1)}$, $h_\omega^{(n\text{-}1)}$, $q_\omega^{(n\text{-}1)}$ в правых частях уравнений служат поправками на нелинейность материалов слоев. Их называют дополнительными «внешними» нагрузками. На первом шаге приближения ($n = 1$) их принимают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения. Ее решение при погонной поперечной силе получено методом упругих решений, например прогиб,

$$\psi^{(n)} = C_2^{(n)}I_1(\beta r) + C_3K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)},$$

$$w^{(n)} = \frac{1}{b_3}\left[b_2\left(\frac{C_2^{(n)}}{\beta}I_0(\beta r) + \int \psi_r^{(n)}\,\mathrm{d}r\right) + \int\left(\frac{a_3}{a_1}\mathrm{L}_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + \mathrm{L}_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)})\right)\mathrm{d}r + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}C_1r^2(\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)}r^2}{4}\right] + C_6\ln r + C_4^{(n)},$$

$$u = \frac{a_3}{a_1}w,_r - \frac{a_2}{a_1}\psi + \frac{C_7r}{2} + \frac{C_8}{r},$$

где $I_1(\beta r)$, $K_1(\beta r)$ – функции Бесселя (модифицированная) и Макдональда; C_1, C_2, …, C_8 – константы интегрирования; L_2^{-1}, L_3^{-1} – интегральные операторы.

Явная зависимость перемещений от температуры при шарнирном опирании контура пластины определяется через константу интегрирования.

Полученные решения позволяют исследовать НДС трехслойных круговых пластин при осесимметричных погонных нагрузках. Численные результаты показали существенное влияние физической нелинейности материалов слоев и температуры на перемещения в пластине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т22УЗБ-015).

Список литературы

1 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

3 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск. : БГУ, 2021. – 535 с.

4 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

5 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.

6 **Fedotenkov, G. V.** Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, no 4. – P. 439–447.

7 **Вестяк, В. А.** Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости / В. А. Вестяк, А. С. Садков, Д. В. Тарлаковский // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – Т. 46, № 2. – С. 130–140.

8 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. − 2014. − № 1. − С. 59−63.

9 **Vakhneev, S.** Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – 18(4). – P. 699–704.
10 **Pronina, P. F.** Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.
11 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – № 10. – С. 55–66.
12 **Захарчук, Ю. В.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11. – С. 80–87.
13 **Леоненко, Д. В.** Напряженно-деформированное состояние физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 2 (43). – С. 77–82.
14 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2017. – № 32. – С. 235–240.
15 **Козел, А. Г.** Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – № 34. – С. 165–171.
16 **Нестерович, А. В.** Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – № 13. – С. 116–121.
17 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – № 35. – С. 246–252.
18 Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, no 4. – P. 1023–1029.

УДК 625.8

ИЗГИБ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ МОМЕНТНОЙ УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДВУХ УПРОЩАЮЩИХ ГИПОТЕЗ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
Московский авиационный институт (НИУ),
МГУ им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация

ДО НГОК ДАТ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Рассматривается нестационарный изгиб изотропных пластин в прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2. Процедура получения общих уравнений движения для этого случая рассмотрена в [1]. Там же приведены уравнения при использовании гипотезы об отсутствии обжатия. Для дальнейшего упрощения дополнительно применяется применятся гипотеза Кирхгофа – Лява [2, 3]. При этом уравнения движения и физические соотношения имеют вид

$$\ddot{w} = -r^2\Delta\Delta w + 4\alpha\left(\Delta w + \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\right) + p, \ddot{\omega}_1 = \gamma_2^{-2}\Delta\omega_1 + c_{02}\frac{\partial\theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha\upsilon\left(\omega_1 - \frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + \tilde{m}_{M1},$$
$$\ddot{\omega}_2 = \gamma_2^{-2}\Delta\omega_2 + c_{02}\frac{\partial\theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha\upsilon\left(\omega_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) + \tilde{m}_{M2}, \theta_\omega = \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}; \quad (1)$$

$$M_{11} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \kappa\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), M_{22} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \kappa\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right), M_{12} = M_{21} = -2\gamma_1^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2},$$
$$T_{13} = -T_{31} = 2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \omega_2\right), T_{23} = -T_{32} = 2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \omega_1\right), R_{11} = \gamma_0^{-2}\gamma_2^2\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} + \eta_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}, \quad (2)$$
$$R_{22} = \gamma_0^{-2}\gamma_2^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2} + \eta_2\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}, R_{12} = \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} + \eta\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}, R_{21} = \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} + \eta\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}, N_\omega = \eta_2\theta_\omega.$$

Здесь использованы следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании величин они обозначены штрихом, который в (1), (2) и последующем изложении опущен):