УДК.539.3

РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ БРУСА ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕННЫХ СИЛ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ

А. А. МУРАДОВ
Наманганский инженерно-технологический институт, Республика Узбекистан

А. АБДУСАТТАРОВ, Н. Б. РУЗИЕВА
Ташкентский государственный транспортный университет, Республика Узбекистан

В статье приводятся упрощенные модели расчета бруса при совместном действии сил с учетом повреждаемости материала. На основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получена система дифференциальных уравнений движения (равновесия), приведена схема реализации и пример расчета бруса.

Рассмотрим брус прямоугольного сечения при воздействии внешних сил. Ось *OX* направим по длине стержня, а оси *OZ* и *OY* – поперек бруса. Перемещения точек бруса при совместном действии продольных, поперечных и крутильных сил можно представить в следующем виде [1, 2]:

$$u_1 = u - y\alpha_1 - z\alpha_2, \quad u_2 = v - z\theta, \quad u_3 = w + y\theta, \tag{1}$$

где $u,\ v,\ w$ – перемещения центральной линии бруса; α_1, α_2 – углы поворота сечения при чистом изгибе; θ – угол кручения.

Согласно формуле Коши, с учетом (1) определены компоненты деформации. Используя закон Гука, компоненты напряжений выразим через деформации следующим образом:

$$\sigma_{11} = 3Ge_{11}, \quad \sigma_{13} = Ge_{13}, \quad \sigma_{12} = Ge_{12}. \tag{2}$$

Предполагается, что модуль сдвига *G* линейно зависит от повреждаемости $\eta(e_u)$.

$$G = G_0(1 - \gamma\eta(e_u)). \tag{3}$$

Кинетические уравнения повреждаемости представим в виде [3]

$$\frac{d\eta}{de_u} = A \cdot \frac{\varepsilon_u^\alpha}{\left(1 - \gamma\eta_n^r\right)^\beta} \quad \text{или} \quad \frac{d\eta}{de_u} = A\varepsilon_u^\alpha.$$

Для вывода уравнений движения бруса при совместном действии сил с учетом повреждаемости используем вариационный принцип Гамильтона – Остроградского [2]:

$$\delta\int_t (T - \Pi + A)dt = 0, \tag{4}$$

где вариации кинетической энергии определяются по формуле

$$\delta\int_t Tdt = \int_t\int_v \rho\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \delta\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)dvdt. \tag{5}$$

Учитывая выражения (1), (2), вариации кинетической энергии представим в векторном виде

$$\delta\int_t Tdt = \int_x \tilde{A}\frac{\partial Y}{\partial t}E\delta Y\,dx\Big|_t - \int_t\int_x \tilde{A}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}E\delta Y\ dxdt, \tag{6}$$

Вариация потенциальной энергии и работа внешних сил бруса в данной постановке имеют вид

$$\delta\int_t \Pi dt = \int_t\int_v\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_{i1}\delta e_{i1}\right)dvdt = \int_t\int_V\left[\sigma_{11}\delta e_{11} + \sigma_{12}\delta e_{12} + \sigma_{13}\delta e_{13}\right]dVdt. \tag{7}$$

$$\delta\int_t Adt = \int_t\int_V\sum_{i=1}^{3}p_i^{(n)}\delta u_i^{(n)}d\upsilon dt + \int_t\int_s\sum_{i=1}^{3}q_i^{(n)}\delta u_i^{(n)}dsdt + \int_t\int_{s_1}\sum_{i=1}^{3}f_i^{(n)}\delta u_i^{(n)}ds_1dt\Big|_x. \tag{8}$$

Аналогично определяем вариации потенциальной энергии и работу внешних сил в векторной форме:

$$\delta\int_t \Pi dt = \int_t \left\{\left(A^{(e)} - A^{(\eta)}\right)\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(B^{(e)} - B^{(\eta)}\right)Y\right\} E\delta Y dt\Big|_x + \int_t\int_x \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(A^{(e)} - A^{(\eta)}\right)\frac{\partial Y}{\partial x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(B^{(e)} - B^{(\eta)}\right)Y\right) + \left(C^{(e)} - C^{(\eta)}\right)\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(D^{(e)} - D^{(\eta)}\right)Y\right\} E\delta Y dxdt\ .; \tag{9}$$

$$\delta\int_t A dt = \int_t Q^{\Gamma}\delta Y dt\Big|_x + \int_t\int_x Q^{\Pi}\, dY dx dt\,. \tag{10}$$

Подставляя векторные выражения вариации кинетической (6), потенциальной (9) энергий и работы внешних сил (10) в вариационный принцип (4), в результате получаем следующую краевую задачу:

$$\tilde{A}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(A^{(e)} - A^{(\eta)}\right)\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(B^{(e)} - B^{(\eta)}\right)Y\right] + \left(C^{(e)} - C^{(\eta)}\right)\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(D^{(e)} - D^{(\eta)}\right)Y + Q^{n} = 0; \tag{11}$$

$$\left\{\left(A^{(e)} - A^{(\eta)}\right)\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(B^{(e)} - B^{(\eta)}\right)Y + Q^{\text{гр}}\right\}\delta Y\Big|_x = 0; \quad \tilde{A}\frac{dY}{dt}E\delta Y\Big|_t = 0. \tag{12}$$

Для решения краевой задачи используется метод конечных разностей и метод последовательных приближений [4]. В процессе их аппроксимации применяется центральная разностная схема второго порядка точности. Схема приложения распределения внешней нагрузки представлена на рисунке 1.

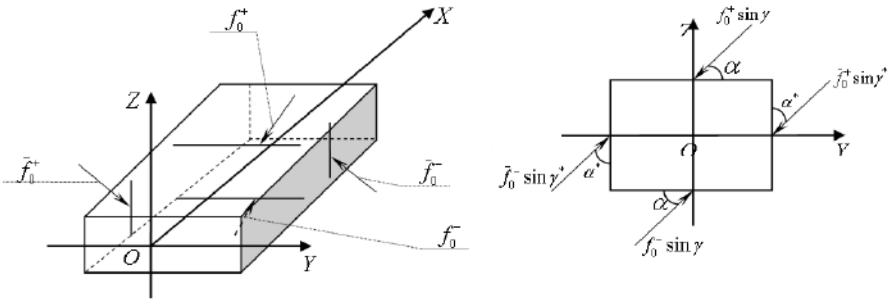

Рисунок 1 – Схема приложения внешней нагрузки

Для реализации привиденного алгоритма использована модифицированная комплексная программа на объектно ориентированном языке.

В качестве примера приводим результаты расчета бруса прямоугольного поперечного сечения, защемленного по торцам при действии совместных переменных сил [3, 5]. Задача решена при следующих исходных данных: материальные константы кинетического уравнения повреждаемости: А = $1{,}2\cdot10^{-4}$; $\alpha = \beta = 5$; $\gamma = 0.8$. Результаты расчета приводятся ($y = 0$; $z = b_0$) в точках поперечного сечения стержня $x = 0{,}0$, …, $x = 1{,}0$ при простоянной интенсивности нагрузки. В таблице 1 приведены изменения расчетных величин: прогиба, углы поворота и повреждаемости.

Таблица 1

x	Результаты упругого расчета					
	w	α_1	α_2	v	u	η
0,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,0001621
0,2	–0,029073	–0,229328	–0,214975	–0,027255	–0,000635	0,0001266
0,4	–0,073375	–0,174730	–-0,163816	–0,068788	–0,001128	0,000122
0,6	–0,089592	0,028530	0,026741	–0,083994	–0,001481	0,000137
0,8	–0,061512	0,245190	0,229877	–-0,057670	–0,001692	0,000129
1,0	0,000000	0,339911	0,318683	0,000000	–0,001763	0,000121

Результаты численного расчета показывают, что с увеличением интенсивности внешней нагрузки δ пропорционально увеличиваются значения компонентов вектора перемещения и соответственно внутренних усилий. При этом сохраняются основные законы изменения перемещений и угла поворота, где сплошные линии – упругий расчет (при $\delta = 1,\ 2, 3$), а штрих-пунктирная линия –с учетом повреждаемости (при $\delta = 3$).

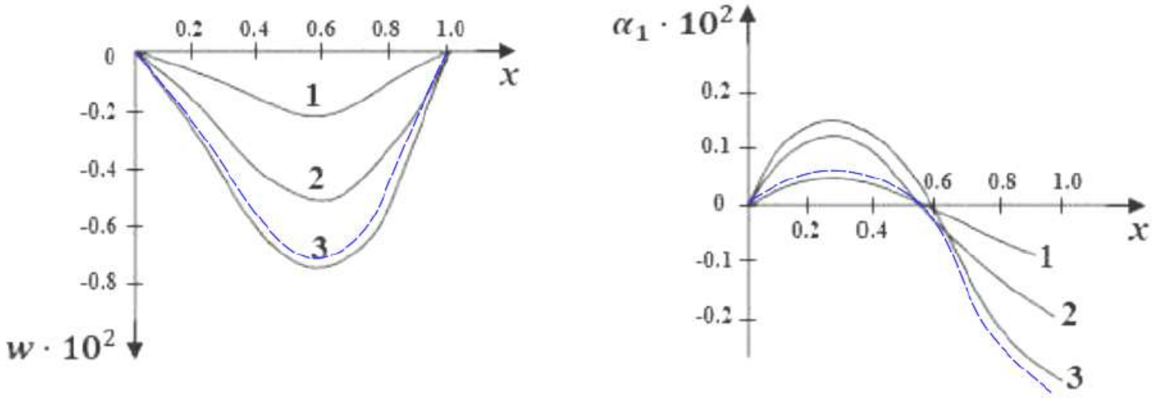

Рисунок 2 – Изменения перемещений и угла поворота по длине бруса

Анализ численного эксперимента показывает, что с увеличением внешней нагрузки изменяются зоны повреждаемости. В свою очередь это влияет на кинетику перемещений, усилий и моментов элементов конструкции типа бруса.

Список литературы

1 **Власов, В. З.** Избранные труды. Т. I–III. / В. З. Власов. – М. : Наука, 1962–1964. – 1506 с.

2 **Кабулов, В. К.** Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности / В. К. Кабулов // Ташкент : Фан, 1966. – 394 с.

3 **Абдусаттаров, А.** Упругопластический расчет тонкостенных стержней при переменном нагружении с учетом повреждаемости / А. Абдусаттаров, А. И. Исомиддинов Н. Б. Рузиева // Проблемы механики. – 2021. – № 2. – С. 3–16.

4 **Годунов, С. К.** Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М. : Наука, 1973. – 400 с.

5 **Старовойтов, Э. И.** Циклическое нагружение упругопластических трёхслойных стержней с учетом их повреждаемости / Э. И. Старовойтов, А. Абдусаттаров, Н. Б. Рузиева // Проблемы механики. – 2023. –№ 1. − С. 66–74.

УДК 539.3

ТЕРМОРАДИАЦИОННОЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

А. В. НЕСТЕРОВИЧ, Ю. В. ШАФИЕВА
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В статьях [1–4] рассматривается деформирование трехслойных пластин при статических и динамических видах нагружений. Влияние неосесимметричных нагрузок на напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины в своей плоскости рассмотрено в [5]. В данной работе исследовано деформирование в терморадиационном стационарном поле круглых упругопластических трехслойных пластин при воздействии неосесимметричных нагрузок $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$, приложенных к срединной плоскости заполнителя.

Постановка задачи и ее решение проводятся в полярной системе координат r, φ, z, которая связывается со срединной плоскостью заполнителя. Кинематика пакета соответствует гипотезам ломаной линии. Аналитическое решение приводится при нахождении пластины в стационарном температурном поле T и облучается нейтронным потоком I. Рассматривается только плоская часть задачи, где u_r, u_φ – искомые радиальные и тангенциальные перемещения.

В соответствии с соотношениями теории малых упругопластических деформаций Ильюшина в слоях пластины связь напряжений и деформаций имеет следующий вид:

$$s_{\alpha\beta}^{(k)} = 2G_k\left(T\right)\left(1 - \omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)}, T, I\right)\right)\,э_{\alpha\beta}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi),$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k\left(T\right)\left(\varepsilon^{(k)} - \alpha_0^{(k)}\Delta T - BI\right) \quad (\alpha,\ \beta = r,\ \varphi;\ \ k = 1,\ 2,\ 3),$$

где $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T, I)$ – функции физической нелинейности материалов слоев.