После нахождения решения в нулевом приближении строим решение задачи в первом приближении. Полученные системы уравнений первого приближения не являются замкнутыми, так как в правые части этих систем входят коэффициенты d_{2k} разложения функции $H(\theta)$ в ряд Фурье. Для построения недостающих уравнений используем граничное условие (1) при дополнительных ограничениях (3). Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить коэффициенты d_{2k}, требуется, чтобы обеспечивалось распределение напряжений на контурах отверстий, близкое к равномерному. Снижение концентрации напряжений на контурах отверстий осуществляем путем минимизации критерия $U=\sum_{i=1}^{M}\left[\sigma_t(\theta_i)-\sigma_*\right]^2 \to \min$, где σ_* − неизвестное оптимальное значение нормального тангенциального напряжения в поверхностном слое отверстия.

Поставленная задача оптимизации состоит в том, чтобы найти значения неизвестных коэффициентов d_{2k}, обеспечивающие наилучшим образом величины функции $\sigma_t(\theta_i)$ согласно условию (1) при дополнительных ограничениях (3). Таким образом, приходим к задаче на условный экстремум функции $U(\sigma_*, d_{2k})$, когда коэффициенты d_{2k} связаны с дополнительным условием

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)a+m\omega}+\varepsilon K_{\mathrm{I}}^{(1)a+m\omega}=0, \qquad K_{\mathrm{I}}^{(0)b+m\omega}+\varepsilon K_{\mathrm{I}}^{(1)b+m\omega}=0.$$

Для решения задачи на условный экстремум используем метод неопределенных множителей Лагранжа.

Построенные системы уравнений позволяют определить форму равнопрочного контура отверстий, напряженно-деформированное состояние перфорированной стрингерной пластины, а также оптимальное значение нормального тангенциального напряжения σ_*.

Список литературы

1 **Ишлинский, А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с.

2 **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

3 **Панасюк, В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев : Наук. думка, 1976. – 442 с.

4 **Мирсалимов, В. М.** Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука. 1987. – 256 с.

УДК 517.958

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В СТЕНКАХ КОЛЬЦЕВОГО КАНАЛА С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ВЫПОЛНЕННОГО ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА С ДРОБНОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Л. И. МОГИЛЕВИЧ, Е. В. ПОПОВА, М. В. ПОПОВА
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., Российская Федерация

Неразрушающие методы контроля состояния изделий на базе возбуждения в них волн деформации и анализа их эволюции широко применяются для диагностики состояния поверхности [1], контроля состояния упругих конструкций, таких как элементы транспортной инфраструктуры, зданий и сооружений, в том числе стенок трубопроводов [2]. Подходы линейной волновой динамики хорошо развиты [3], но внедрение новых материалов, имеющих нелинейные механические свойства, требует создания фундаментального задела в нелинейной волновой динамике. Предлагаемое исследование нацелено на разработку математической модели для исследования эволюции нелинейных уединенных волн деформации в стенках кольцевого канала, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. В силу осевой симметрии канала исследован осесимметричный случай, когда его стенки рассматриваются как две бесконечно длинные цилиндрические оболочки, выполненные из несжимаемого материала. Другими словами, полагаем, что коэффициент Пуассона материала оболочек равен ½. Кроме того, считаем, что материал рассматриваемых оболочек одинаковый и для него принят нелинейный физический закон, связывающий напряжения и деформации в нем, в виде суммы степенных функций. Осуществлен вывод уравнений динамики оболочек с квадратичной и дробной физической нелинейностью. Сформулирована проблема гидроупругости рассматриваемого канала как краевая задача математической физики, включающая: выведенные уравнения динамики оболочек и уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости, а также краевые условия на границах контакта оболочек с жидкостью. Проведен асимптотический анализ поставленной задачи гидроупругости методом двухмасштабных разложений и получена система двух нелинейных уравнений в частных производных, описывающая нелинейный волновой процесс в стенках рассматриваемого канала. В правых частях данных уравнений в качестве нагрузки выступают напряжения вязкой жидкости, действующие на внешнюю и внутреннею оболочки. Для частного случая, когда исключается из рассмотрения жидкость между оболочками, данная система распадается на два независимых уравнения, которые представляют собой уравнения Кортевега – де-Вриза – Шамеля (КдВШ) [4–6]. Рассмотрена динамика вязкой жидкости в кольцевой щели между оболочками. С учетом узости данной щели движение жидкости изучалось как ползущее в рамках гидродинамической теории смазки [7]. Определены искомые напряжения вязкой жидкости как функции упругих перемещений оболочек. В результате получена следующая система двух эволюционных уравнений, являющихся обобщением уравнения КдВШ, которая описывает распространение продольных волн деформации в стенках рассматриваемого канала:

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t}+6\alpha_0\left|\phi^{(1)}\right|^{1/2}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\eta}+6\alpha_1\varphi^{(1)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\varphi^{(1)}_{\eta\eta\eta}}{\partial\eta^3}+\sigma_0(\varphi^{(1)}-\phi^{(2)})=0\,, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t}+6\alpha_0\left|\varphi^{(2)}\right|^{1/2}\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial\eta}+6\alpha_1\phi^{(2)}\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\varphi^{(2)}_{\eta\eta\eta}}{\partial\eta^3}+\sigma_0(\varphi^{(2)}-\varphi^{(1)})=0\,.$$

Здесь при $\alpha_0 = 0$ имеем систему уравнений, обобщающих уравнение КдВ, при $\alpha_1 = 0$ – систему уравнений, обобщающих уравнение Шамеля а при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ – систему уравнений, обобщающих уравнение КдВШ. Верхний индекс (i) соответствует i-й оболочке, т. е. (1) – внешней; (2) – внутренней оболочке; $u_{10}^{(i)}$ – функция продольного перемещения элемента срединной поверхности i-й оболочки, а также введены обозначения

$$\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi}=c_3\varphi^{(1)}\,,\ \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}=c_3\varphi^{(2)}\,,\ \eta=c_1\xi\,,\ t=c_2\tau\,,\ \sigma_0=\frac{3}{2}\frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\left(\frac{R}{\delta}\right)^2\frac{\nu}{\delta c_0}\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\frac{1}{c_2}\,,$$

$$c_3=\left[\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{m}{m_2\varepsilon^{1/2}}\frac{1}{(2/\sqrt{3})^{1/2}}\right]^2,\ c_1=\left[\frac{c_3}{3\mu_0^2}\frac{m_2}{E}\varepsilon^{1/2}\right]^{1/2},\ c_2=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{c_3c_1}{6}\frac{m_2}{E}\varepsilon^{1/2}\right]^{1/2},$$

$$\xi=x^*-\sqrt{1-\mu_0^2}\,t^*\,,\ x^*=x/l\,,\ t^*=tc_0/l\,,\ \tau=\varepsilon^{1/2}t^*\,,\ \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}}=\varepsilon<<1\,,\ c_0^2=E/(\rho_0(1-\mu_0^2))=(4/3)E/\rho_0\,,$$

где c_0^2 – квадрат скорости звука в материале оболочки; t – время; x – продольная координата, ρ_0 – плотность материала оболочки (считаем далее для рассматриваемых оболочек их материал одинаковым); E – модуль Юнга; μ_0 = ½ – коэффициент Пуассона материала оболочек; l – длина волны, принимаемая за характерный линейный размер; $h_0^{(i)}$ – толщина i-й оболочки; $R^{(i)}$ – радиус срединной поверхности i-й оболочки; $\delta = R_1 - R_2$ – величина зазора между оболочками в невозмущенном состоянии, R_1, R_2 – радиусы поверхностей контакта с жидкостью внешней и внутренней оболочек, соответственно; ρ – плотность жидкости; ν – коэффициент кинематической вязкости; ε – малый параметр задачи. Под m_2, m понимаем параметры, имеющие размерность напряжений, которые можно трактовать как константы материала оболочки, определяемые из опытов на растяжение-сжатие [8, 9]. Данные параметры являются коэффициентами пропорциональности при квадратичном члене и члене с дробной степенью в физическом законе соответственно. Кроме того, принято во внимание, что в силу малости кольцевого зазора и параметра ε можно принять $R^{(1)} = R^{(2)} \approx R$, $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} \approx h_0$.

Реализовано численное решение системы (1) с использованием подхода, основанного на универсальном алгоритме коммутативной алгебры использующего технику базисов Грёбнера. В результате построения разностного базиса Грёбнера сгенерированы новые разностные схемы типа Кранка – Николсона, полученные с использованием базовых интегральных разностных соотношений, аппроксимирующих исходную систему уравнений. Проведены вычислительные эксперименты показавшие, что нелинейные уединенные волны, возбуждаемые в оболочках, являются сверхзвуковыми солитонами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00140.

Список литературы

1 **Антонов, А. М.** Волна Рэлея на границе градиентно-упругого полупространства / А. М. Антонов, В. И.Ерофеев // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. – № 4 (79). – С. 59–72.

2 Метод выделения полезного сигнала для системы обнаружения свободных, слабозакрепленных и посторонних предметов в главном циркуляционном контуре реакторной установки с водо-водяным энергетическим реактором / И. В. Максимов [и др.] // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2018. – № 1 (118). – С. 4–15.

3 Волны в сплошных средах / А. Г. Горшков [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.

4 Волны деформации в двух соосных, физически нелинейных оболочках с конструкционным демпфированием, взаимодействующих с окружающей средой и заполненных жидкостью / Л. И. Могилевич [и др.] // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2022. – № 3 (140). – С. 34–60.

5 **Дагхан, Д.** Аналитическое решение уравнения Шамеля, описывающее распространение инно-звуковых волн в плазме двух типов, и их параметричекое исследование / Д. Дагхан, О. Донмец // Прикладная математика и техническая физика. – 2018. – Т. 59. – № 3. – С. 5–13.

6 The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells / A. Zemlyanukhin [et al.] // Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 98, no 1. – P. 185–194.

7 **Лойцянский, Л. Г.** Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Дрофа, 2003. – 840 с.

8 **Лукаш, П. А.** Основы нелинейной строительной механики / П. А. Лукаш. – М. : Стройиздат, 1978. – 204 с.

9 **Каудерер, К.** Нелинейная механика / К. Каудерер. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1961. – 778 с.

УДК 539.3

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗУБЬЕВ С ПОКРЫТИЯМИ В ЗУБЧАТЫХ КОЛЕСАХ ИЗ КОМПОЗИТОВ

В. В. МОЖАРОВСКИЙ, Д. С. КУЗЬМЕНКОВ, С. В. КИРГИНЦЕВА
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь

Целью расчета зубьев зубчатых колес с покрытиями из композитов (с твердой смазкой) является установление допустимых значений контактных напряжений и деформаций для действующей нагрузки и других параметров и их соответствия физико-механическим свойствам выбранных материалов пары контакта «зуб металлического колеса – покрытие из композита» при принятых геометрических соотношениях, обеспечивающих наибольший срок службы и достаточно высокие эксплуатационные свойства, получение наибольшей работоспособности зубчатой передачи.

В последнее время для проектирования зубчатой передачи стали применяться композиционные материалы на основе различных смол, а также волокнистые армированные материалы. Они имеют хорошие механические свойства, малый удельный вес, высокие динамические свойства, низкие коэффициенты трения. Расчет таких передач при контактном взаимодействии, в основном, построен на изотропных свойствах материала. Но современные волокнистые композиты имеют выраженную анизотропию механических свойств. Эти особенности необходимо учитывать при расчете и конструировании зубчатых колес из композитов.

В данной работе строится математическая модель расчета напряжённо-деформированного состояния (НДС) зубьев с покрытиями для зубчатых колес из композитов при их взаимодействии для системы контакта «зуб металлического колеса – покрытие из волокнистого материала на жестком основании», используя в основе математическую теорию упругости анизотропного тела.

Расчет НДС металлических деталей с покрытиями из композита по схеме «бесконечная упругая полоса, адгезионно связанная с жестким основанием» выполняется при следующих условиях:

1) толщина покрытия мала по сравнению с размерами основания;

2) область приложения нагрузки и толщина покрытия малы по сравнению с радиусом кривизны поверхности;

3) покрытие находится в плоском деформированном или плоском напряженном состоянии;

4) контакт зубьев с покрытием моделируется в виде контакта двух цилиндров, один из которых имеет покрытие из композита (рисунок 1).