$$\Lambda_{11}^{(q)} = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_1^{(q)} \alpha_1^{(q)}}{\rho R T_0}, \quad M_1^{(q)} = \frac{n_0^{(q)}}{T_0} \ln\left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}\right) D_1^{(q)}.$$

Для получения замкнутой постановки задачи на поверхности $\Pi = \partial G$ рассматриваемых тел задаются краевые условия следующего вида:

– кинематические условия:

$$u_r\big|_{\Pi_u} = f_r(t), \quad \vartheta\big|_{\Pi_\vartheta} = Q(t), \quad \eta^{(q)}\big|_{\Pi_\eta} = f^{(q)}(t); \tag{3}$$

– динамические условия:

$$\sigma_r\big|_{\Pi_\sigma} = f_r(t), \quad \left(q_r + \tau_\vartheta \frac{\partial q_r}{\partial t}\right)\bigg|_{\Pi_q} = Q(t), \quad \left(J_r^{(q)} + \tau_\eta^{(q)} \frac{\partial J_r^{(q)}}{\partial t}\right)\bigg|_{\Pi_J} = f^{(q)}(t). \tag{4}$$

Полагая, что начальное состояние является невозмущенным, система (2) дополняется нулевыми начальными условиями:

$$\begin{gathered} u(r,t)\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u(r,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \vartheta(r,t)\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta(r,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \\ \eta_q(r,t)\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \eta_q(r,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

В цилиндрической системе координат физические компоненты тензора механических напряжений, векторов теплового и диффузионного потоков имеют вид

$$\begin{gathered} \sigma_r = c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{u_r}{r} - b_1 \vartheta - \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} \eta^{(j)}, \quad q_r + \tau_\vartheta \frac{\partial q_r}{\partial t} = -\kappa_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial r}, \\ J_r^{(q)} + \tau_\eta^{(q)} \frac{\partial J_r^{(q)}}{\partial t} = \Lambda_{11}^{(q)} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - M_1^{(q)} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \sum_{r=1}^{N} D_1^{(qr)} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial r}. \end{gathered} \tag{6}$$

Таким образом, предложена модель, описывающая одномерные термомеханодиффузионные процессы в цилиндрических телах с учетом релаксации тепловых и диффузионных потоков. Постановка (2)–(5) является обобщением модели упругой диффузии, рассматриваемой ранее в работе [2], которая учитывает влияние температуры на механическое и диффузионные поля.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (№ 23-21-00189).

Список литературы

1 **Земсков, А. В.** Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 288 с. – ISBN 978-5-9221-1912-2.

2 **Зверев, Н. А.** Моделирование нестационарных механодиффузионных процессов в полом цилиндре с учетом релаксации диффузионных потоков / Н. А. Зверев, А. В. Земсков // Математическое моделирование. – 2023. – Т. 35, № 1. – С. 95–112.

УДК 539.3, 539.8

МОДЕЛЬ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ КОНСОЛЬНО-ЗАКРЕПЛЁННОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕРМОМЕХАНОДИФФУЗИОННЫХ НАГРУЗОК

А. В. ЗЕМСКОВ
Московский авиационный институт (НИУ),
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация

ЛЕ ВАН ХАО, Д. О. СЕРДЮК
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

В работе рассматривается нестационарная задача о плоском термоупругодиффузионном изгибе консольно-закрепленной однородной изотропной балки Бернулли – Эйлера. Математическая постановка представляет собой замкнутую систему уравнений поперечных колебаний балки с учетом

термодиффузии, которая получена с помощью обобщенного принципа виртуальных перемещений из общей модели термоупругой диффузии для сплошных сред с конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных потоков [1–3]. Схема приложенных усилий представлена на рисунке 1.

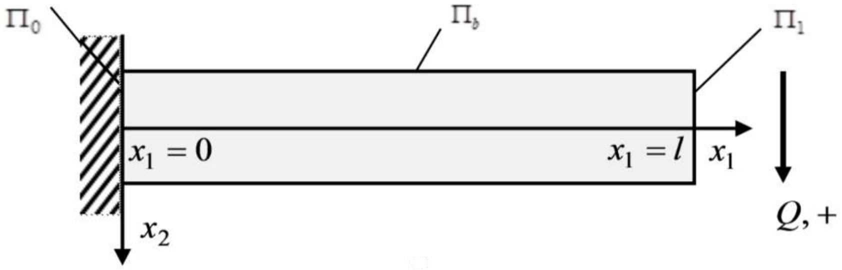

Рисунок 1 – Иллюстрация к постановке задачи

Математическая модель поперечных колебаний балки описывается уравнениями [4] (штрих – производная по продольной координате x_1, точка – производная по времени):

$$
\begin{gathered}
\ddot{v}'' - a\ddot{v} = v^{\mathrm{IV}} + b_1\vartheta'' + \sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j'', \quad a = \frac{F}{J_3},\\
\sum_{k=0}^{M}\frac{\tau_0^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\left(\dot{\vartheta} - B_1\dot{v}'' + \sum_{q=1}^{N}\upsilon^{(q)}\dot{H}_q\right) = \kappa_1\vartheta'',\\
\sum_{k=0}^{K}\frac{\tau_q^k}{k!}\frac{\partial^k \dot{H}_q}{\partial\tau^k} = \sum_{r=1}^{N}D_1^{(q)}g^{(qr)}H_r'' + \Lambda_{11}^{(q)}v^{\mathrm{IV}} + M_1^{(q)}\vartheta'', \quad H_{N+1} = -\sum_{q=1}^{N}H_q;
\end{gathered}
\tag{1}
$$

все величины в (1) являются безразмерными, для них приняты следующие обозначения:

$$
x_i = \frac{x_i^*}{l}, v = \frac{v^*}{l}, \tau = \frac{Ct}{l}, \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l}, \tau_0 = \frac{C\tau_t}{l}, \theta = \frac{T - T_0}{T_0}, B_\alpha = \frac{b_{\alpha\alpha}}{\rho c_0}, b_\alpha = \frac{b_{\alpha\alpha}T_0}{C_{1111}}, \ \upsilon^{(q)} = R\frac{\ln\left[n_0^{(q)}\gamma^{(q)}\right]}{c_0 m^{(q)}},
$$

$$
C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \ \kappa_\alpha = \frac{\kappa_{\alpha\alpha}}{\rho c_0 Cl}, M_\alpha^{(q)} = \frac{n_0^{(q)}D_{\alpha\alpha}^{*(q)}}{CL}\ln\left(n_0^{(q)}\gamma^{(q)}\right), \alpha_\gamma^{(q)} = \frac{\alpha_{\gamma\gamma}^{(q)}}{C_{1111}}, D_\alpha^{(q)} = \frac{D_{\alpha\alpha}^{(q)}}{Cl}, \Lambda_{\alpha\beta}^{(q)} = \frac{m^{(q)}D_{\alpha\alpha}^{(q)}\alpha_{\beta\beta}^{(q)}n_0^{(q)}}{\rho RT_0 Cl},
$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; v^* – прогибы балки; l – длина балки; $\eta_q = x_2 H_q$. – приращение концентрации q-й компоненты вещества в составе $N+1$ – компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрации q-го вещества; C_{ijkl} – упругие постоянные; ρ – плотность; $\alpha_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $\upsilon^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие нагрев среды за счет диффузии; $D_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты диффузии; $g^{(qr)}$ – термодинамический множитель Даркена; R – универсальная газовая постоянная; $\theta = x_2\vartheta$ – приращение температуры; T – актуальная температура среды; T_0 – начальная температура среды; κ_{ij} – компоненты тензора теплопроводности; c_0 – удельная теплоемкость; b_{ij} – температурные коэффициенты, характеризующие деформации за счет нагрева; $m^{(q)}$ – молярная масса q-го вещества; $\tau^{(q)}$ и τ_t – время релаксации диффузионных и тепловых потоков.

Уравнения (1) дополняются начально-краевыми условиями, которые в случае консольного закрепления имеют вид ($x = x_1$)

$$
\begin{gathered}
v'\big|_{x=0} = 0_1, \ \left(v'' + b_1\vartheta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j\right)\Bigg|_{x=1} = 0, \ \left(v''' + b_1\vartheta' + \sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j' - \ddot{v}'\right)\Bigg|_{x=1} = f_{22}(\tau),\\
v\big|_{x=0} = 0, \ H_q\big|_{x=0} = 0, \ v\big|_{x=0} = 0, \ \kappa_1\vartheta'\big|_{x=1} = 0, \ \left(\Lambda_{11}^{(q)}v''' - M_1^{(q)}\vartheta' + \sum_{r=1}^{N}D_1^{(q)}g^{(qr)}H_r'\right)\Bigg|_{x=1} = 0.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

Основная проблема заключается в невозможности построения решения задачи (1), (2) в виде рядов Фурье, что осложняет обращение преобразования Лапласа, которое также используется при решении этой задачи. Для преодоления указанной проблемы используется метод эквивалентных граничных условий, описанный в работах [3, 5] и позволяющий выразить решение задачи (1), (2) через известное решение задачи, заданной уравнениями (1) и следующими краевыми условиями:

$$\left.\left(v''+b_1\vartheta+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j'\right)\right|_{x=0}=f_{11}^{*}(\tau),\quad v\big|_{x=0}=0,\quad \vartheta\big|_{x=0}=0,\quad H_q\big|_{x=0}=0,$$
$$\left.\left(v'''+b_1\vartheta'+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j'-\ddot{v}'\right)\right|_{x=1}=f_{22}(\tau),\quad \kappa_1\vartheta'\big|_{x=1}=0, \tag{3}$$
$$\left.\left(\Lambda_{11}^{(q)}v'''-M_1^{(q)}\vartheta'+\sum_{r=1}^{N}D_1^{(q)}g^{(qr)}H_r'\right)\right|_{x=1}=0,\quad v'\big|_{x=1}=f_{12}^{*}(\tau).$$

Здесь граничные условия подобраны таким образом, чтобы имелась возможность искать решение задачи (1), (3) с помощью рядов Фурье. Начальные условия также являются нулевыми. Функции $f_{11}^{*}(\tau)$ и $f_{12}^{*}(\tau)$ подбираются таким образом, чтобы решение задачи (1), (3) удовлетворяло краевым условиям (2).

Таким образом построена модель нестационарных колебаний консольно-закрепленной ортотропной балки Бернулли – Эйлера с учетом релаксации тепловых и диффузионных потоков, описывающая взаимосвязь между механическими, температурными и диффузионными полями в сплошных средах. Предложен алгоритм решения задачи об изгибе консольно-закрепленной балки с учетом тепломассопереноса, основанный на использовании преобразования Лапласа, разложений в тригонометрические ряды Фурье, и метода эквивалентных граничных условий.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (№ 23-21-00189, https://rscf.ru/project/23-21-00189).

Список литературы

1 **Князева, А. Г.** Введение в термодинамику необратимых процессов / А. Г. Князева. – Томск : Иван Федоров, 2014. – 172 с.

2 **Келлер, И. Э.** Механика сплошной среды. Законы сохранения : учеб. пособие / И. Э. Келлер, И. С. Дудин. – Пермь : ПНИПУ, 2022. – 142 с.

3 **Земсков, А. В.** Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 288 с.

4 **Zemskov, A. V.** Bernoulli-Euler Beam Unsteady Bending Model with Consideration of Heat and Mass Transfer / A. V. Zemskov, Van Hao Le, D. V. Tarlakovskii // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2023. – Vol. 9, no 1. – P. 168–180. – DOI : 10.22055/jacm.2022.40752.3649.

5 **Zemskov, A. V.** Unsteady bending of the orthotropic cantilever Bernoulli – Euler beam with the relaxation of diffusion fluxes / A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii, G. M. Faykin // ZAMM Z Angew Math Mech. – 2022. – e202100107. – DOI : 10.1002/zamm.202100107.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА ПОВРЕЖДЕННОСТИ В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ

М. Ю. КАЛЯГИН, Л. Н. РАБИНСКИЙ

Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Известно, что наиболее распространенный тип дефекта для многослойных структур – дефект в виде поперечной трещины в слоях с противоположной ориентацией по отношению к действующей нагрузке.

В представленной работе исследуются алгоритмы учета механизмов роста поврежденности в композиционных многослойных структурах при статическом нагружении. Исследовались вариант дефекта, который представляет собой поперечное растрескивание слоев без образования полной поперечной микротрещины, а также развитие межслойных трещин в окрестности поперечных де-