

## НОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК 620

*А. С. НЕВЕРОВ, доктор технических наук, О. Е. ПАНТЮХОВ, кандидат технических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, А. А. НЕВЕРОВА, Белорусская сельскохозяйственная академия, Могилевская обл., г. Горки*

### К ВОПРОСУ О ГРАФИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ ВЗАИМОСВЯЗИ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ

На основе анализа уравнений связи, описывающих характеристические отношения между напряжением и деформацией, предложены варианты их графического отображения, позволяющие выделять группы материалов со сходным поведением под нагрузкой. Это может способствовать выбору материалов в экспериментах по моделированию с учетом масштабного фактора процессов деформации деталей сооружений и конструкций. Предложенные графические зависимости представляют удобный метод оценки модулей упругости и податливостей по известным экспериментальным значениям других модулей и податливостей.

**Введение.** Механические характеристики материалов являются основным критерием возможности их любого практического применения в строительных конструкциях. Для описания механического поведения изотропных упругих материалов достаточно знания трех взаимосвязанных модулей, т. е. характеристических отношений между напряжением и деформацией. Это объемный модуль  $K$ , характеризующий отношение гидростатического давления к объемной деформации, модуль упругости при сдвиге или жесткость  $G$ , определяемый как отношение сдвигового напряжения к деформации сдвига, и модуль Юнга  $E$ , оцениваемый по отношению растягивающего напряжения к деформации растяжения. Иногда используется еще одна характеристика упругих свойств материала – коэффициент Пуассона  $\nu$ , характеризующий отношение поперечного сжатия к продольной деформации. Все эти величины связаны друг с другом так называемыми «уравнениями связи». Однако производителей интересует не столько взаимосвязь этих характеристик, сколько возможность их расчета, с помощью этих уравнений. С другой стороны, материалы, близкие друг к другу по соотношению модулей упругости, но различающиеся по их абсолютной величине, ведут себя под действием соответствующей нагрузки сходным образом. Так, жесткие и хрупкие материалы горных пород под действием предельных напряжений пластически деформируются подобно полимерным материалам. Это позволяет моделировать механическое поведение таких материалов (как в построении виртуальной 3D, так и реальной модели возводимого сооружения путем их замены материалами менее прочными, но близкими по соотношению модулей упругости), которое невозможно оценить экспериментально из-за влияния масштабного фактора. Одной из наиболее распространенных тенденций в современной архитектуре является постепенное увеличение масштабов возводимых зданий, соответственно, увеличивается нагрузка на используемые строительные материалы. При этом учет масштабного фактора путем экспериментального моделирования приобретает существенное значение.

Целью статьи является отыскание вариантов графического отображения взаимосвязи модулей упругости, представляющих удовлетворительный способ решения обеих задач.

В работах [1, 2] предложен вариант систематизации машиностроительных материалов исходя из характер-

истических отношений между напряжением и деформацией, описывающих их поведение под нагрузкой. Использование уравнения связи между тремя модулями упругости (модулем Юнга  $E$ , модулем сдвига  $G$  и объемным модулем  $K$ ), а также коэффициентом Пуассона, показывает, что соотношение между ними может быть описано уравнением

$$\frac{\nu E}{9(1+\nu)K} + \frac{E}{3G} + \frac{2G}{9K} = 1, \quad (1)$$

которое включает три слагаемых (соответственно,  $A$ ,  $B$  и  $C$ ), представляющих собой соотношение модулей упругости в трех различных сочетаниях. Первое слагаемое  $A = \frac{\nu E}{9(1+\nu)K}$ , помимо того, зависит от коэффициента Пуассона. Вклад, вносимый в общую сумму каждым из слагаемых, можно выразить в долях единицы или в процентах.

Это позволило использовать концентрационный треугольник Розебума для анализа изменения вклада каждого из слагаемых в общую сумму при переходе от одного материала к другому.

На рисунке 1 представлена часть треугольной диаграммы, построенной в координатах слагаемых уравнения (1). В таблице 1 приведены данные, необходимые для ее построения. Кроме слагаемых уравнения (1) в таблице приведены величина суммы слагаемых и отклонение этой суммы от единицы, которое фактически отражает соответствие экспериментальных значений модулей упругости уравнениям связи. Из таблицы видно, что величина этого отклонения незначительна и в большинстве случаев составляет доли процента. Это свидетельствует о достаточной надежности этих экспериментальных данных.

На рисунке 1 представлена часть треугольной диаграммы, построенной в координатах слагаемых уравнения (1). В таблице 1 приведены данные, необходимые для ее построения. Кроме слагаемых уравнения (1) в таблице приведены величина суммы слагаемых и отклонение этой суммы от единицы, которое фактически отражает соответствие экспериментальных значений модулей упругости уравнениям связи. Из таблицы видно, что величина этого отклонения незначительна и в большинстве случаев составляет доли процента. Это свидетельствует о достаточной надежности этих экспериментальных данных.

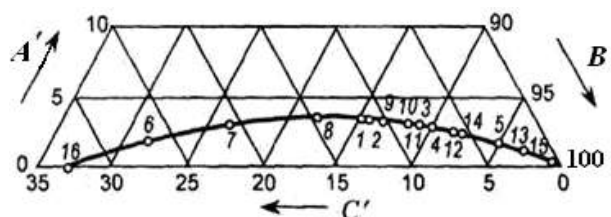


Рисунок 1 – Участок диаграммы, характеризующей соотношение модулей упругости. Номера точек на кривой соответствуют материалам в таблице 1 [2]

В работе [2] и в настоящем исследовании использованы данные о модулях упругости изотропных поликристаллических или аморфных тел (которые с определенным допущением можно рассматривать как упруго-изотропные), приведенные в источниках [3, 4]. В источниках [5, 6] приведены некоторые характеристики упругих свойств полимерных материалов. В работе Ван Кревелена [3] механические характеристики различных сред рассматриваются на при-

мере ряда материалов, экспериментальные значения модулей упругости которых определены в однопипных условиях и находятся в соответствии с известными уравнениями, связывающими их друг с другом и с другими физическими характеристиками. Это подтверждает высокий уровень достоверности приводимых данных, что и предопределяет преимущественное использование их в последующих расчетах.

Таблица 1 – Соответствие экспериментальных значений модулей упругости уравнениям связи [2]

В процентах

Материал	Уравнение				
	$A'=A/\Sigma$	$B'=B/\Sigma$	$C'=C/\Sigma$	$\Sigma = A + B + C$	$\Delta\Sigma =  1 - \Sigma $
1 Чугун	3,198	85,102	11,700	1,007	0,7
2 Мягкая сталь	3,221	85,267	11,512	1,000	0
3 Алюминий	2,736	89,072	8,192	1,007	0,7
4 Медь	2,584	90,025	7,391	0,998	0,2
5 Свинец	1,406	95,025	3,305	0,990	1,0
6 Кварц	1,872	71,231	26,897	0,996	0,4
7 Плавленный кварц	2,930	76,277	20,793	1,003	0,3
8 Стекло	3,379	81,865	14,756	0,997	0,3
9 Гранит	3,069	86,735	10,196	1,003	0,3
10 ПС	2,920	88,255	8,825	1,007	0,7
11 ПММА	2,779	88,857	8,364	1,004	0,4
12 ПА 6.6	1,996	92,301	5,733	0,998	0,2
13 ПЭНД	1,050	96,581	2,369	0,986	1,4
14 Эбонит	2,051	92,696	5,253	1,001	0,1
15 Резина	0,231	99,278	0,491	0,959	4,1
16 «Усы» оксида алюминия	0	66,678	33,322	1,000	0

Пользуясь тем же методом преобразования уравнений связи, можно оценить вклад в величину каждого модуля остальных характеристик упругих свойств материала. Обозначим  $M$  одну из четырех характеристик упругих свойств материалов (модули упругости и коэффициент Пуассона). Тогда уравнение, характеризую-

щее вклад в её значение трех остальных характеристик, можно записать так:

$$M = A + B + C. \quad (2)$$

Значения слагаемых этого уравнения приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения слагаемых уравнения (2)

$M$	$A$	$B$	$C$
$G$	$A = \frac{E(3\nu - 2\nu^2 + 2)}{6(1 + \nu)^2}$	$B = \frac{K(1 - 2\nu)^2}{2(1 + \nu)^2}$	$C = \frac{(1 - 2\nu)(3K - E)}{6(1 + \nu)}$
$\nu$	$A = \frac{E^2 - 4EG + 4G^2}{18KG}$	$B = \frac{E(E - 2G)}{6G^2}$	$C = \frac{G(3K - 2G)}{9K(3K + G)}$
$K$	$A = \frac{E(2 + 3\nu - 2\nu^2)}{9(1 - \nu - 2\nu^2)}$	$B = \frac{4G\nu}{9(1 - 2\nu)}$	$C = \frac{2E\nu - 8G\nu + 2G}{9(1 - 2\nu)}$
$E$	$A = \frac{\nu K(1 - 2\nu)}{1 + \nu}$	$B = \frac{8G\nu}{3}$	$C = \frac{2G(6K + 5G)}{3(3K + G)}$

Используя концентрационный треугольник Розебу-ма, можно построить диаграммы, характеризующие вклад составляющих  $A$ ,  $B$  и  $C$  в значения соответствующих характеристик упругих свойств материалов.

Полученные результаты приведены на рисунке 2.

Обращает внимание то, что, несмотря на существенные отличия в локализации и виде кривых, на графиках (рисунках 1 и 2) сохраняется последовательность расположения точек, относящихся к рассматриваемым материалам. Может изменяться только направ-

ление данной последовательности. Это является дополнительным подтверждением того, что для материалов, различающихся по природе и прочностным свойствам, может наблюдаться сходный характер изменения их упругих характеристик при нагружении, что может способствовать выбору материалов в экспериментах с учетом масштабного фактора.

В работах [1, 2] анализ графического отображения уравнения (1) позволил предложить оригинальный способ систематизации материалов по механическим свой-

ствам. Однако зависимости (1) и (2), полученные преобразованием уравнений связи, не позволяют однозначно судить о взаимосвязи характеристик упругих

свойств материалов, так как каждая из составляющих этих уравнений включает не менее двух из этих характеристик.

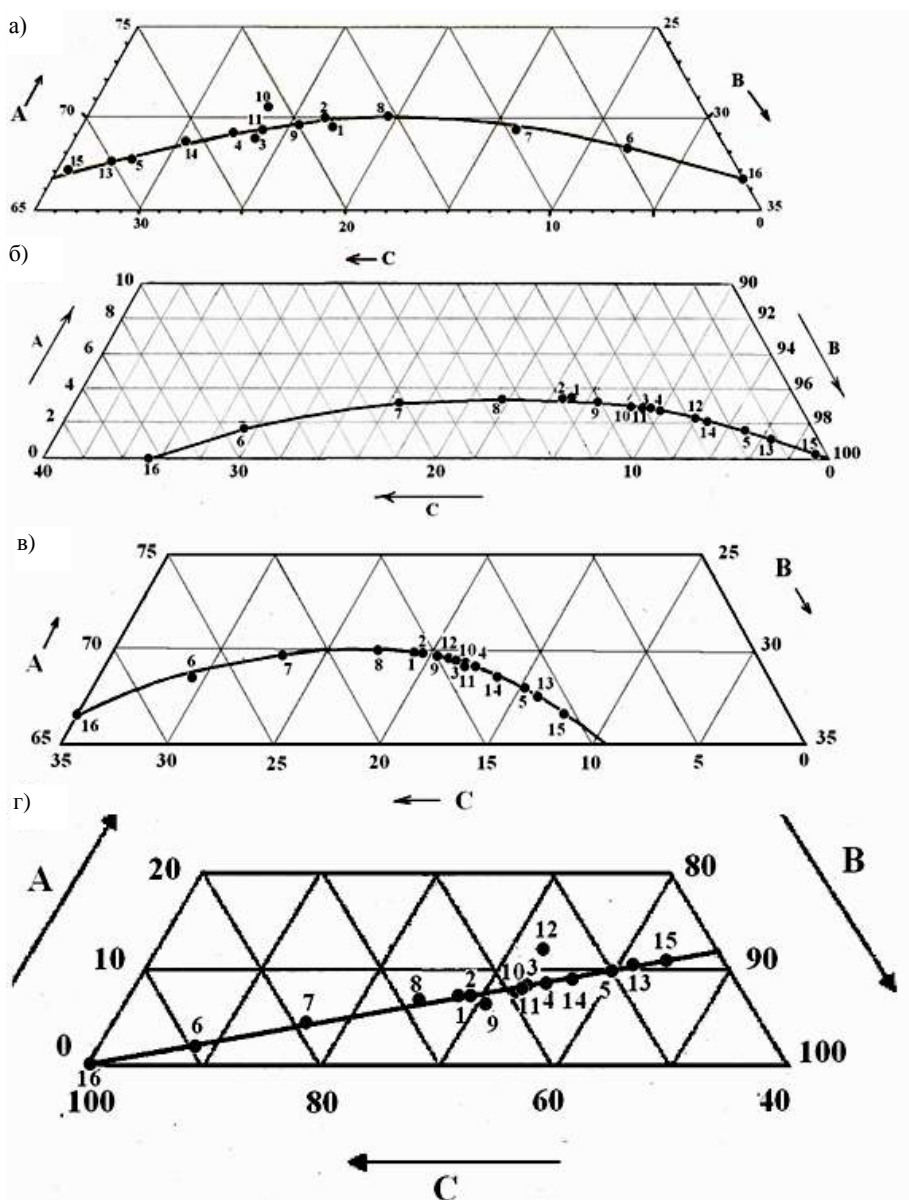


Рисунок 2 – Участки треугольных диаграмм, характеризующих вклад, %:  
*a* – в значение модуля сдвига; *б* – коэффициента Пуассона; *в* – объемного модуля; *г* – модуля Юнга слагаемых уравнений (2).  
 Точки обозначены согласно таблице 1

В работе [2] выведено уравнение (3), позволяющее однозначно оценить такую взаимосвязь:

$$\frac{1}{G} + \frac{1}{3K} = \frac{3}{E}. \quad (3)$$

Однако большее практическое значение может иметь ее графическое отображение. На рисунке 3 приведены изолинии модуля сдвига в координатах объемного модуля и модуля Юнга.

Из графика видно, что при модуле сдвига, стремящемся к нулю, в этом же направлении смещается и модуль Юнга. Объемный модуль при этом смещается в сторону бесконечности. Учитывая практическую несжимаемость жидкостей, это явление находит экспериментальное подтверждение.

Поскольку величины, обратные модулям упругости, представляют собой податливость материала, можно данное уравнение привести к виду

$$j + k/3 = 3D, \quad (4)$$

где *j*, *k*, *D* – соответственно сдвиговая, объемная, упругая податливости.

Тогда взаимосвязь между ними можно показать с помощью номограммы (рисунок 4). На рисунке 4 показано, как использовать номограмму для нахождения искомой податливости по экспериментальным значениям двух других. Линейный характер зависимостей позволяет при необходимости экстраполировать их в область больших значений *k* и *D*.

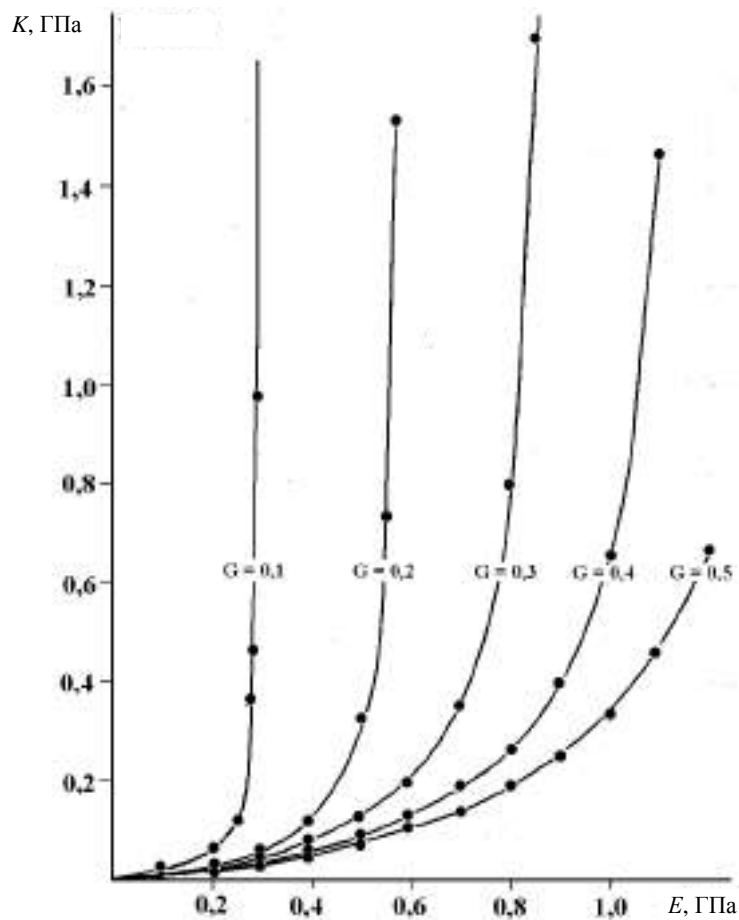


Рисунок 3 – Изолинии модуля сдвига ( $G$ ) в координатах двух остальных модулей упругости (объемного –  $K$  и Юнга –  $E$ )

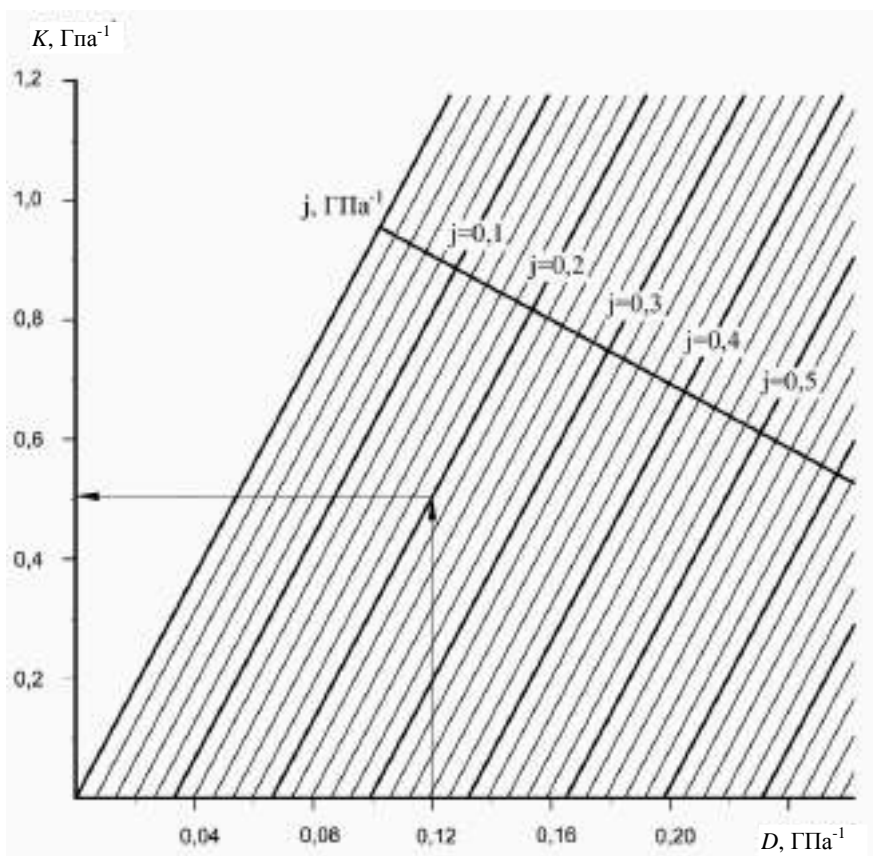


Рисунок 4 – Номограмма податливостей:  
 $D$  – упругая;  $k$  – объемная;  $j$  – сдвиговая

**Заключение.** Анализ диаграмм Розебума, построенных с использованием уравнений связи, описывающих поведение материалов под нагрузкой, показал, что на них имеет место определенная последовательность расположения точек, относящихся к рассматриваемым материалам и не зависящая от вида диаграмм. Это дает возможность, учитывая масштабный фактор, выбирать материалы со сходным поведением под нагрузкой в модельных экспериментах. Предложенные варианты графического отображения взаимосвязи характеристик упругих свойств материалов представляют удобный метод оценки их модулей упругости и податливостей по известным экспериментальным значениям других модулей и податливостей.

#### Список литературы

1 **Неверов, А. С.** Научные основы создания низкокомплесных машиностроительных материалов на базе термопла-

стов и ограниченно совместимых с ними жидкостей: дис. ... д-ра техн. наук / Ин-т механики металлопол. систем. – Гомель, 1993. – 42 с.

2 **Неверов, А. С.** Опыт систематизации материалов по их механическим свойствам / А. С. Неверов // *Хімія: проблеми викладання*. – 2008. – № 12 (93). – С. 14–21.

3 **Ван Кревелен, Д. В.** Свойства и химическое строение полимеров / Д. В. Ван Кревелен. – М. : Химия, 1976. – 416 с.

4 *Металловедение и термическая обработка стали : Справочник. Т. 1. Методы испытаний и исследований / Под ред. М. Л. Бернштейна, А. Г. Рахштадта.* – М. : Металлургия, 1991. – 462 с.

5 **Малкнн, А. Я.** Энциклопедия полимеров / А. Я. Малкнн. – М. : Советская энциклопедия. – 1974. – Т. 2. – С. 1032.

6 **Калиничев, Э. Л.** Свойства и переработка термопластов / Э. Л. Калиничев, М. Б. Саковцева. – Л. : Химия, 1983. – 288 с.

Получено 12.12.2016

**A. S. Neverov, O. E. Pantykhov, A. A. Neverova.** On the issue of graphical representation of the relationship of elastic moduli.

Based on the analysis of the coupling equations describing the characteristic relations between pressure and deformation, variants of their graphic display are offered, allowing to allocate groups of materials with similar behaviour under the pressure. It can contribute to the choice of materials during modelling experiments taking into account the scale factor of the deformation processes of the parts of structures and constructions. Suggested graphical dependences represent a convenient method for estimating the elasticity and compliance modules from the known experimental values of other modules and compliances.