

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Д. В. ЛЕОНЕНКО

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Д. В. ЛЕОНЕНКО

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Одобрено методической комиссией заочного факультета в качестве учебно-методического пособия по выполнению контрольной работы «Плоский изгиб. Геометрические характеристики поперечных сечений» для студентов технических специальностей заочного факультета

Гомель 2014

УДК 539.3 (075.8)

ББК 30.121я7

Л47

Рецензент – заведующий кафедрой «Техническая физика и теоретическая механика» д-р техн. наук, доцент *А. О. Шимановский* (УО «БелГУТ»)

Леоненко, Д. В.

Л47 Плоский изгиб. Геометрические характеристики поперечных сечений : учеб.-метод. пособие по выполнению контрольной работы / Д. В. Леоненко; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2014. – 48 с.

ISBN 978-985-554-314-6

Изложены краткие теоретические сведения о геометрических характеристиках плоских сечений, о расчете балок на плоский прямой изгиб и методах вычисления перемещений. Рассмотрены примеры решения задач по вычислению геометрических характеристик сложных сечений и расчету статически определимых балок на поперечный изгиб.

Предназначено для студентов технических специальностей заочного факультета.

УДК 539.3 (075.8)

ББК 30.121я7

ISBN 978-985-554-314-6

© Леоненко Д. В., 2014

© Оформление. УО «БелГУТ», 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	4
1.1 Геометрические характеристики плоских сечений	4
1.1.1 Статические моменты и центр тяжести сечения	4
1.1.2 Моменты инерции и сопротивления	6
1.1.3 Главные оси и моменты инерции	8
Контрольные вопросы	9
1.2 Изгиб балок	11
1.2.1 Виды изгиба. Чистый изгиб	11
1.2.2 Поперечный изгиб	13
1.2.3 Расчеты на прочность при изгибе	15
1.2.4 Перемещения при изгибе	17
Контрольные вопросы	22
2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	24
2.1 Геометрические характеристики	24
2.2 Расчет балок при плоском изгибе	28
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	47
ПРИЛОЖЕНИЕ А Сортамент двутавров стальных горячекатаных	48

Леоненко Денис Владимирович

1 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

1.1.1 Статические моменты и центр тяжести сечения

Площадь. Геометрические характеристики поперечных сечений широко используются при расчетах на прочность и жесткость. Простейшей характеристикой, зависящей от формы и размеров поперечного сечения, является его площадь (рисунок 1.1):

$$A = \int_A dA.$$

Эта величина используется непосредственно в расчетах при растяжении и сдвиге. При других видах сопротивления (кручение, изгиб) применяются более сложные геометрические характеристики поперечных сечений. Например, для определения центра тяжести используются статические моменты сечения, при расчетах на изгиб – моменты инерции и т. д.

Если сложное сечение разбить на простые фигуры, то площадь всего сечения равна алгебраической сумме площадей составляющих фигур.

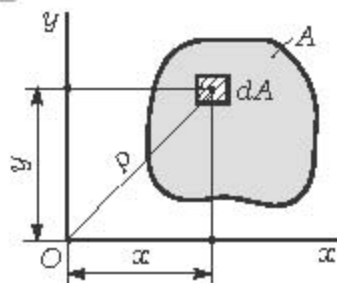


Рисунок 1.1

Статические моменты. Статическими моментами плоского сечения S_x , S_y относительно осей x , y называются величины (см. рисунок 1.1):

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA.$$

В зависимости от расположения осей статические моменты могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. Их размерность – метр в 3-й степени (м^3).

Если сложное сечение разбить на простые фигуры, то статический момент всего сечения относительно любой оси (например, x) равен алгебраической сумме статических моментов составляющих фигур относительно той же оси:

$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + \dots + S_x^{(n)},$$

где n – количество простых фигур, составляющих сечение.

Например, сложное сечение на рисунке 1.2, а можно разбить на ряд простых фигур: прямоугольник 1, прямоугольник 2 и круг 3 (рисунк 1.2, б). Статический момент всего сечения

$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} - S_x^{(3)}.$$

Перед $S_x^{(3)}$ стоит знак «минус», так круг 3 вырезается из прямоугольника 2.

То же сложное сечение можно рассмотреть состоящим из прямоугольника 1 с двумя вырезами: прямоугольника 2 и круга 3 (рисунк 1.2, в). Статический момент в этом случае

$$S_x = S_x^{(1)} - S_x^{(2)} - S_x^{(3)}.$$

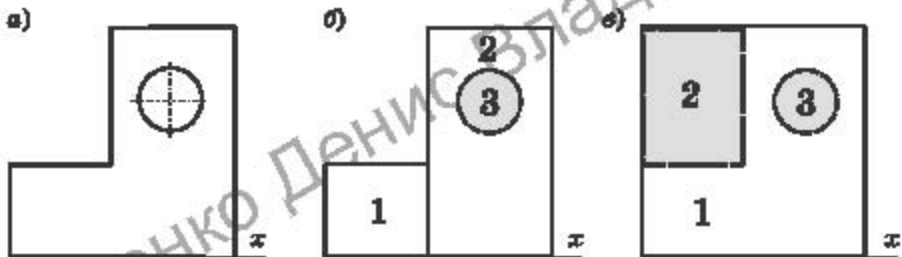


Рисунок 1.2

Центр тяжести сечения. Оси, относительно которых статические моменты равны нулю, называются *центральнойми*. Они составляют *центральную систему* координат. Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести* поперечного сечения.

Порядок определения центра тяжести сложного сечения:

- сечение разбивается на n частей, площади A , и положение центров тяжести C , которых известны;
- задается вспомогательная система координат x_0y_0 , по отношению к которой определяются координаты центров тяжести (x_c, y_c) каждой части;
- вычисляются статические моменты каждой части $S_{x_0}^{(i)}, S_{y_0}^{(i)}$ во вспомогательной системе координат;

- рассчитываются статические моменты всей фигуры S_{x_0} , S_{y_0} по формулам:

$$S_{x_0} = S_{x_0}^{(1)} + S_{x_0}^{(2)} + \dots + S_{x_0}^{(n)}; \quad S_{y_0} = S_{y_0}^{(1)} + S_{y_0}^{(2)} + \dots + S_{y_0}^{(n)};$$

- искомые координаты центра тяжести составного сечения вычисляются по формулам:

$$x_c = S_{y_0} / A; \quad y_c = S_{x_0} / A.$$

В качестве вспомогательной оси на практике удобно брать такую ось, относительно которой легко найти координаты центра тяжести частей или центральную ось одной из них. В этом случае статический момент этой части относительно вспомогательной оси равен нулю, и вычисления упрощаются.

Если известно положение центра тяжести сечения, то статические моменты можно определить по формулам:

$$S_x = y_c A; \quad S_y = x_c A.$$

1.1.2 Моменты инерции и сопротивления

Моменты инерции. Осевыми моментами инерции J_x, J_y относительно прямоугольных осей x и y называются величины

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A x^2 dA.$$

Центробежным моментом инерции J_{xy} относительно плоскости xOy называется величина

$$J_{xy} = \int_A xy dA.$$

Интеграл вида

$$J_p = \int_A \rho^2 dA$$

называется полярным моментом инерции сечения.

Полярный момент инерции связан с осевыми следующим выражением:

$$J_p = J_x + J_y.$$

Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны. Центробежный момент инерции может принимать положительные, отрицательные и нулевые значения, в зависимости от расположения сечения относительно осей координат. Моменты инерции и измеряются в метрах в 4-й степени (м^4).

Для вычисления моментов инерции сложного сечения его разбивают на простые фигуры. Для каждой из фигур находят момент инерции относительно заданной оси. Момент инерции сложного сечения равен сумме моментов инерции составных частей:

$$J = J^{(1)} + J^{(2)} + \dots + J^{(n)},$$

где n – количество простых фигур, составляющих сечение.

В случае, если простая фигура вырезается из сечения, то, как и для статических моментов, перед соответствующим моментом инерции ставится знак минус.

Моменты сопротивления. Осевые моменты сопротивления сечения определяются отношениями

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}},$$

где y_{\max} , x_{\max} – расстояния от осей x, y до наиболее удаленных точек сечения (рисунок 1.3), м.

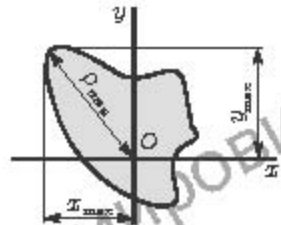


Рисунок 1.3

Полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}},$$

где ρ_{\max} – радиус-вектор точки сечения, наиболее удаленной от начала координат, м.

Моменты сопротивления измеряются в метрах кубических (м^3). Следует отметить, что момент сопротивления составного сечения не равен сумме моментов сопротивления составляющих его фигур.

Осевыми радиусами инерции сечения называются следующие величины:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}.$$

Радиусы инерции измеряются в метрах (м). Они используются при расчетах конструкций на сложное сопротивление, задачах устойчивости и других видах расчета.

Моменты сопротивления, радиусы инерции, как и осевые моменты инерции, всегда положительны.

Изменение моментов инерции при переносе осей координат. Если система координат Sxy – центральная (рисунок 1.4), то моменты инерции в новой системе координат:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A; \quad J_{y_1} = J_y + b^2 A; \quad J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abA,$$

где $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1 y_1}$ – моменты инерции в новой системе координат, м^4 ;
 J_x, J_y, J_{xy} – моменты инерции в старой системе координат, м^4 ;
 A – площадь сечения, м^2 ;
 a, b – расстояние между осями x и y соответственно, м .

В семействе параллельных осей *минимальные* осевые моменты инерции получаются относительно центральных осей. При параллельном переносе осей (если исходные оси центральные) осевые моменты инерции увеличиваются на величину, равную произведению площади сечения на квадрат расстояния между осями.

Моменты инерции относительно любой оси параллельной заданной определяются формулами (рисунок 1.5).

$$J_{x_1} = J_x - 2aS_x + a^2A; \quad J_{y_1} = J_y - 2bS_y + b^2A;$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} - bS_x - aS_y + abA,$$

где S_x, S_y – статические моменты относительно старых осей, м^3 .

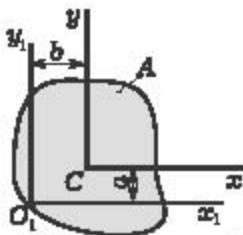


Рисунок 1.4

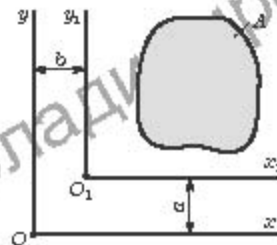


Рисунок 1.5

1.1.3 Главные оси и моменты инерции

При повороте осей координат относительно центра моменты инерции, как правило, изменяются. *Главными осями инерции* называются оси, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения.

Главными центральными осями инерции называются главные оси инерции, проходящие через центр тяжести сечения.

Главными центральными моментами инерции называются моменты инерции относительно главных центральных осей.

У сечений, имеющих *более двух осей симметрии* (например, круг, квадрат, равносторонний треугольник), все центральные оси будут главными.

Если фигура имеет *две оси симметрии с одинаковыми моментами инерции*, то любая другая центральная ось этой фигуры тоже будет главной, и моменты инерции относительно любой центральной оси будут одинаковыми.

Угол α_0 , на который следует повернуть неглавные оси координат x, y , чтобы перейти в главные оси u, v (рисунк 1.6), определяется соотношением

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

В главных осях центробежный момент инерции равен нулю:

$$J_{uv} = 0.$$

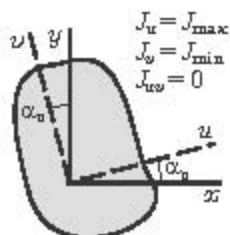


Рисунок 1.6

Верно и обратное: если в некоторой системе координат центробежный момент инерции равен нулю, то эта система – главная.

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда будет главной центральной, поскольку центр тяжести лежит на оси симметрии.

Любая ось, перпендикулярная оси симметрии, будет являться главной осью инерции.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции.

Моменты инерции в главных осях координат можно выразить через моменты инерции любой другой проходящей через данную точку системы координат следующим выражением:

$$J_{\max/\min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_y - J_x)^2}{4} + J_{xy}^2}.$$

После того как сечение вычерчено в масштабе, нетрудно визуально установить, которой из двух главных осей соответствует максимальный и которой – минимальный момент инерции.

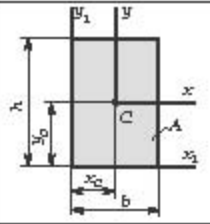
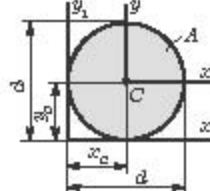
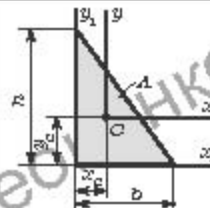
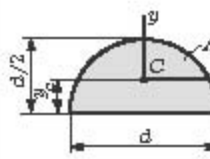
Геометрические характеристики простейших фигур (круг, прямоугольник, треугольник, полукруг) приведены в таблице 1.1.

Контрольные вопросы

- 1 Как вычислить статический момент фигуры относительно оси?
- 2 Относительно какой оси статический момент равен нулю?
- 3 Какие оси называются центральными?
- 4 По каким формулам можно определить координаты центра тяжести фигуры?
- 5 Что называется осевым, центробежным, полярным моментом инерции?
- 6 В каких единицах измеряют моменты инерции?
- 7 По каким формулам вычисляют моменты инерции прямоугольника, треугольника, круга относительно центральных осей?
- 8 Какие оси называются главными?

- 9 Какие оси называются главными центральными?
- 10 Какие моменты инерции называются главными?
- 11 Как вычислить главные моменты инерции?
- 12 Что такое момент сопротивления?
- 13 В каких единицах измеряют моменты сопротивления?
- 14 Что такое радиус инерции?
- 15 В каких единицах измеряют моменты сопротивления?

Таблица 1.1

Форма сечения	Геометрические характеристики
	$A = bh; \quad x_c = \frac{b}{2}; \quad y_c = \frac{h}{2}; \quad S_x = S_y = 0;$ $S_{x_1} = \frac{bh^2}{2}; \quad S_{y_1} = \frac{hb^2}{2}; \quad J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12};$ $W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}$
	$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad x_c = y_c = \frac{d}{2}; \quad S_x = S_y = 0;$ $S_{x_1} = S_{y_1} = \frac{\pi d^3}{8}; \quad J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64};$ $W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}$
	$A = \frac{bh}{2}; \quad x_c = \frac{b}{3}; \quad y_c = \frac{h}{3};$ $S_x = S_y = 0; \quad S_{x_1} = \frac{bh^2}{6}; \quad S_{y_1} = \frac{hb^2}{6};$ $J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{hb^3}{36}$
	$A = \frac{\pi d^2}{8}; \quad y_c = \frac{2d}{3\pi} \approx 0,212d;$ $S_x = S_y = 0; \quad S_{x_1} = \frac{d^3}{12}; \quad J_x = \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right);$ $J_y = \frac{\pi d^4}{128}; \quad J_{x_1} = \frac{\pi d^4}{128}$

1.2 ИЗГИБ БАЛОК

1.2.1 Виды изгиба. Чистый изгиб

Внутренние усилия. Изгиб – это такой вид деформирования, при котором в поперечных сечениях стержней возникают изгибающие моменты $M = \{M_x, M_y\}$. Если все остальные внутренние силовые факторы равны нулю, то изгиб называется *чистым*. Если в поперечных сечениях, кроме изгибающего момента, присутствует поперечная сила $Q = \{Q_x, Q_y\}$, то изгиб называется *поперечным*.

Если внешние нагрузки приложены в одной силовой плоскости, то изгиб называется *плоским*. Если при этом силовая линия¹⁾ совпадает с одной из главных центральных осей сечения, то изгиб будет *прямым*. В противном случае изгиб является *косым*.

Напряжения и деформации. Закон Гука. Рассмотрим участок балки в состоянии чистого изгиба (рисунок 1.7, а). Верхние волокна удлиняются, нижние – укорачиваются. В поперечных сечениях возникают нормальные напряжения σ (рисунок 1.7, б).

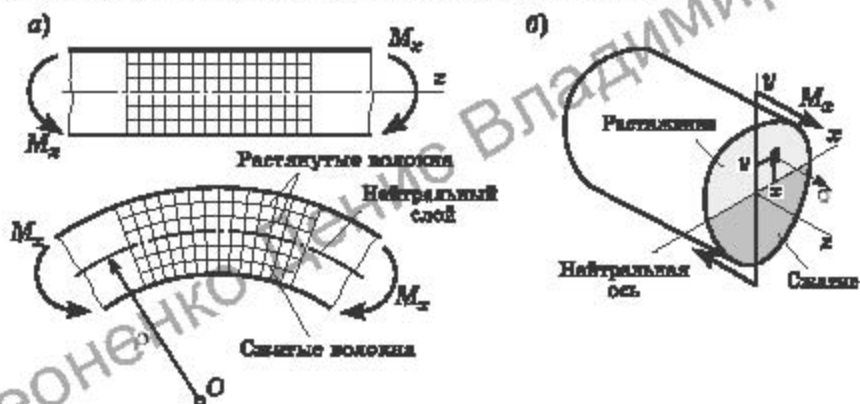


Рисунок 1.7

Промежуточный (нейтральный) слой не меняет своей длины, напряжения здесь $\sigma = 0$. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью* (нулевой линией). Можно считать, что при чистом изгибе она принимает форму дуги окружности радиуса ρ .

¹⁾ *Силовая плоскость* – это плоскость, в которой приложены внешние нагрузки. *Силовая линия* – это линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения.

Закон Гука при изгибе

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y,$$

где E – модуль Юнга, Па;

ρ – радиус кривизны изогнутой нейтральной оси балки, м;

y – расстояние от рассматриваемого волокна до нейтрального слоя, м.

Связь нормальных напряжений с изгибающим моментом. Рассмотрим *чистый изгиб* балки в вертикальной плоскости, при котором в ее сечениях возникает только изгибающий момент M_x (см. рисунок 1.7, б). Пусть оси координат x, y будут *главными центральными осями* поперечного сечения.

В сечениях присутствуют только нормальные напряжения σ . Они связаны с изгибающим моментом зависимостью

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y,$$

где M_x – изгибающий момент в рассматриваемом сечении, Н·м;

J_x – момент инерции относительно главной центральной оси, м⁴;

y – координата рассматриваемой точки в поперечном сечении, м.

Нормальные напряжения изменяются по высоте сечения линейно. Максимальные значения в поперечном сечении достигаются в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси x (рисунок 1.8, а):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x},$$

где $J_x / y_{\max} = W_x$ – осевой момент сопротивления.

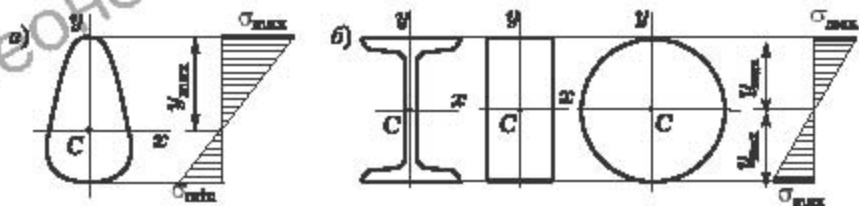


Рисунок 1.8

Если сечение симметрично относительно нейтральной оси x , то нормальные напряжения на крайних верхних и нижних волокнах одинаковы по абсолютной величине (рисунок 1.8, б).

Знак напряжений связан с направлением оси y и изгибающего момента M_x .

1.2.2 Поперечный изгиб

Рассмотрим *поперечный изгиб в вертикальной плоскости*, при котором в сечениях балки присутствуют и изгибающий момент M_x , и поперечная сила Q_y . При этом в поперечном сечении балки возникают не только нормальные σ , но и *касательные напряжения* τ (рисунок 1.9, а).

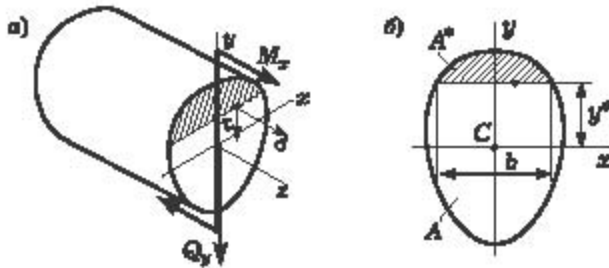


Рисунок 1.9

Нормальные напряжения. Формулы

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y; \quad \sigma = \frac{M_x}{J_x} y,$$

полученные при чистом изгибе, могут применяться и при поперечном изгибе.

Касательные напряжения. Для расчета касательных напряжений в поперечных сечениях балок (рисунок 1.9, б) Д. И. Журавским была предложена следующая формула:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x b},$$

где Q_y – абсолютная величина поперечной силы в том сечении, где вычисляются касательные напряжения, Н;

S_x^* – абсолютная величина статического момента отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси x (той части площади A^* , которая заключена между линией, где определяются τ , и краем сечения), м^3 ;

J_x – момент инерции этого сечения относительно его нейтральной линии (главной центральной оси x), м^4 ;

b – ширина сечения на уровне, где определяются τ , м.

Данная формула получена в предположении, что касательные напряжения по ширине сечения распределены равномерно. Для большинства поперечных сечений касательные напряжения достигают максимума на нейтральной оси и обращаются в нуль на внешних волокнах.

Распределение напряжений по прямоугольному сечению. Пусть сечение балки представляет собой прямоугольник (рисунок 1.10).

Нормальные напряжения распределены по высоте сечения линейно, достигая максимума на крайних волокнах:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{\theta M_x}{bh^2},$$

где M_x – изгибающий момент в рассматриваемом сечении, Н·м;

J_x – момент инерции прямоугольника относительно главной центральной оси x , м⁴; $J_x = bh^3/12$;

y – ордината точки в поперечном сечении, м;

W_x – момент сопротивления прямоугольника, м³; $W_x = bh^2/\theta$.

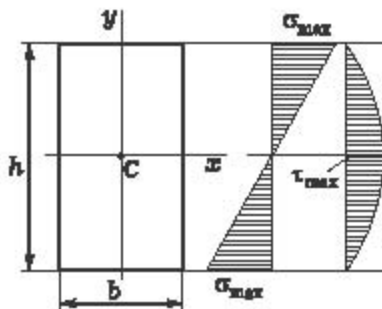


Рисунок 1.10

Касательные напряжения определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{\theta Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Следовательно, эпюра касательных напряжений по высоте сечения ограничена параболой (см. рисунок 1.10). Наибольшие напряжения имеют место при $y = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh} = 1,5 \frac{Q_y}{A}.$$

Распределение напряжений по двутавровому сечению. Пусть балка имеет двутавровое сечение (рисунок 1.11, а). Приближенно принимаем его составленным из трех прямоугольников (рисунок 1.11, б).

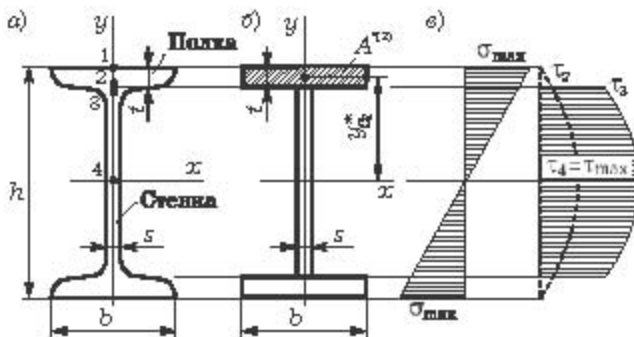


Рисунок 1.11

Нормальные напряжения в нем, как и для прямоугольного сечения, определяются соотношениями

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Момент инерции J_x и момент сопротивления W_x для стандартных двутавров, как и для других прокатных профилей, приведены в таблицах сортамента.

Эпюра σ прямолинейна, проходит через центр тяжести сечения.

Касательные напряжения вычислим по формуле Журавского в указанных на рисунке 1.11, а четырех точках.

В верхней точке 1

$$\tau_1 = \frac{Q_y S_x^{*(1)}}{J_x b_1} = 0,$$

так как $S_x^{*(1)} = 0$ – статический момент отсеченной в точке 1 верхней части поперечного сечения нулевой площади.

Для точки 2 получаем (см. рисунок 1.11, б)

$$\tau_2 = \frac{Q_y S_x^{*(2)}}{J_x b_2}, \quad \text{где } S_x^{*(2)} = y_G A^{*(2)} = \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) bt.$$

Для точки 3

$$\tau_3 = \frac{Q_y S_x^{*(3)}}{J_x b_3}, \quad \text{где } S_x^{*(3)} = S_x^{*(2)} = \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) bt; \quad b_3 = s.$$

Так как $b \gg d$, то $\tau_2 \gg \tau_3$.

В точке 4, по сравнению с точкой 3, увеличится статический момент. Для стандартных двутавров его можно не вычислять, а взять из таблиц сортамента. По своей величине $\tau_4 > \tau_3$, так как

$$S_x^{*(4)} > S_x^{*(3)}.$$

Эпюра касательных напряжений в пределах стенки двутавра ограничена параболой (рисунок 1.11, в).

На практике эпюру τ для двутавров строят только в пределах стенки, так как в полках допущение о равномерном распределении касательных напряжений по ширине сечения не выполняется (штриховая линия на рисунке 1.11, в).

1.2.3 Расчеты на прочность при изгибе

Опасным сечением балки называется сечение, в точках которого возникают максимальные нормальные напряжения. Если балка имеет постоянное сечение по длине, то опасным является сечение, в

котором возникает максимальный изгибающий момент $M_{г\max}$. Расчет на прочность, как правило, проводят по нормальным напряжениям.¹⁾ Условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{г\max}}{W_x} \leq R \text{ или } \sigma_{\max} = \frac{M_{г\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где σ_{\max} – наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении, Па;

$M_{г\max}$ – изгибающий момент в опасном сечении, Н·м;

W_x – момент сопротивления опасного сечения, м³;

R – расчетное сопротивление, Па;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение, Па.

На практике используются три типа расчетов на прочность:

▪ *проверочный расчет* состоит в проверке выполнения условия прочности

$$\sigma_{\max} \leq R \text{ или } \sigma_{\max} \leq [\sigma];$$

▪ *подбор размеров поперечного сечения (проектный расчет)*: из условия прочности для опасного сечения определяется требуемый момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_{г\max}}{R} \text{ или } W_x \geq \frac{M_{г\max}}{[\sigma]},$$

далее с учетом формы сечения подбираются его размеры;

▪ *определение грузоподъемности (несущей способности)*: определяется величина изгибающего момента в опасном сечении

$$M_{г\max} \geq W_x R \text{ или } M_{г\max} \geq W_x [\sigma],$$

по ней вычисляется максимальная величина внешней нагрузки.

Для тонкостенных профилей (двутавры, швеллеры, уголки и др.) необходимо дополнительно выполнить *проверку прочности по касательным напряжениям*.

Для стандартных прокатных профилей, если выполняется условие прочности по σ , то обычно выполняется и условие прочности по τ . Если размеры сечения выбраны из условия прочности по нормальным напряжениям, а условие прочности по касательным напряжениям не выполняется, следует увеличить размеры.

Расчет балок с учетом развития пластических деформаций. При расчете балок с учетом пластических деформаций принимается диаграмма Прандтля (рисунок 1.12). Материал, деформирование которого описывается диаграммой Прандтля, называется *идеальным упругопластическим*. При увеличении внешней нагрузки до предельной в опасном сечении возникает пластический шарнир.

¹⁾ При расчетах на прочность в строительстве используются расчетные сопротивления R и R_c , в машиностроении – допускаемые напряжения $[\sigma]$ и $[\tau]$.

Пластическим шарниром называется явление, при котором напряжения во всех точках сечения равны пределу текучести σ_y . Внешняя нагрузка достигает предельного значения F_d , в опасном сечении возникает предельный изгибающий момент M_{pl} (рисунок 1.13):

$$M_{pl} = \sigma_y W_{pl}$$

где σ_y – предел текучести, МПа;

W_{pl} – пластический момент сопротивления, м³.

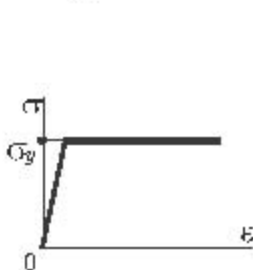


Рисунок 1.12

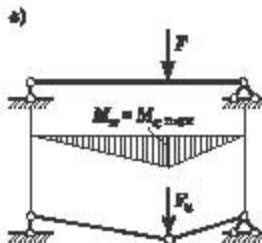
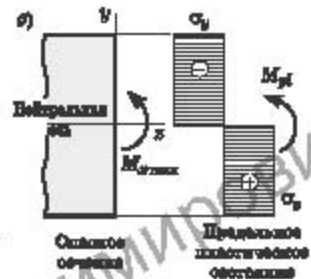


Рисунок 1.13



Пластический момент сопротивления определяется суммой статических моментов верхней S_1 и нижней S_2 частей поперечного сечения относительно нейтральной оси в предельном состоянии:

$$W_{pl} = S_1 + S_2$$

Для симметричных сечений

$$W_{pl} = 2S_x$$

где S_x – статический момент половины сечения относительно оси z .

1.2.4 Перемещения при изгибе

Упругая линия балки. Различают два типа перемещений:

- *линейные* – прогибы $y(z)$;
- *угловые* – углы поворота $\theta(z)$ поперечных сечений балки вокруг их нейтральных осей или углы между направлениями продольной оси балки до и после деформирования (рисунок 1.14).

Гипотеза о малости деформаций позволяет считать, что прогибы направлены перпендикулярно продольной оси z недеформированной балки; углы поворота настолько малы, что можно принять $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$. Согласно геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg} \theta = dy/dz$ угол поворота сечения будет равным

$$\theta(z) = dy/dz = y'$$

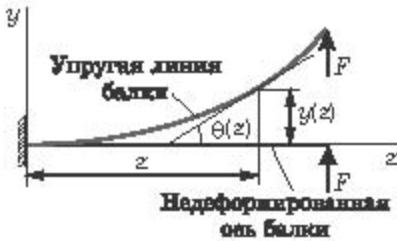


Рисунок 1.14

Эта кривая описывается дифференциальным уравнением упругой линии балки

$$y'' = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Оно является приближенным, так как использовано допущение о малости углов поворота. Кроме этого, не учтены деформации сдвига, связанные с наличием поперечных сил. Однако в подавляющем большинстве случаев влияние поперечных сил незначительно и им можно пренебречь.

Используя дифференциальные зависимости между q , Q_y и M_x

$$q = \frac{dQ_y}{dz}, \quad Q_y = \frac{dM_x}{dz}, \quad q = \frac{d^2 M_x}{dz^2},$$

получаем, что для балки с постоянным сечением справедливы следующие уравнения:

$$Q_y = EJ_x y'''; \quad q = EJ_x y^{IV}.$$

Для вычисления перемещений при изгибе используются метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки, метод начальных параметров, метод Максвелла-Мора и др.

Метод начальных параметров. Данный метод используется для вычисления перемещений в балках постоянной жесткости.

Пусть на балку длиной l действуют различные виды нагрузок (рисунок 1.15). Составим расчетную схему данного метода. Для этого:

- начало координат связываем с левым торцом балки;
- сосредоточенный момент m в выражении для внутреннего изгибающего момента представляем в виде произведения $m(z - \bar{z})^0$, где \bar{z} – расстояние от начала координат до места приложения момента, т. е. привязываем к своему сечению;

Прогиб по направлению оси считается положительным, против – отрицательным. Угол принимается положительным, если поперечное сечение поворачивается против часовой стрелки, отрицательным – если поворот происходит по часовой стрелке.

Кривая, в которую превращается продольная ось балки при деформировании, называется упругой линией.

▪ распределенную нагрузку продлеваем до конца балки, одновременно уравновешивая противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности;

▪ интегрирование выражений для изгибающего момента, содержащих скобки, проводим без раскрытия скобок;

▪ слагаемые в выражении для изгибающего момента выписываем строго слева направо, начиная от левого торца балки.

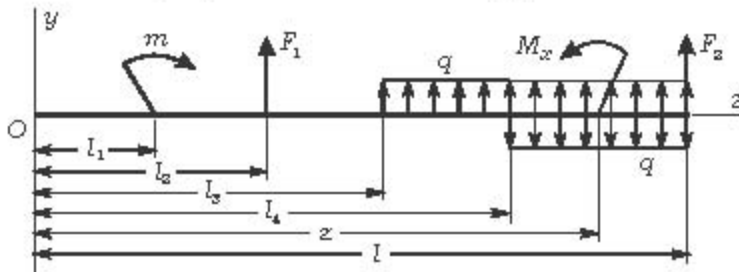


Рисунок 1.15

Используя метод сечений, составляем выражение для изгибающего момента M_x на последнем, пятом, участке балки (см. рисунок 1.15). При этом распределенную нагрузку продлеваем до правого конца балки и снизу вводим противоположно направленную уравновешивающую нагрузку интенсивности q :

$$M_x = m(z - l_1)^0 + F_1(z - l_2) + \frac{q(z - l_3)^2}{2} - \frac{q(z - l_4)^2}{2}.$$

Сила F_2 не входит в это уравнение, так как расположена правее рассматриваемого сечения.

Подставим полученное выражение для момента M_x в дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$EJ_x y'' = m(z - l_1)^0 + F_1(z - l_2) + \frac{q(z - l_3)^2}{2} - \frac{q(z - l_4)^2}{2}.$$

Интегрируем вдоль оси балки

$$EJ_x y' = EJ_x \theta_0 + m(z - l_1) + F_1 \frac{(z - l_2)^2}{2} + \frac{q(z - l_3)^3}{6} - \frac{q(z - l_4)^3}{6};$$

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + m \frac{(z - l_1)^2}{2} + F_1 \frac{(z - l_2)^3}{6} + \frac{q(z - l_3)^4}{24} - \frac{q(z - l_4)^4}{24}.$$

Величины θ_0 и y_0 являются *углом поворота и прогибом крайнего левого (начального) сечения балки*. Поэтому их называют *начальными параметрами*. Они определяются из условий закрепления балки.

При определении перемещений методом начальных параметров следует учитывать только те нагрузки, которые расположены слева от рассматриваемого сечения.

Метод Максвелла-Мора. Определение перемещений с помощью метода Максвелла-Мора относится к энергетическим методам. Он позволяет вычислять любые типы перемещений (удлинения, прогибы, углы поворота, углы закручивания и т. п.) для всех типов стержневых систем (балки, рамы, фермы). Перемещения (прогибы и углы поворота) для плоской задачи могут быть получены с помощью интеграла Мора:

$$\Delta_{kr} = \sum \int \frac{\bar{N}N_r}{EA} dz + \sum \int \frac{\eta \bar{Q}Q_r}{GA} dz + \sum \int \frac{\bar{M}M_r}{EJ} dz,$$

где $\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ – внутренние усилия в «единичном» состоянии;
 N_r, Q_r, M_r – внутренние усилия в «грузовом» состоянии;
 EA, GA, EJ – жесткости при растяжении-сжатии, сдвиге и изгибе;
 η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению.

«Единичным» состоянием системы называется состояние системы под действием единичной нагрузки ($\bar{F} = 1$ или $\bar{m} = 1$), «грузовым» состоянием системы – состояние при действии внешней нагрузки.

Как правило, при изгибе балок основное влияние на перемещения имеют изгибающие моменты, поэтому в интеграле Мора учитывают только последнее слагаемое:

$$\Delta_{kr} = \sum \int \frac{\bar{M}M_r}{EJ} dz.$$

Для вычисления интеграла нужно знать аналитическое выражение момента на каждом из участков, что не всегда удобно. Поэтому для вычисления интеграла Мора для участков постоянной жесткости используют различные способы, позволяющие избежать непосредственного интегрирования.

Рассмотрим участок балки постоянной жесткости EJ длиной l , для которой построены эпюры изгибающих моментов в грузовом M_r и единичном \bar{M} состояниях (рисунок 1.16).

Перемещения по формуле Симпсона (см. рисунок 1.16, а)

$$\Delta_{kr} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}M_r dz = \frac{l}{6EJ} (ac + 4fg + bd),$$

где EJ – изгибная жесткость;

l – длина участка;

a, b, f – крайние и средняя ординаты эпюры M_r ;

c, d, g – крайние и средняя ординаты \bar{M} .

Формула Симпсона является точной, если две эпюры прямолинейны или одна из них прямолинейная, а вторая представляет собой квадратную параболу.

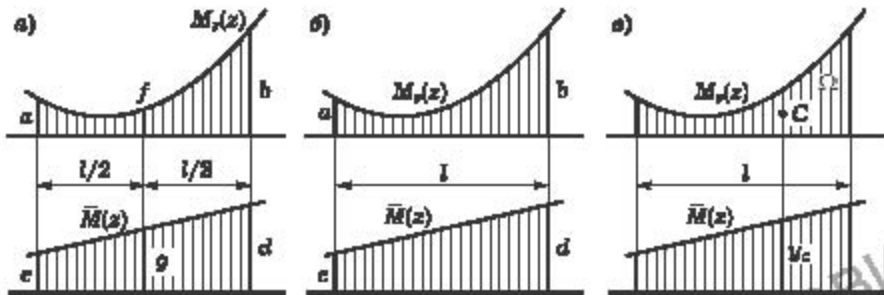


Рисунок 1.16

Перемещения по формуле Мюллера-Бреслау (см. рисунок 1.16, б)

$$\Delta_{кр} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M} M_r dz = \frac{l}{6EJ} (2ac + 2bd + ad + bc),$$

где EJ – изгибная жесткость;

l – длина участка;

a, b – крайние ординаты эпюры M_r ;

c, d – крайние ординаты \bar{M} .

Формула Мюллера-Бреслау применима, если две эпюры прямолинейны. При вычислении произведений в правой части формул Симпсона и Мюллера-Бреслау необходимо учитывать знаки ординат a, b, c, d, g . Произведения ординат, расположенных по одну сторону от оси, будут *положительными*, по разным – *отрицательными*.

Формула Верещагина позволяет заменить интегрирование перемножением площади одной эпюры на ординату второй (обязательно прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести первой (см. рисунок 1.16, в):

$$\Delta_{кр} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M} M_r dz = \frac{1}{EJ} \Omega y_c,$$

где EJ – изгибная жесткость;

Ω – площадь «грузовой» эпюры M_r ;

y_c – ордината «единичной» эпюры \bar{M} , взятая под центром тяжести эпюры M_r .

Результат перемножения будет *положительным*, если центр тяжести одной эпюры S и ордината y_c на другой эпюре расположены по одну сторону от оси стержня, *отрицательным* – по разные.

Для использования формулы Верещагина необходимо знать площади и центры тяжести эпюр. На рисунке 1.17 приведены наиболее часто встречающиеся на практике формы эпюр.

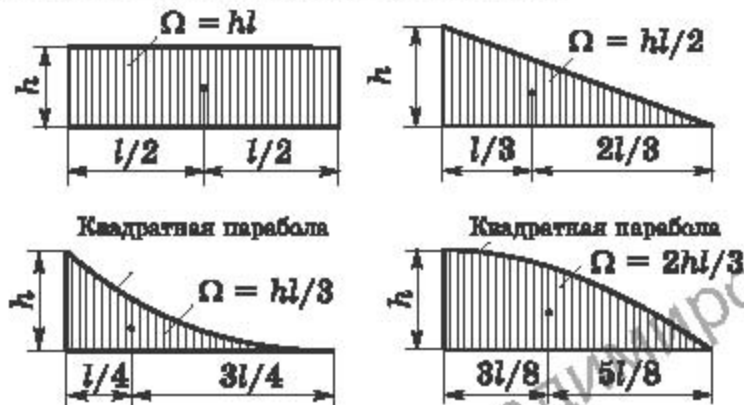


Рисунок 1.17

Порядок определения перемещения Δ_{Kk} методом Мора:

- строят эпюру изгибающих моментов M_k от заданной нагрузки (в «грузовом» состоянии);

- по направлению искомого перемещения в точке K прикладывают *единичное усилие* (для линейных перемещений – сосредоточенную силу $\bar{F} = 1$, для угловых – момент $\bar{m} = 1$);

- строят эпюру изгибающих моментов \bar{M} в «единичном» состоянии;
- разбивают систему на участки, в пределах каждого из которых жесткость постоянна и хотя бы одна из эпюр прямолинейна;

- для каждого участка вычисляют перемещения, используя формулы Верещагина, Симпсона или Мюллера-Браслау;

- перемещения для каждого участка суммируют.

Если найденное перемещение положительно, то оно совпадает с направлением приложенного единичного усилия, если отрицательно – противоположно ему.

Контрольные вопросы

- 1 Какие внутренние усилия возникают в изгибаемом стержне?
- 2 Какой дифференциальной зависимостью связаны между собой изгибающий момент и поперечная сила?
- 3 Как проходит нейтральная ось в поперечном сечении балки?

4 По какому закону изменяются нормальные напряжения по высоте поперечного сечения балки?

5 По какому закону изменяются касательные напряжения по высоте прямоугольного поперечного сечения балки?

6 По какой формуле вычисляют касательные напряжения в балке?

7 Запишите условие прочности по нормальным напряжениям.

8 Запишите условие прочности по касательным напряжениям.

9 В каких точках прямоугольного поперечного сечения балки возникают наибольшие касательные напряжения?

10 В чем условность эпюры касательных напряжений в полках двутавра?

11 Какие перемещения поперечного сечения балки возникают при изгибе?

12 Какие типы перемещений бывают при изгибе?

13 Запишите уравнение упругой оси балки.

14 Какие методы расчета перемещений бывают при изгибе?

15 С помощью каких формул можно вычислить интеграл Мора?

16 Запишите формулу Симпсона.

17 Запишите формулу Мюллера-Бреслау.

18 Запишите формулу Верещагина.

19 Что такое «единичное» и «грузовое» состояния системы?

Леоненко Денис Владимирович

2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ПРИМЕР 1. Стальная балка имеет поперечное сечение (рисунок 2.1), составленное из неравнополочных уголков $200 \times 125 \times 12$ и листа 6×600 , которые жестко соединены между собой. Требуется: показать положение главных центральных осей x, y ; вычислить главные центральные моменты инерции J_x, J_y , моменты сопротивления W_x, W_y и радиусы инерции i_x, i_y сечения. Размеры даны в миллиметрах.

Главные центральные оси. Сечение симметрично относительно двух осей, поэтому положение центра тяжести находится на пересечении этих осей. Главными центральными осями являются оси симметрии x, y . Моменты инерции относительно этих осей J_x, J_y будут главными центральными моментами инерции.

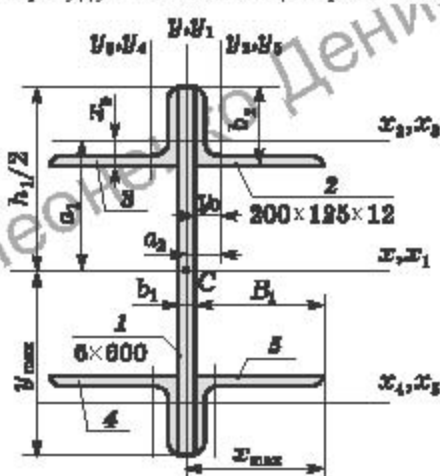


Рисунок 2.1

Геометрические характеристики составных частей сечения. Разбиваем сечение на пять фигур: 1 – лист (прямоугольник с высотой $h_1 = 60$ см и шириной $b_1 = 0,6$ см), 2, 3, 4, 5 – уголки $200 \times 125 \times 12$. Проводим для каждой части собственные главные центральные оси. Все расчеты ведем до двух цифр после запятой. Индекс в скобках сверху обозначает номер фигуры. Вычислим характеристики частей:

- 1) *прямоугольник:*
▪ площадь $A^{(1)} = b_1 h_1 =$
 $= 0,6 \cdot 60 = 36 \text{ см}^2;$

▪ моменты инерции относительно главных центральных осей всего сечения x, y будут равны моментам инерции относительно собственных главных центральных осей x_1, y_1 :

$$J_x^{(1)} = J_{x_1}^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{1 \cdot 60^3}{12} = 18000 \text{ см}^4;$$

$$J_y^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{60 \cdot 0,6^3}{12} = 1,08 \text{ см}^4;$$

2) уголки 200 x 125 x 12. Из сортамента выписываем характеристики уголка:

▪ площадь $A^{(2)} = 37,89 \text{ см}^2$;

▪ расстояние от граней до центра тяжести уголка $x_0 = 2,83 \text{ см}$, $y_0 = 6,54 \text{ см}$;

▪ моменты инерции относительно собственных главных центральных осей x_2, y_2

$$J_{x_2}^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} = 337 \text{ см}^4; \quad J_{x_2}^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} = 1568,2 \text{ см}^4,$$

где индекс «2» указывает, что соответствующие значения моментов инерции взяты в таблицах сортамента.

Для вычисления моментов инерции относительно главных центральных осей всей фигуры x, y воспользуемся формулами перехода от собственных центральных осей x_2, y_2 уголка к нецентральной для него осям x, y :

$$J_x^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} + a_1^2 A^{(2)} = 337 + 20,3^2 \cdot 37,89 = 15951,09 \text{ см}^4;$$

$$J_y^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} + a_2^2 A^{(2)} = 1568,2 + 6,84^2 \cdot 37,89 = 3340,91 \text{ см}^4,$$

где a_1 – расстояние между осями x_2 и x ,

$$a_1 = h_1/2 - b_2 + x_0 = 60/2 - 12,5 + 2,83 = 20,3 \text{ см};$$

a_2 – расстояние между осями y_2 и y ,

$$a_2 = b_1/2 + y_0 = 0,6/2 + 6,54 = 6,84 \text{ см}.$$

Геометрические характеристики всего сечения. Моменты инерции сечения вычисляются как сумма моментов инерции отдельных его частей относительно той же оси:

$$J_x = J_x^{(1)} + 4 J_x^{(2)} = 18000 + 4 \cdot 15951,09 = 81804,36 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} + 4 J_y^{(2)} = 1,08 + 4 \cdot 3340,91 = 13364,72 \text{ см}^4.$$

Моменты сопротивления:

$$W_x = J_x / y_{\text{max}} = 81804,36 / 30 = 2726,81 \text{ см}^3;$$

$$W_y = J_y / x_{\text{max}} = 13364,72 / 20,3 = 658,36 \text{ см}^3,$$

где

$$y_{\text{max}} = h_1/2 = 60/2 = 30 \text{ см},$$

$$x_{\text{max}} = b_1/2 + B_1 = 0,6/2 + 20 = 20,3 \text{ см}.$$

Полная площадь сечения

$$A = A^{(1)} + 4A^{(2)} = 36 + 4 \cdot 37,89 = 187,56 \text{ см}^2.$$

Находим радиусы инерции сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{81804,36}{187,56}} = 20,88 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{13364,72}{187,56}} = 8,44 \text{ см}.$$

ПРИМЕР 2. Стойка имеет поперечное сечение, ослабленное боковым вырезом (рисунок 2.2). Требуется: вычертить сечение в масштабе; показать положение главных центральных осей x, y ; вычислить главные центральные моменты инерции J_x, J_y , моменты сопротивления W_x, W_y и радиусы инерции i_x, i_y сечения.

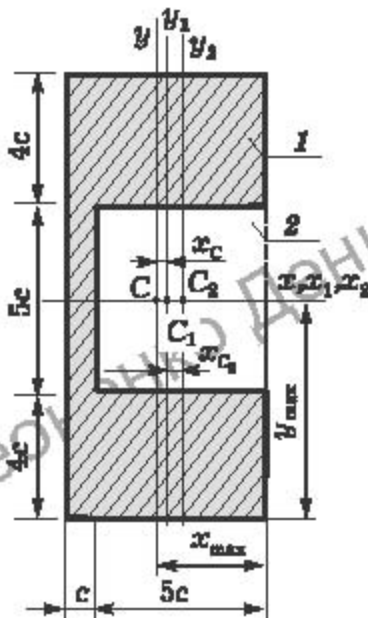


Рисунок 2.2

Главные центральные оси. Центр тяжести сечения будет находиться на оси x , так как она является осью симметрии и, следовательно, главной центральной осью инерции.

Для нахождения второй главной центральной оси следует определить центр тяжести сечения.

Геометрические характеристики составных частей сечения. Разобьем сечение на две части: на прямоугольник 1 (высотой $h_1 = 13c$ и шириной $b_1 = 6c$) и квадрат 2 ($h_2 = b_2 = 5c$). В качестве вспомогательной оси, от которой будем отсчитывать положение центра тяжести, примем центральную ось первой фигуры y_1 . Вычислим геометрические характеристики каждого прямоугольника.

1 Прямоугольник с центром тяжести в точке C_1 :

$$A^{(1)} = 13c \cdot 6c = 78c^2; \quad S_n^{(1)} = 0;$$

$$J_n^{(1)} = \frac{6c(13c)^3}{12} = 1098,5c^4; \quad J_n^{(2)} = \frac{13c(6c)^3}{12} = 234c^4.$$

2 Квадратный вырез с центром тяжести в точке C_2 :

$$A^{(2)} = 5c \cdot 5c = 25c^2; \quad S_{x_2}^{(2)} = A^{(2)} \cdot x_{c_2} = 25c^2 \cdot 0,5c = 12,5c^3;$$

$$J_{x_2}^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} = \frac{5c(5c)^3}{12} = 52,08c^4.$$

Центр тяжести сечения. Полная площадь сечения

$$A = A^{(1)} - A^{(2)} = 78c^2 - 25c^2 = 53c^2.$$

Статический момент всей фигуры относительно вспомогательной оси y_1

$$S_{x_1} = S_{x_1}^{(1)} - S_{x_1}^{(2)} = 0 - 12,5c^3 = -12,5c^3.$$

Определяем координату центра тяжести

$$x_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{-12,5c^3}{53c^2} = -0,24c.$$

Координата центра тяжести отрицательна, значит, ось y проходит левее оси y_1 .

Геометрические характеристики всего сечения. Главными центральными осями инерции будут оси x , y , так как ось x является осью симметрии, а ось y перпендикулярна ей и проходит через центр тяжести.

Ось x — главная центральная и для всего сечения, и для отдельных его частей, поэтому

$$J_x^{(1)} = J_{x_1}^{(1)} = 1098,5c^4; \quad J_x^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} = 52,08c^4.$$

Главная центральная ось y всего сечения не является центральной для его составных частей. Поэтому используем формулы для перехода от центральных осей y_1 , y_2 отдельных фигур к нецентральной для них оси y :

$$J_y^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} + (x_c)^2 A^{(1)} = 234c^4 + (-0,24c)^2 \cdot 78c^2 = 238,49c^4;$$

$$J_y^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} + (x_{c_2} + |x_c|)^2 A^{(2)} = 52,08c^4 +$$

$$+(0,5c + 0,24c)^2 \cdot 25c^2 = 65,77c^4.$$

Главные центральные моменты инерции всего сечения

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)} = 1098,5c^4 - 52,08c^4 = 1046,42c^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} - J_y^{(2)} = 238,49c^4 - 65,77c^4 = 172,72c^4.$$

Моменты сопротивления:

$$W_x = J_x / y_{\max} = 1046,42c^4 / (6,5c) = 160,99c^3;$$

$$W_y = J_y / x_{\text{max}} = 172,72c^4 / (3,24c) = 53,31c^3,$$

где

$$y_{\text{max}} = h_1/2 = 13c/2 = 6,5c;$$

$$x_{\text{max}} = b_1/2 + |x_{\text{oc}}| = 6c/2 + 0,24c = 3,24c.$$

Вычисляем радиусы инерции:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{1046,42c^4}{53c^2}} = 4,44c; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{172,72c^4}{53c^2}} = 1,81c.$$

2.2 РАСЧЕТ БАЛОК ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

ПРИМЕР 3 (пример расчета для студентов строительных специальностей). Двутавровая балка постоянного сечения, лежащая на двух опорах, воспринимает поперечную вертикальную нагрузку q , $F = 2qa$, $m = 2,5qa^2$ (рисунок 2.3, а).

Требуется: 1) построить в общем виде эпюры поперечных сил $Q [qa]$ и изгибающих моментов $M [qa^2]$; 2) подобрать по сортаменту номер двутавра, приняв $a = 2$ м и $q = 12$ кН/м; 3) проверить прочность двутавра по касательным напряжениям; 4) в сечении балки над левой опорой построить эпюры нормальных и касательных напряжений; 5) определить, при какой интенсивности внешней распределенной нагрузки q в опасном сечении образуется пластический шарнир; 6) методом начальных параметров определить прогиб балки посередине пролета и показать общее очертание упругой оси.

Примечание: расчетное сопротивление стали растяжению (сжатию) при изгибе $R = 210$ МПа; сдвигу $R_s = 130$ МПа; предел текучести $\sigma_s = 240$ МПа; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Опорные реакции. Для нахождения реакций Y_A , Y_B составим два уравнения равновесия балки в моментах:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= -F \cdot a - q \cdot a \cdot 0,5a + F \cdot a + m - \\ &- q \cdot a \cdot (2a + 0,5a) + Y_B \cdot 3a - m = 0; \end{aligned}$$

$$Y_B = \frac{1}{3a} (q \cdot 0,5a \cdot a + q \cdot a \cdot 2,5a) = qa.$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -F \cdot 4a - Y_A \cdot 3a + q \cdot a \cdot 2,5a - \\ &- F \cdot 2a + m + q \cdot a \cdot 0,5a - m = 0; \end{aligned}$$

$$Y_A = \frac{1}{3a} (-6F \cdot a + 3qa^2) = \frac{1}{3a} (-6 \cdot 2qa \cdot a + 3qa^2) = -3qa.$$

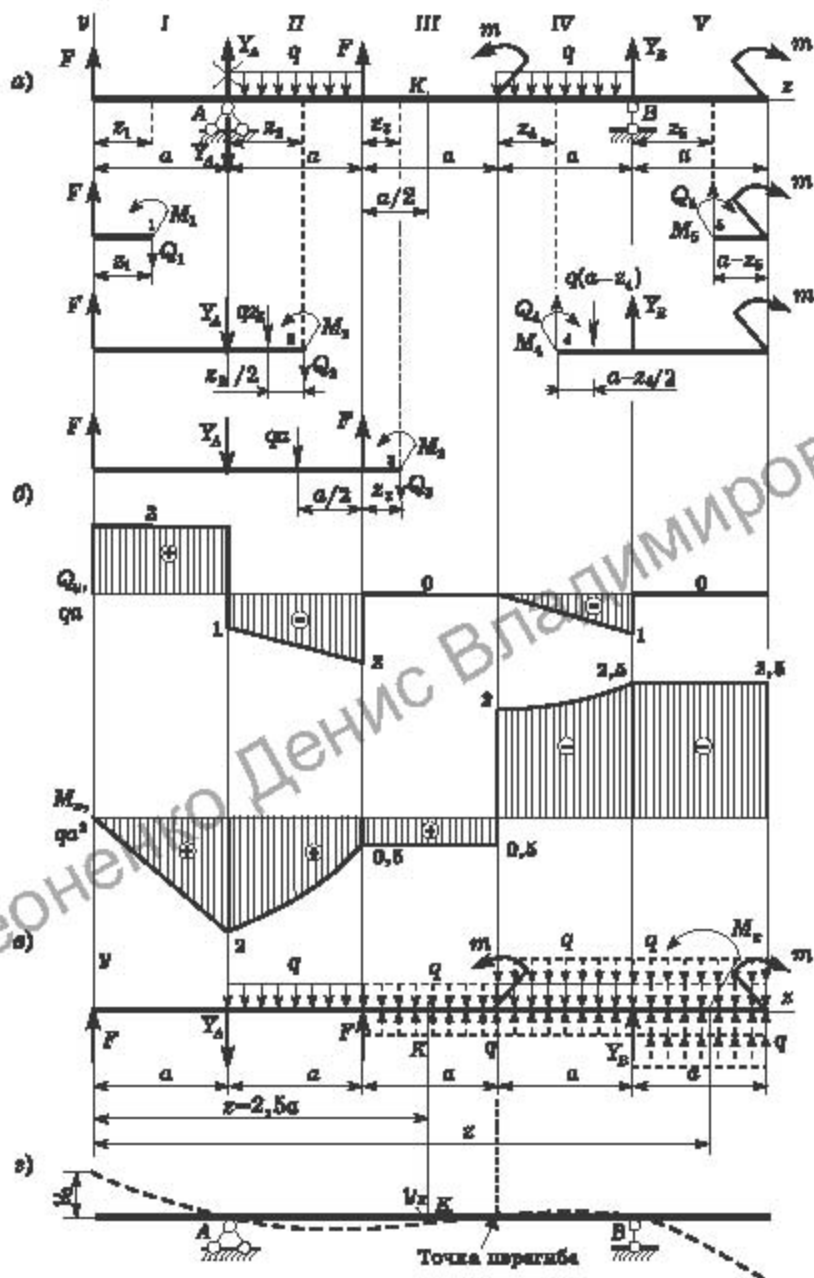


Рисунок 2.8

Значение реакции Y_A получилось отрицательным, значит, истинное направление реакции противоположно выбранному, т.е. вниз. Изменяем направление на схеме.

Проверку полученных значений реакций проведем, используя уравнение проекций сил, действующих на балку:

$$\sum Y = F - Y_A - qa + F - qa + Y_B = 2qa - 3qa - qa + 2qa - qa + qa = 0.$$

Уравнение удовлетворяется, следовательно, реакции определены правильно.

Построение эпюр. Разбиваем балку на участки I-V. На каждом из них применяем метод сечений и определяем внутренние поперечные силы Q_y и изгибающие моменты M_x (нижние индексы x, y в дальнейшем писать не будем). При этом на участках I, II, III отбрасываем правую часть рассеченного стержня, на участках IV, V - левую.

Участок I. Уравнения равновесия и выражения для Q_1 и M_1 :

$$\sum_k Y_k = -Q_1 + F = 0; \quad Q_1 = F = 2qa;$$

$$\sum_k M_{k1} = M_1 - Fz_1 = 0; \quad M_1 = Fz_1.$$

Значения на границах участка:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_1 = 0; \quad \text{при } z_1 = a \quad M_1 = 2qa \cdot a = 2qa^2.$$

Участок II. Уравнения равновесия и выражения для Q_2 и M_2 :

$$\sum_k Y_k = F - Y_A - qz_2 - Q_2 = 0; \quad Q_2 = F - Y_A - qz_2;$$

$$\sum_k M_{k2} = -F(a + z_2) + Y_A z_2 + \frac{qz_2^2}{2} + M_2 = 0;$$

$$M_2 = F(a + z_2) - Y_A z_2 - \frac{qz_2^2}{2}.$$

Значения на границах участка:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad Q_2 = F - Y_A - qz_2 = 2qa - 3qa = -qa; \quad M_2 = 2qa^2;$$

$$\text{при } z_2 = a \quad Q_2 = F - Y_A - qz_2 = 2qa - 3qa - qa = -2qa;$$

$$M_2 = F(a + z_2) - Y_A z_2 - qz_2^2/2 = 2qa \cdot 2a - 3qa \cdot a - 0,5qa^2 = 0,5qa^2.$$

Участок III. Уравнения равновесия и выражения для Q_3 и M_3 :

$$\sum_k Y_k = F - Y_A - qa + F - Q_3 = 0; \quad Q_3 = 2F - Y_A - qa = 0;$$

$$\sum_k M_{k3} = -F(2a + z_3) + Y_A(a + z_3) + qa(a/2 + z_3) - Fz_3 + M_3 = 0;$$

$$M_3 = F(2a + z_3) - Y_A(a + z_3) - qa(a/2 + z_3) + Fz_3.$$

Значения на границах участка:

при $z_3 = 0$

$$M_3 = F \cdot 2a - Y_A a - qa \cdot a/2 = 2qa \cdot 2a - 3qa \cdot a - qa \cdot a/2 = 0,5qa^2;$$

при $z_3 = a$

$$M_3 = F(2a + a) - Y_A(a + a) - qa(a/2 + a) + Fa = 2qa \cdot 3a - 3qa \cdot 2a - qa(a/2 + a) + 2qa^2 = 0,5qa^2.$$

Участок IV. Уравнения равновесия и выражения для Q_4 и M_4 :

$$\sum_k Y_k = Q_4 - q(a - z_4) + Y_B = 0; \quad Q_4 = q(a - z_4) - Y_B;$$

$$\sum_k M_{k4} = -M_4 - \frac{q(a - z_4)^2}{2} + Y_B(a - z_4) - m = 0;$$

$$M_4 = -\frac{q(a - z_4)^2}{2} + Y_B(a - z_4) - m.$$

Значения на границах участка:

при $z_4 = 0$ $Q_4 = qa - Y_B = qa - qa = 0$;

$$M_4 = -qa^2/2 + Y_B \cdot a - m = -0,5qa^2 + qa \cdot a - 2,5qa^2 = -2qa^2;$$

при $z_4 = a$ $Q_4 = -Y_B = -qa$; $M_3 = -m = -2,5qa^2$.

Участок V. Уравнения равновесия и выражения для Q_5 и M_5 :

$$\sum_k Y_k = Q_5 = 0; \quad Q_5 = 0;$$

$$\sum_k M_{k5} = -M_5 - m = 0; \quad M_5 = -m = -2,5qa^2.$$

В соответствии с полученными результатами строим эпюры (рисунок 2.3, б).

Подбор размеров поперечного сечения. Из эпюры моментов выбираем наибольший по абсолютной величине изгибающий момент

$$|M_{г\max}| = 2,5qa^2 = 2,5 \cdot 12 \cdot 2^2 = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение балки, в котором он действует, является опасным.

Из условия прочности при изгибе определяем требуемый момент сопротивления двутавра:

$$W_x \geq W_x^{zp} = \frac{|M_x^{\max}|}{R} = \frac{120 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 571,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 571,4 \text{ см}^3.$$

Используя таблицы сортамента (приложение А), принимаем двутавр № 33 с $W_x = 597 \text{ см}^3$. Выписываем все необходимые для дальнейшего расчета геометрические характеристики выбранного двутавра: $h = 33 \text{ см}$, $b = 14 \text{ см}$, $s = 0,7 \text{ см}$, $t = 1,12 \text{ см}$, $J_x = 9840 \text{ см}^4$, $S_x = 339 \text{ см}^3$.

Проверка прочности по касательным напряжениям. Наибольшая по абсолютной величине поперечная сила

$$|Q_y^{\max}| = 2qa = 2 \cdot 12 \cdot 2 = 48 \text{ кН}.$$

Максимальные касательные напряжения в балке

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_y^{\max}| S_x}{J_x s} = \frac{48 \cdot 10^3 \cdot 339 \cdot 10^{-6}}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,7 \cdot 10^{-2}} = 23,62 \cdot 10^6 \text{ Па} = 23,62 \text{ МПа}.$$

Это не превышает расчетного сопротивления сдвигу $R_s = 130 \text{ МПа}$, поэтому условие прочности по касательным напряжениям для выбранного двутавра выполняется.

Построение эпюр нормальных и касательных напряжений. В заданном сечении балки над левой опорой (сечение А, справа) вычисляем значения изгибающего момента и поперечной силы (по модулю):

$$M_x^A = 2qa^2 = 2 \cdot 12 \cdot 2^2 = 96 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad Q_y^A = qa = 12 \cdot 2 = 24 \text{ кН}.$$

Нормальные напряжения по поперечному сечению распределены линейно. Эпюра изгибающих моментов в рассматриваемом сечении расположена снизу под осью балки, следовательно, растянуты нижние волокна. Максимальные и минимальные напряжения возникают в верхних и нижних волокнах сечения:

$$\sigma_{\max}^A = \frac{M_x^A}{W_x} = \frac{96 \cdot 10^3}{597 \cdot 10^{-6}} = 160,80 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160,80 \text{ МПа};$$
$$\sigma_{\min}^A = -\sigma_{\max}^A = -160,80 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения вычисляем в четырех пронумерованных характерных точках сечения, принимая полки двутавра прямоугольными (рисунок 2.4). Для первой точки

$$\tau_1^A = \frac{Q_y^A S_x^{(1)}}{J_x b} = 0,$$

так как $S_x^{(1)} = 0$ из-за равенства нулю площади отсеченной части сечения.

Статический момент отсеченной части поперечного сечения во второй точке вычисляем как произведение координаты центра тяжести полки двутавра $(h/2 - t/2)$ на ее площадь bt :

$$S_x^{(2)} = (h/2 - t/2)bt = (33/2 - 1,12/2) \cdot 14 \cdot 1,12 = 249,94 \text{ см}^3,$$

тогда

$$\tau_2^A = \frac{Q_y^A S_x^{(2)}}{J_x b} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 249,94 \cdot 10^{-6}}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 14 \cdot 10^{-2}} = 0,44 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,44 \text{ МПа}.$$

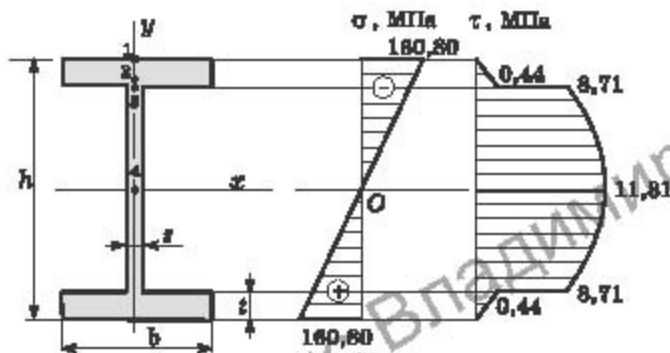


Рисунок 2.4

Так как сечения, проведенные через вторую и третью точки, практически совпадают, то и соответствующие статические моменты отсеченных площадей $S_x^{(3)} = S_x^{(2)}$. Отличие только в ширине сечения, проведенного через точку 3, здесь она равна s . Поэтому

$$\tau_3^A = \frac{Q_y^A S_x^{(3)}}{J_x s} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 249,94 \cdot 10^{-6}}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,7 \cdot 10^{-2}} = 8,71 \cdot 10^6 \text{ Па} = 8,71 \text{ МПа}.$$

Продольное сечение, проведенное через четвертую точку, делит поперечное сечение пополам. Статический момент половины сечения двутавра приведен в сортаменте, поэтому $S_x^{(4)} = S_x$. Отсюда

$$\tau_4^A = \tau_{\max}^A = \frac{Q_y^A S_x}{J_x s} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 339 \cdot 10^{-6}}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,7 \cdot 10^{-2}} = 11,81 \cdot 10^6 \text{ Па} = 11,81 \text{ МПа}.$$

По вычисленным значениям нормальных и касательных напряжений в указанных точках сечения над левой опорой строим соответствующие эпюры (см. рисунок 2.4). Скачок на эпюре касательных

тельных напряжений вызван резким уменьшением толщины поперечного сечения.

Расчет балки с учетом пластических деформаций. Определим, при какой интенсивности распределенной нагрузки q_k в сечении с наибольшим изгибающим моментом образуется пластический шарнир. Для этого приравняем максимальный момент $M_{\text{пmax}} = 2,5q_k a^2$ к предельному моменту $M_{\text{п}} = \sigma_y W_{\text{п}}$. Через $W_{\text{п}}$ обозначен пластический момент сопротивления сечения:

$$W_{\text{п}} = 2S_x = 2 \cdot 339 = 678 \text{ см}^3.$$

Приравнивая моменты, получаем

$$2,5q_k a^2 = \sigma_y W_{\text{п}};$$

$$q_k = \frac{\sigma_y W_{\text{п}}}{2,5 a^2} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 678 \cdot 10^{-6}}{2,5 \cdot 2^2} = 16272 \text{ Н/м} = 16,3 \text{ кН/м}.$$

Следовательно, если материал двутавра идеально упруго-пластический, при величине интенсивности распределенной нагрузки $q = q_k = 16,3 \text{ кН/м}$ в опасном сечении балки может образоваться пластический шарнир. Дальнейшее увеличение нагрузки приведет к потере несущей способности балки.

Вычисление перемещений. Методом начальных параметров определим прогиб балки посередине пролета в точке K (при $z = 2,5a$). Сформируем расчетную схему метода начальных параметров. Для этого распределенную нагрузку на участках II и IV продлим до конца балки и приложим компенсирующую нагрузку, направленную вверх (рисунок 2.3, е).

Составим выражение для изгибающего момента на последнем участке

$$M_x = Fz - Y_A(z - a) - \frac{q(z - a)^2}{2} + F(z - 2a) + \frac{q(z - 2a)^2}{2} - m(z - 3a)^0 - \frac{q(z - 3a)^2}{2} + Y_B(z - 4a) + \frac{q(z - 4a)^2}{2}.$$

Подставим полученное выражение для момента M_x в дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$EJy'' = Fz - Y_A(z - a) - \frac{q(z - a)^2}{2} + F(z - 2a) + \frac{q(z - 2a)^2}{2} - m(z - 3a)^0 - \frac{q(z - 3a)^2}{2} + Y_B(z - 4a) + \frac{q(z - 4a)^2}{2}.$$

Дважды проинтегрируем

$$EJ_x y' = EJ_x \theta_0 + F \frac{z^2}{2} - Y_A \frac{(z-a)^2}{2} - \frac{q(z-a)^3}{6} + F \frac{(z-2a)^2}{2} +$$

$$+ \frac{q(z-2a)^3}{6} - m(z-3a) - \frac{q(z-3a)^3}{6} + Y_B \frac{(z-4a)^2}{2} + \frac{q(z-4a)^3}{6};$$

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + F \frac{z^3}{6} - Y_A \frac{(z-a)^3}{6} - \frac{q(z-a)^4}{24} + F \frac{(z-2a)^3}{6} +$$

$$+ \frac{q(z-2a)^4}{24} - m \frac{(z-3a)^2}{2} - \frac{q(z-3a)^4}{24} + Y_B \frac{(z-4a)^3}{6} + \frac{q(z-4a)^4}{24}.$$

Начальные параметры θ_0 и y_0 определим из граничных условий закрепления балки. На опорах в сечениях $z = a$ и $z = 4a$ прогибы равны нулю ($y = 0$).

Подставим координаты опор в выражение для прогиба, не учитывая при этом слагаемые, соответствующие нагрузкам, расположенным правее рассматриваемых опор. В результате получим систему двух линейных уравнений для определения начальных параметров:

$$0 = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 a + 2qa \frac{a^3}{6};$$

$$0 = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 \cdot 4a + 2qa \frac{(4a)^3}{6} - 3qa \frac{(3a)^3}{6} - \frac{q(3a)^4}{24} + 2qa \frac{(2a)^3}{6} +$$

$$+ \frac{q(2a)^4}{24} - 2,5qa^2 \frac{a^2}{2} - \frac{qa^4}{24}.$$

Упростим

$$EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 a = -\frac{qa^4}{3}; \quad EJ_x y_0 + 4aEJ_x \theta_0 = -\frac{13}{2} qa^4.$$

Начальные параметры:

$$\theta_0 = -\frac{37}{18} \frac{qa^3}{EJ_x}; \quad y_0 = \frac{31}{18} \frac{qa^4}{EJ_x}.$$

Прогиб точки K определим, подставив ее координату ($z = 2,5a$) в выражение для прогиба, не учитывая при этом слагаемые, соответствующие нагрузкам, расположенным правее точки K :

$$y_K = \frac{31}{18} \frac{qa^4}{EJ_x} - \frac{37}{18} \frac{qa^3}{EJ_x} \cdot 2,5a + \frac{1}{EJ_x} \left(2qa \frac{(2,5a)^3}{6} - 3qa \frac{(1,5a)^3}{6} - \right.$$

$$\begin{aligned} & -\frac{q(1,5a)^4}{24} + 2qa \frac{(0,5a)^3}{6} + \frac{q(0,5a)^4}{24} \Big) = -\frac{3qa^4}{48EJ_x} = \\ & = -\frac{3 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = -0,00061 \text{ м} = -0,6 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Величина прогиба отрицательна, значит, сечение балки в точке К перемещается вниз.

Общее очертание упругой линии балки показано на рисунке 2.3, а. При построении этой кривой учтены направление вычисленного прогиба, прогиб левого торца балки ζ_0 и работа балки под нагрузкой. Направление выпуклости линии определяется знаком эпюры моментов исходя из дифференциального уравнения упругой линии балки: значения моментов отрицательны – выпуклость направлена вверх, положительные – вниз. Перегибы упругой линии наблюдаются в тех сечениях, в которых эпюра моментов меняет знак.

ПРИМЕР 4 (пример расчета для студентов механических специальностей). Балка (например, хребтовая балка вагона) (рисунок 2.5, а) нагружена поперечной вертикальной нагрузкой q , $F = 2qa$, $m = qa^2$.

Требуется: 1) построить в общем виде эпюры поперечных сил Q [qa] и изгибающих моментов M [qa^2]; 2) подобрать по сортменту предварительно требующийся номер двутавра, приняв $a = 2$ м и $q = 16$ кН/м; 3) проверить прочность двутавра по касательным напряжениям; 4) для сечения балки над левой опорой построить эпюры нормальных и касательных напряжений; 5) определить, при какой интенсивности внешней распределенной нагрузки q в опасном сечении образуется пластический шарнир; 6) методом Мора определить прогиб балки посередине пролета и показать общее очертание упругой оси.

Примечание: допускаемые значения нормальных и касательных напряжений $[\sigma] = 160$ МПа; $[\tau] = 90$ МПа; предел текучести $\sigma_y = 240$ МПа; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Опорные реакции. Для нахождения реакций Y_A , Y_B составим два уравнения равновесия балки моментов относительно точек А и В:

$$\sum M_A = -q \cdot 4a \cdot a - m + Y_B \cdot 3a - F \cdot 4a = 0;$$

$$Y_B = \frac{1}{3a} (F \cdot 4a + m + q \cdot 4a \cdot a) = \frac{1}{3a} (2qa \cdot 4a + qa^2 + 4qa^2) = 4,33qa.$$

$$\sum M_B = q \cdot 4a \cdot 2a - Y_A \cdot 3a - m - F \cdot a = 0;$$

$$Y_A = \frac{1}{3a} (-F \cdot a - m + q \cdot 4a \cdot 2a) = \frac{1}{3a} (-2qa \cdot a - qa^2 + 8qa^2) = 1,67qa.$$

Проверку полученных значений реакций проведем, используя уравнение проекций сил, действующих на балку:

$$\sum Y = -q \cdot 4a + Y_A + Y_B - F = -4qa + 1,67qa + 4,33qa - 2qa = 0.$$

Уравнение удовлетворяется, следовательно, реакции определены правильно.

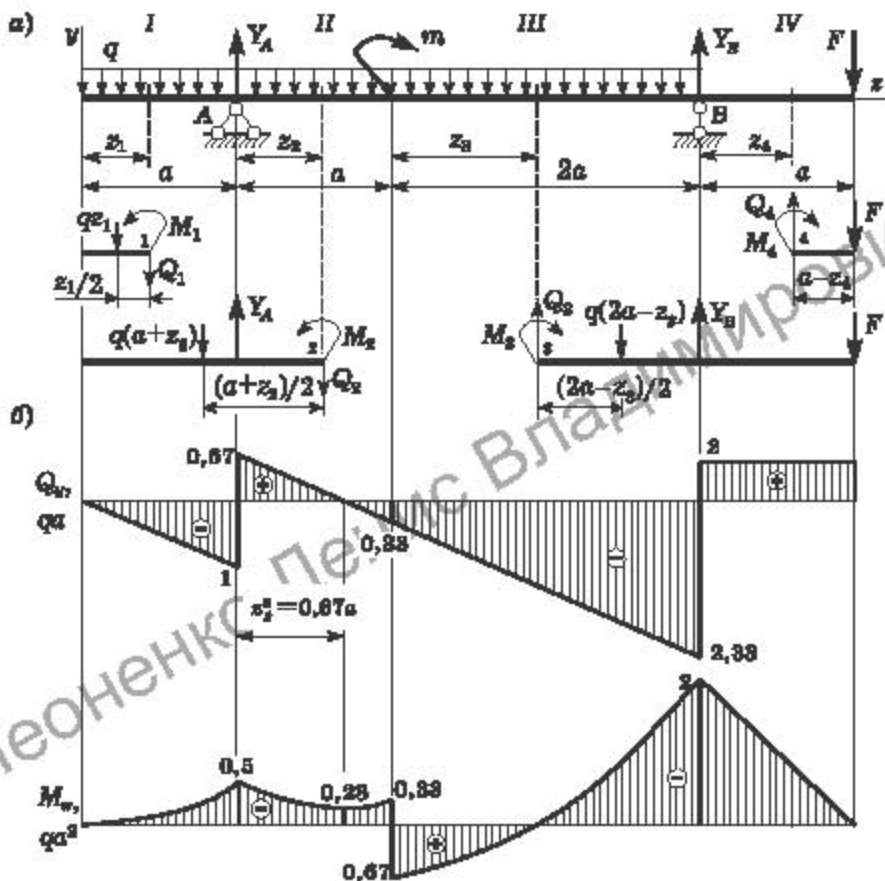


Рисунок 2.5

Построение эпюр. Разбиваем балку на участки I-IV. На каждом из них применяем метод сечений и определяем внутренние поперечные силы Q_y и изгибающие моменты M_x (нижние индексы x, y в дальнейшем писать не будем). При этом на участках I, II отбрасываем правую часть рассеченного стержня, на участках III, IV - левую.

Участок I. Уравнения равновесия и выражения для Q_1 и M_1 :

$$\sum_k Y_k = -qz_1 - Q_1 = 0; \quad Q_1 = -qz_1;$$
$$\sum_k M_{k1} = qz_1 \cdot z_1/2 + M_1 = 0; \quad M_1 = -0,5qz_1^2.$$

Значения на границах участка:

при $z_1 = 0$ $Q_1 = 0$; $M_1 = 0$;

при $z_1 = a$ $Q_1 = -qa$; $M_1 = -0,5qa^2$.

Участок II. Уравнения равновесия и выражения для Q_2 и M_2 :

$$\sum_k Y_k = -q(a + z_2) + Y_A - Q_2 = 0; \quad Q_2 = Y_A - q(a + z_2);$$
$$\sum_k M_{k2} = \frac{q(a + z_2)^2}{2} - Y_A z_2 + M_2 = 0; \quad M_2 = Y_A z_2 - \frac{q(a + z_2)^2}{2}$$

Значения на границах участка:

при $z_2 = 0$ $Q_2 = Y_A - qa = 1,67qa - qa = 0,67qa$; $M_2 = -0,5qa^2$;

при $z_2 = a$ $Q_2 = Y_A - q \cdot 2a = 1,67qa - 2qa = -0,33qa$;

$$M_2 = Y_A a - q(2a)^2 / 2 = 1,67qa^2 - 2qa^2 = -0,33qa^2.$$

Вычислим экстремальное значение момента на участке II. Для этого найдем координату сечения z_2^0 , где поперечная сила равна нулю, и подставим ее в уравнение моментов:

$$Q_2 = Y_A - q(a + z_2^0) = 0; \quad z_2^0 = Y_A / q - a = 1,67qa / q - a = 0,67a;$$

$$M_2 = Y_A z_2^0 - q(a + z_2^0)^2 / 2 = 1,67qa \cdot 0,67a -$$
$$-q(a + 0,67a)^2 / 2 = -0,28qa^2.$$

Участок III. Уравнения равновесия и выражения для Q_3 и M_3 :

$$\sum_k Y_k = Q_3 - q(2a - z_3) + Y_B - F = 0; \quad Q_3 = q(2a - z_3) - Y_B + F;$$

$$\sum_k M_{k3} = -M_3 - \frac{q(2a - z_3)^2}{2} + Y_B(2a - z_3) - F(3a - z_3) = 0;$$

$$M_3 = -\frac{q(2a - z_3)^2}{2} + Y_B(2a - z_3) - F(3a - z_3).$$

Значения на границах участка:

при $z_3 = 0$ $Q_3 = 2qa - Y_B + F = 2qa - 4,33qa + 2qa = -0,33qa$;

$$\begin{aligned}M_3 &= -q(2a)^2 / 2 + Y_B \cdot 2a - F \cdot 3a = \\&= -2qa^2 + 4,33qa \cdot 2a - 2qa \cdot 3a = 0,66qa^2;\end{aligned}$$

$$\text{при } z_3 = 2a \quad Q_3 = -Y_B + F = -4,33qa + 2qa = -2,33qa;$$

$$M_3 = -Fa = -2qa \cdot a = -2qa^2.$$

Участок IV. Уравнения равновесия и выражения для Q_4 и M_4 :

$$\sum_k Y_k = Q_4 - F = 0; \quad Q_4 = F = 2qa;$$

$$\sum_k M_{k4} = -M_4 - F(a - z_4) = 0; \quad M_4 = -F(a - z_4).$$

Значения на границах участка:

$$\text{при } z_4 = 0 \quad M_4 = -Fa = -2qa^2; \quad \text{при } z_4 = a \quad M_4 = 0.$$

В соответствии с полученными результатами строим эпюры (рисунок 2.5, б).

Подбор размеров поперечного сечения. Из эпюры моментов выбираем наибольший по абсолютной величине изгибающий момент

$$|M_{r \max}| = 2qa^2 = 2 \cdot 16 \cdot 2^2 = 128 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение балки, в котором он действует, является опасным.

Из условия прочности при изгибе определяем требуемый момент сопротивления двутавра:

$$W_x \geq W_x^{\text{треб}} = \frac{|M_{r \max}|}{[\sigma]} = \frac{128 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 800,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 800 \text{ см}^3.$$

Используя таблицы сортамента, принимаем двутавр № 40 с моментом сопротивления $W_x = 953 \text{ см}^3$. Выписываем все необходимые для дальнейшего расчета геометрические характеристики выбранного двутавра: $h = 40 \text{ см}$, $b = 15,5 \text{ см}$, $s = 0,83 \text{ см}$, $t = 1,3 \text{ см}$, $J_x = 19062 \text{ см}^4$, $S_x = 545 \text{ см}^3$.

Проверка прочности по касательным напряжениям. Наибольшая по абсолютной величине поперечная сила

$$|Q_{y \max}| = 2,33qa = 2,33 \cdot 16 \cdot 2 = 74,56 \text{ кН}.$$

Максимальные касательные напряжения в балке

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_{y \max}| S_x}{J_x s} = \frac{74,56 \cdot 10^3 \cdot 545 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 0,83 \cdot 10^{-2}} = 25,68 \cdot 10^6 \text{ Па} = 25,68 \text{ МПа}.$$

Это не превышает допускаемого касательного напряжения $[\tau] = 90 \text{ МПа}$, поэтому условие прочности по касательным напряжениям для выбранного двутавра выполняется.

Построение эпюр нормальных и касательных напряжений. Для заданного сечения балки над левой опорой (сечение А) вычисляем значения изгибающего момента и поперечной силы (по модулю):

$$M_x^A = 0,5qa^2 = 0,5 \cdot 16 \cdot 2^2 = 32 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad Q_y^A = qa = 16 \cdot 2 = 32 \text{ кН}.$$

Нормальные напряжения по поперечному сечению распределены линейно. Эпюра изгибающих моментов в рассматриваемом сечении расположена сверху над осью балки, следовательно, растянуты верхние волокна. Максимальные и минимальные напряжения возникают в верхних и нижних волокнах сечения:

$$\sigma_{\max}^A = \frac{M_x^A}{W_x} = \frac{32 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} = 33,58 \cdot 10^6 \text{ Па} = 33,58 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\min}^A = -\sigma_{\max}^A = -33,58 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения вычисляем в четырех пронумерованных характерных точках сечения, принимая полки двутавра прямоугольными (рисунок 2.6). Для первой точки

$$\tau_1^A = \frac{Q_y^A S_x^{*(1)}}{J_x b} = 0,$$

так как $S_x^{*(1)} = 0$ из-за равенства нулю площади отсеченной части сечения.

Статический момент отсеченной части поперечного сечения во второй точке вычисляем как произведение координаты центра тяжести полки двутавра $(h/2 - t/2)$ на ее площадь bt :

$$S_x^{*(2)} = (h/2 - t/2)bt = (40/2 - 1,3/2) \cdot 15,5 \cdot 1,3 = 389,90 \text{ см}^3,$$

тогда

$$\tau_2^A = \frac{Q_y^A S_x^{*(2)}}{J_x b} = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 389,9 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 15,5 \cdot 10^{-2}} = 0,42 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,42 \text{ МПа}.$$

Так как сечения, проведенные через вторую и третью точки, практически совпадают, то и соответствующие статические моменты отсеченных площадей $S_x^{*(3)} = S_x^{*(2)}$. Отличие только в ширине сечения, проведенного через точку 3, здесь она равна s . Поэтому

$$\tau_3^A = \frac{Q_y^A S_x^{*(3)}}{J_x s} = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 389,9 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 0,83 \cdot 10^{-2}} = 7,89 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,89 \text{ МПа}.$$

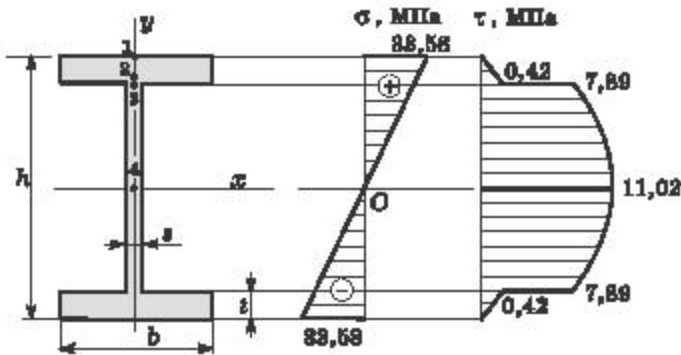


Рисунок 2.6

Продольное сечение, проведенное через четвертую точку, делит поперечное сечение пополам. Статический момент половины сечения двутавра приведен в сортаменте, поэтому $S_x^{(A)} = S_x$. Отсюда

$$\tau_x^A = \tau_{\max}^A = \frac{Q_y^A S_x}{J_{xS}} = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 545 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 0,83 \cdot 10^{-2}} = 11,02 \cdot 10^6 \text{ Па} = 11,02 \text{ МПа}$$

По вычисленным значениям нормальных и касательных напряжений в указанных точках сечения над левой опорой строим соответствующие эпюры (см. рисунок 2.6). Скачок на эпюре касательных напряжений вызван резким уменьшением толщины поперечного сечения.

Расчет балки с учетом пластических деформаций. Определим, при какой интенсивности распределенной нагрузки q_k в сечении с наибольшим изгибающим моментом образуется пластический шарнир. Для этого приравняем максимальный момент $M_{\max} = 2q_k a^2$ к предельному моменту $M_{\text{pl}} = \sigma_y W_{\text{pl}}$. Через W_{pl} обозначен пластический момент сопротивления сечения:

$$W_{\text{pl}} = 2S_x = 2 \cdot 545 = 1090 \text{ см}^3.$$

Приравнивая моменты, получаем

$$2q_k a^2 = \sigma_y W_{\text{pl}};$$

$$q_k = \frac{\sigma_y W_{\text{pl}}}{2a^2} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 1090 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 4} = 32700 \text{ Н/м} = 32,7 \text{ кН/м}.$$

Следовательно, при величине интенсивности распределенной нагрузки $q = q_k = 32,7 \text{ кН/м}$ в опасном сечении балки может образоваться пластический шарнир, если материал двутавра иде-

ально упругопластический. Дальнейшее увеличение нагрузки приведет к потере несущей способности балки.

Вычисление перемещений. С помощью метода Мора определим прогиб балки посередине пролета. Сформируем «единичное» состояние, приложив к точке K (посередине пролета) по направлению искомого прогиба единичную силу $\bar{F} = 1$ (рисунок 2.7, а).

Определим реакции в «единичном» состоянии. Так как сила приложена посередине, то единичные реакции равны между собой:

$$\bar{Y}_A = \bar{Y}_B = \frac{\bar{F}}{2} = 0,5.$$

Вычисляем внутренний единичный момент \bar{M}_K в точке K

$$\bar{M}_K = \bar{Y}_A \cdot 1,5a = 0,5 \cdot 1,5a = 0,75a$$

и строим единичную эпюру \bar{M} (см. рисунок 2.7, а).

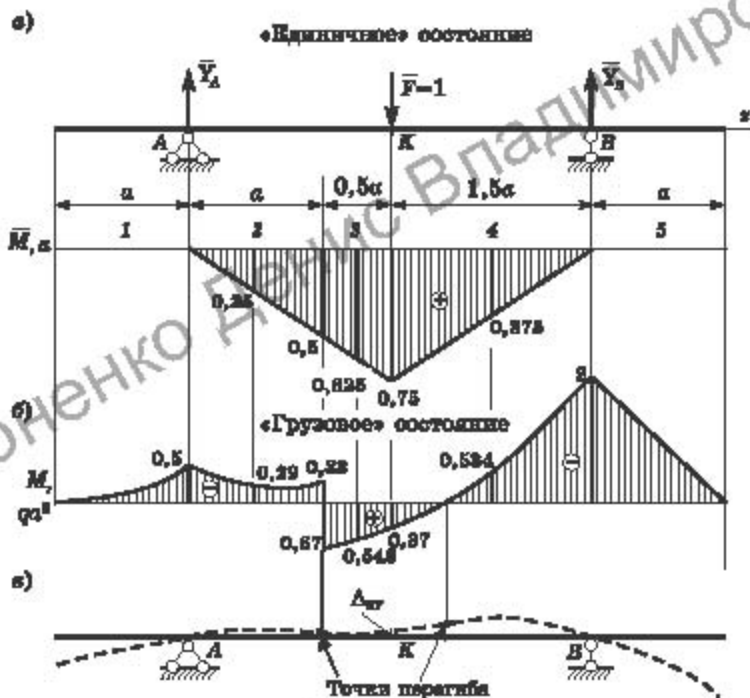


Рисунок 2.7

Грузовая эпюра M уже построена. Расположим ее под единичной эпюрой (рисунок 2.7, б). Дополнительно вычислим значения посередине участков. Для этого воспользуемся выражениями для моментов на II и III участках (см. с. 38):

при $z_2 = 0,5a$

$$M_2 = Y_A z_2 - \frac{q(a+z_2)^2}{2} = 1,67q_2 \cdot 0,5a - \frac{q(a+0,5a)^2}{2} = 0,29qa^2;$$

при $z_2 = 0,25a$

$$\begin{aligned} M_3 &= -\frac{q(2a-z_3)^2}{2} + Y_B(2a-z_3) - F(3a-z_3) = \\ &= -\frac{q(2a-0,25a)^2}{2} + 4,33qa(2a-0,25a) - 2qa(3a-0,25a) = 0,546qa^2; \end{aligned}$$

при $z_3 = 0,25a$

$$\begin{aligned} M_3 &= -\frac{q(2a-z_3)^2}{2} + Y_B(2a-z_3) - F(3a-z_3) = \\ &= -\frac{q(2a-0,5a)^2}{2} + 4,33qa(2a-0,5a) - 2qa(3a-0,5a) = 0,37qa^2; \end{aligned}$$

при $z_3 = 1,25a$

$$\begin{aligned} M_3 &= -\frac{q(2a-z_3)^2}{2} + Y_B(2a-z_3) - F(3a-z_3) = \\ &= -\frac{q(2a-1,25a)^2}{2} + 4,33qa(2a-1,25a) - 2qa(3a-1,25a) = -0,534qa^2. \end{aligned}$$

Прогиб точки K по методу Мора

$$\Delta_{KR} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}M}{EJ} dz.$$

Для вычисления прогиба необходимо просуммировать перемещения $\Delta_{KR}^{(i)}$, полученные перемножением эпюр на каждом из участков:

$$\Delta_{KR} = \Delta_{KR}^{(1)} + \Delta_{KR}^{(2)} + \Delta_{KR}^{(3)} + \Delta_{KR}^{(4)} + \Delta_{KR}^{(5)}.$$

Интеграл Мора будем вычислять методом Симпсона

$$\Delta_{KR}^{(i)} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}^{(i)} M^{(i)} dz = \frac{l}{6EJ} (a_1c_1 + 4f_1g_1 + b_1d_1).$$

На участке I $\Delta_{KR}^{(1)} = 0$, так как единичная эпюра нулевая.

На участке II

$$\Delta_{кр}^{(2)} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}^{(2)} M^{(2)} dz = \frac{a}{6EJ} (-0,5qa^2 \cdot 0 - 4 \cdot 0,29qa^2 \cdot 0,25a - 0,33qa^2 \cdot 0,5a) = -0,0758 \frac{qa^4}{EJ}.$$

На участке III

$$\Delta_{кр}^{(3)} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}^{(3)} M^{(3)} dz = \frac{0,5a}{6EJ} (0,67qa^2 \cdot 0,5a + 4 \cdot 0,546qa^2 \cdot 0,625a + 0,37qa^2 \cdot 0,75a) = 0,1648 \frac{qa^4}{EJ}.$$

На участке IV

$$\Delta_{кр}^{(4)} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}^{(4)} M^{(4)} dz = \frac{1,5a}{6EJ} (0,37qa^2 \cdot 0,75a - 4 \cdot 0,534qa^2 \cdot 0,375a - 2qa^2 \cdot 0) = -0,1309 \frac{qa^4}{EJ}.$$

На участке V $\Delta_{кр}^{(5)} = 0$, так как единичная эпюра нулевая. Прогиб точки K посередине пролета будет следующий:

$$\begin{aligned} \Delta_{кр} &= 0 - 0,0758 \frac{qa^4}{EJ} + 0,1648 \frac{qa^4}{EJ} - 0,1309 \frac{qa^4}{EJ} + 0 = \\ &= -0,0419 \frac{qa^4}{EJ} = -0,0419 \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 19062 \cdot 10^{-8}} = -2,81 \cdot 10^{-4} \text{ м} = \\ &= -0,281 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Прогиб получился отрицательным, значит, балка прогибается по направлению, противоположному единичной силе, т.е. точка K переместится вниз.

Общее очертание упругой линии балки показано на рисунке 2.7, в. При построении этой кривой учтены направление вычисленного прогиба и работа балки под нагрузкой. Направление выпуклости линии определяется знаком эпюры моментов исходя из дифференциального уравнения упругой линии балки: значения моментов отрицательны – выпуклость направлена вверх, положительные – вниз. Перегибы упругой линии наблюдаются в тех сечениях, в которых эпюра моментов меняет знак.

ПРИМЕР 5. Установить, насколько экономична и рациональна двутавровая балка, подобранная под заданную нагрузку в примере 4 по сравнению с балками других сечений (рисунок 2.8) при сохранении той же грузоподъемности.

Для этого необходимо: 1) определить размеры c , b , d сечений заданных балок, приняв для расчета требуемый момент сопротивления из примера 4; 2) вычислить площадь сечения каждой балки; проанализировать полученные результаты.

Выписываем требуемый момент сопротивления из примера 4:

$$W_x^{zp} = 800 \text{ см}^3.$$

Двутавровое сечение. Площадь двутавра № 40, подобранного в примере 4 под заданную нагрузку: $A_T = 72,6 \text{ см}^2$.

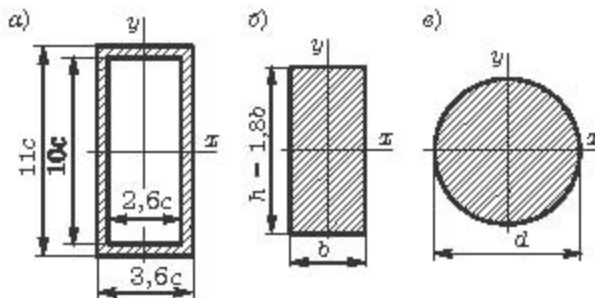


Рисунок 2.8

Сечение коробчатого типа. Момент инерции равен разности моментов инерции двух составляющих его прямоугольников (см. рисунок 2.8, а):

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)},$$

$$J_x^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{3,6c(11c)^3}{12} = 399,3c^4;$$

$$J_x^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{2,6c(10c)^3}{12} = 216,7c^4;$$

$$J_x = 399,3c^4 - 216,7c^4 = 182,6c^4.$$

Момент сопротивления сечения

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{182,6c^4}{5,5c} = 33,2c^3,$$

откуда

$$W_x \geq W_x^{sp}; \quad c \geq \sqrt[3]{\frac{W_x^{sp}}{33,2}} = \sqrt[3]{\frac{800 \cdot 10^{-6}}{33,2}} = 2,89 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,89 \text{ см}.$$

Принимаем $c = 2,9 \text{ см}$. Площадь коробчатого сечения

$$A_{\square} = A_1 - A_2 = b_1 h_1 - b_2 h_2 = 11c \cdot 3,6c - 10c \cdot 2,6c = 13,6c^2 = \\ = 13,6 \cdot 2,9^2 = 114,4 \text{ см}^2.$$

Отношение площади сечения к площади двутавра

$$\frac{A_{\square}}{A_T} = \frac{114,4}{72,6} = 1,58.$$

Прямоугольное сечение. Момент сопротивления прямоугольника

$$W_x = bh^2/6.$$

Отношение сторон $h/b = 1,8$, $h = 1,8b$. Тогда

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(1,8b)^2}{6} = 0,54b^3.$$

Из условия прочности

$$W_x \geq W_x^{sp};$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{W_x^{sp}}{0,54}} = \sqrt[3]{\frac{800 \cdot 10^{-6}}{0,54}} = 11,4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 11,40 \text{ см}; \\ h = 1,8b = 1,8 \cdot 11,4 = 20,52 \text{ см}.$$

Принимаем

$$b = 11,4 \text{ см}, \quad h = 20,6 \text{ см}.$$

Площадь прямоугольного сечения

$$A_0 = bh = 11,4 \cdot 20,6 = 234,8 \text{ см}^2.$$

Отношение площади сечения к площади двутавра

$$\frac{A_0}{A_T} = \frac{234,8}{72,6} = 3,23.$$

Круглое сечение. Момент сопротивления круга

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Из условия прочности

$$W_x \geq W_x^{sp};$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32W_r^{sp}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 800 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 20,13 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 20,13 \text{ см}.$$

Принимаем диаметр $d = 20,2 \text{ см}$.

Площадь сечения

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20,2^2}{4} = 320,3 \text{ см}^2.$$

Отношение площади сечения к площади двутавра

$$\frac{A_0}{A_t} = \frac{320,3}{72,6} = 4,41.$$

Результаты расчета сведем в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Форма сечения	Двутавр	Коробчатое сечение	Прямоугольное сечение	Круглое сечение
Площадь поперечного сечения, см ²	72,6	114,4	284,8	820,8
Отношение к площади двутавра	1	1,58	8,28	4,41

Как следует из приведенных расчетов, двутавр является наиболее рациональным с точки зрения расхода материала по сравнению с коробчатым, прямоугольным и круглым сечениями.

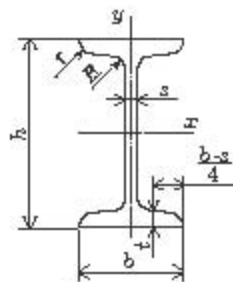
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. школа, 1975. – 654 с.
- 2 Леоненко, Д. В. Эпюры внутренних силовых факторов / Д. В. Леоненко. – Гомель : ВелГУТ, 2012. – 51 с.
- 3 Сопротивление материалов / А. Ф. Смирнов [и др.]. – М. : Высш. школа, 1979. – 595 с.
- 4 Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 284 с.
- 5 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Изд-во МГТУ, 2000. – 592 с.
- 6 Яровая, А. В. Решение задач по технической механике / А. В. Яровая, Д. В. Леоненко, В. В. Талецкий. – Гомель : ВелГУТ, 2005. – 108 с.
- 7 Яровая, А. В. Строительная механика. Статика стержневых систем : учеб. пособие / А. В. Яровая. – Гомель : ВелГУТ, 2012. – 447 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

Сортамент двутавров стальных горячекатаных (по ГОСТ 8239-89)



- h – высота балки; r – радиус закругления полки;
 b – ширина полки; J – момент инерции;
 s – толщина стенки; W – момент сопротивления;
 t – средняя толщина полки; i – радиус инерции;
 R – радиус внутреннего закругления; S – статический момент площади полусечения

Таблица А.1 – Геометрические характеристики двутавров

Номер двутавра	h	b	s	t	R	r	A_z см ²	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						
									X- X				Y- Y		
									J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	100	68	4,8	7,2	7,0	2,8	12,0	9,48	198	39,7	4,08	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	84	4,8	7,2	7,8	3,0	14,7	11,50	360	66,4	4,66	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	78	4,9	7,8	8,0	3,0	17,4	13,70	672	61,7	6,73	46,8	41,9	11,80	1,56
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,8	14,80	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,8	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	116,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2660	232,0	9,13	131,0	157,0	28,80	2,27
24	240	116	5,6	9,6	10,6	4,0	34,8	27,30	3480	289,0	9,97	163,0	198,0	34,80	2,37
27	270	128	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,80	6010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,80	2,64
30	300	136	6,8	10,2	12,0	5,0	46,8	36,80	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,89
33	330	149	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9640	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	143	7,8	12,3	14,0	6,0	61,9	48,80	13360	743,0	14,70	423,0	518,0	71,10	2,89
40	400	166	8,3	13,0	16,0	6,0	72,8	57,00	19062	963,0	16,20	546,0	667,0	88,10	3,08
45	450	180	9,0	14,2	18,0	7,0	84,7	66,80	27698	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	16,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,8	18,0	7,0	118,0	92,80	55962	2036,0	21,80	1161	1358,0	161,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	136,0	108,0	78808	2660,0	23,80	1491	1726,0	182,00	3,54

Учебное издание

ЛЕОНЕНКО Денис Владимирович

**Плоский изгиб. Геометрические характеристики
поперечных сечений**

Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы
«Плоский изгиб. Геометрические характеристики поперечных сечений»
для студентов технических специальностей заочного факультета

Редактор *Н. А. Дашкевич*

Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 06.02.2014 г. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,82. Тираж 800 экз.
Зак. № . Изд. № 113.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02830/0552608 от 09.07.2009 г.
ЛП № 02830/0494180 от 03.04.2009 г.
246653, г. Гомель, Кирова, 34.