

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра электротехники

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

**ДВУХПОЛЮСНИКИ.
ДЛИННЫЕ ЛИНИИ**

Гомель 2023

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра электротехники

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ДВУХПОЛЮСНИКИ. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области транспорта и транспортной деятельности
для обучающихся по специальности 1-37 02 04
«Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте»
в качестве учебно-методического пособия*

Гомель 2023

УДК 621.3.011.71(075.8)
ББК 31.21
В67

Рецензенты: кафедра «Электроснабжение» (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент *А. О. Добродей*) (ГГТУ им. П. О. Сухого); кафедра «Автоматизированный электропривод» (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент *В. В. Тодоров*) (ГГТУ им. П. О. Сухого)

Волков, Н. П.

В67 Теория линейных электрических цепей. Двухполюсники. Длинные линии : учеб.-метод. пособие / Н. П. Волков ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.– Гомель: БелГУТ, 2023. – 118 с.
ISBN 978-985-891-102-7

Представлен материал по анализу и синтезу двухполюсных цепей, исследованию установившихся и переходных процессов в цепях с распределенными параметрами.

Предназначено для студентов специальности 1-37 02 04 «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте».

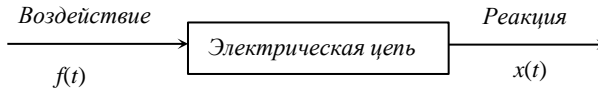
УДК 621.3.011(075.8)
ББК 31.21

ISBN 978-985-891-102-7

© Волков Н. П., 2023
© Оформление. БелГУТ, 2023

ВВЕДЕНИЕ

Различные устройства систем автоматики, телемеханики и связи находятся под действием напряжений и токов, которые могут изменяться во времени самым различным образом. Электрическую цепь какого-либо устройства можно рассматривать как систему, к которой приложено некоторое воздействие (возмущение) $f(t)$:



При этом в электрической цепи возникает реакция (отклик) $x(t)$, которую можно рассматривать в качестве некоторой характеристики цепи.

Воздействие и реакция могут быть достаточно сложной формы. В системах телемеханики и связи их используют для передачи информации и называют сигналами.

Задачей дисциплины «Теория линейных электрических цепей» (ТЛЭЦ) является исследование электромагнитных процессов в электрических цепях и установление связей между напряжениями и токами в различных частях цепи.

Рассматриваемые в курсе ТЛЭЦ задачи можно условно разделить на два типа. В одних задается конкретная схема электрической цепи и параметры ее элементов. При этом требуется по заданному возмущению определить различные свойства и процессы в цепи, т. е. найти реакцию в виде тока в какой-либо ветви или напряжение между какими-то узлами. Такие задачи называют задачами *анализа* цепей.

В других случаях приходится решать обратную задачу: подобрать структуру цепи и параметры ее элементов по заданной характеристике цепи. Такие задачи относятся к задачам *синтеза* цепей.

1 ДВУХПОЛЮСНИКИ

Любая сколь угодно сложная электрическая цепь какого-либо электро-технического устройства может быть представлена в виде совокупности более простых цепей. Выводы таких фрагментов цепи или ее отдельных элементов называют *полюсами*. В зависимости от числа полюсов различают двухполюсники, четырехполюсники и многополюсники.

Двухполюсником называют электрическую цепь, имеющую два полюса (зажима) для подключения. Двухполюсник может иметь конфигурацию любой сложности. Если внутренняя структура двухполюсника неизвестна или не представляет интереса, двухполюсник изображают в виде прямоугольника с двумя клеммами (рисунок 1.1).

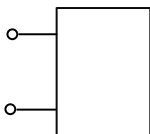


Рисунок 1.1

Классификация двухполюсников осуществляется по ряду признаков элементов, входящих в его структуру. Различают одно-, двух- и многоэлементные двухполюсники. Если двухполюсник содержит резистивные элементы, то он называется двухполюсником с потерями. Двухполюсники, имеющие в своей структуре только индуктивности и емкости,

называют *реактивными* или двухполюсниками без потерь.

Активный двухполюсник содержит внутри себя источник энергии, и между разомкнутыми зажимами такого двухполюсника имеется напряжение. Пассивный двухполюсник не содержит источников, либо имеющиеся в его структуре источники взаимно компенсируются таким образом, что на разомкнутых зажимах напряжение равно нулю.

1.1 Частотные характеристики двухполюсников

При анализе цепей гармонического тока в установившемся режиме используют метод комплексных амплитуд, в котором синусоидальная функция напряжения $u(t)$ или тока $i(t)$ заменяется экспоненциальной. Синусоидальная и соответствующая ей экспоненциальная функции связываются между собой знаком соответствия $\hat{=}$:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \doteq \underline{u}(t) = U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}; \quad (1.1)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \doteq \underline{i}(t) = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}, \quad (1.2)$$

где $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ – комплексная амплитуда напряжения;

$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ – комплексная амплитуда тока.

При этом $u(t) = \text{Im}[\underline{U}_m e^{j\omega t}]$,

а $i(t) = \text{Im}[\underline{I}_m e^{j\omega t}]$.

Рассмотрим на рисунке 1.2 цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов r , L , C и находящуюся в установившемся режиме под действием синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Уравнение электрического равновесия цепи для мгновенных значений тока и напряжения:

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (1.3)$$

При переходе к методу комплексных амплитуд уравнение (1.3) принимает следующий вид:

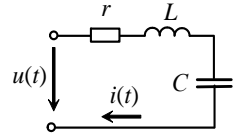


Рисунок 1.2

$$r \underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}. \quad (1.4)$$

После сокращения обеих частей уравнения на множитель $e^{j\omega t}$ получаем:

$$\left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{I}_m = \underline{U}_m.$$

Интегро-дифференциальное уравнение (1.3) превратилось в алгебраическое (1.4), в котором комплексные амплитуды \underline{U}_m и \underline{I}_m можно заменить соответственно комплексами действующих значений и получить формулу закона Ома в комплексной форме:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}(j\omega)}, \quad (1.5)$$

где $\underline{Z}(j\omega) = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = r + jx = Z(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ – комплексное сопротивление цепи.

Модуль комплексного сопротивления или полное сопротивление

$$Z(\omega) = |\underline{Z}(j\omega)| = \frac{U}{I} = \sqrt{r^2 + x^2},$$

а аргумент
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{r}{x},$$

где
$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = x_L - x_C.$$

Из записанных выше соотношений следует, что модуль и аргумент комплексного сопротивления являются функциями угловой частоты ω . Это следует учитывать, так как в электрических цепях ряда электротехнических устройств приходится иметь дело со значением полного сопротивления $Z(\omega)$ не только для одной частоты, но и для полосы частот. Это относится и к величине, обратной комплексному сопротивлению, т. е. к комплексной проводимости:

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(j\omega)} = \frac{I}{U}.$$

Зависимости сопротивления $\underline{Z}(j\omega)$ или проводимости $\underline{Y}(j\omega)$ двухполюсника от частоты называют *частотными характеристиками цепи*. Модули этих величин $|\underline{Z}(j\omega)|$ и $|\underline{Y}(j\omega)|$ определяют отношение действующих значений (амплитуд) соответствующих реакций и воздействий при изменении частоты и называют *амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ)* соответствующих зависимостей. Аргументы (фазы) этих зависимостей определяют разность начальных фаз соответствующих реакций и воздействий при изменении частоты и называют *фазо-частотными характеристиками (ФЧХ)* соответствующих зависимостей. Кроме зависимостей $Z(\omega)$ и $Y(\omega)$ к частотным характеристикам можно отнести и другие функции.

1.2 Операторные характеристики двухполюсников

Как отмечалось выше, синусоидальные функции токов и напряжений в методе комплексных амплитуд можно представить в виде экспоненциальных функций с мнимыми аргументами:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im}[\underline{I}_m e^{j\omega t}];$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \text{Im}[\underline{U}_m e^{j\omega t}].$$

Умножим левые и правые части этих соотношений на множитель $e^{\delta t}$, где δ – вещественное число. Тогда

$$I_m e^{\delta t} \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im}[I_m e^{\delta t} e^{j\omega t}] = \text{Im}[I_m e^{(\delta + j\omega)t}] = \text{Im}[I_m e^{pt}];$$

$$U_m e^{\delta t} \sin(\omega t + \psi_u) = \text{Im}[U_m e^{\delta t} e^{j\omega t}] = \text{Im}[U_m e^{(\delta + j\omega)t}] = \text{Im}[U_m e^{pt}].$$

Оператор $p = \delta + j\omega$ называют *комплексной частотой*, а величины $I_m e^{pt}$ и $U_m e^{pt}$ – *обобщенными экспонентами* тока и напряжения.

Действующие значения тока и напряжения, являющиеся функциями комплексного оператора p , будем называть *операторными* и обозначать соответственно $I(p)$ и $U(p)$.

Уравнение (1.5) в операторной форме примет следующий вид:

$$I(p) = \frac{U(p)}{r + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{U(p)}{Z(p)} = Y(p)U(p). \quad (1.6)$$

Операторное сопротивление $Z(p)$ и операторная проводимость $Y(p)$ являются *операторными характеристиками* двухполюсника. В частном случае, когда $p = j\omega$, операторные характеристики совпадают с частотными.

1.3 Входное сопротивление двухполюсника

Рассмотрим на рисунке 1.3 операторную схему, на которой пассивный двухполюсник, представляющий сколь угодно сложную цепь, присоединен к зажимам операторной ЭДС $E(p)$.

Входное операторное сопротивление двухполюсника зависит от схемы соединения пассивных элементов (резисторов, катушек индуктивности и конденсаторов), а также от значений параметров этих элементов. Для анализа схемы в общем виде воспользуемся методом контурных токов. Уравнения будем записывать для операторных величин. Входной ток $I(p)$ будет равен контурному току $I_{11}(p)$, который возникает под действием контурной ЭДС $E_{11}(p) = E(p)$, действующей во входном контуре двухполюсника. Значение тока определяется следующим образом:

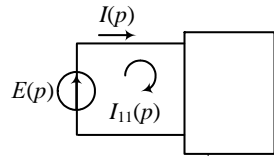


Рисунок 1.3

$$I_{11}(p) = E_{11}(p) \frac{\Delta_{11}(p)}{\Delta(p)},$$

где $\Delta(p)$ – определитель системы уравнений, составленной по методу контурных токов;

$\Delta_{11}(p)$ – определитель, полученный из определителя $\Delta(p)$ путем вычеркивания 1-й строки и 1-го столбца и умножения полученного выражения на $(-1)(1+1)$.

Операторное входное сопротивление находим по закону Ома:

$$Z(p) = \frac{E(p)}{I(p)} = \frac{E_{11}(p)}{I_{11}(p)} = \frac{\Delta(p)}{\Delta_{11}(p)}.$$

В общем случае операторная характеристика $Z(p)$ может быть представлена в виде рациональной дроби, т. е. отношения двух полиномов по степеням p :

$$Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (1.7)$$

При весьма высоких частотах входное сопротивление

$$Z(p)_{p \rightarrow \infty} = \frac{a_m}{b_n} p^{m-n}.$$

Сопротивление реальной цепи при высоких частотах может быть чисто резистивным и не зависеть от p . Это возможно, если $m = n$. При индуктивном характере сопротивления оно будет иметь вид Lp , при этом $m - n = 1$ и

$$Z(p)_{p \rightarrow \infty} = \frac{a_m}{b_n} p.$$

Если при высоких частотах входное сопротивление носит емкостный характер, то оно имеет вид $1/Cp$. Для такой цепи $m - n = -1$ и

$$Z(p)_{p \rightarrow \infty} = \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{1}{p}.$$

На основании рассмотренных выше вариантов можно сделать следующий вывод:

рациональные дроби $Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ и $Y(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$, выражающие зависимости

входных сопротивлений и проводимостей от параметра p , должны иметь в числителе и знаменателе многочлены, степени которых могут отличаться не более, чем на единицу.

Принимая во внимание, что $Z(p)_{p \rightarrow 0}$ представляет собой сопротивление двухполюсника при весьма низких частотах, наименьшие степени p , входящие в многочлены $M(p)$ и $N(p)$, тоже не могут отличаться друг от друга более, чем на единицу.

Коэффициенты a_k и b_k полиномов $M(p)$ и $N(p)$ представляют собой комбинации параметров элементов r , L и C , а, следовательно, являются вещественными и положительными.

Формулу (1.7) можно записать в ином виде, разложив на множители полиномы числителя и знаменателя.

Вынесем в числителе за скобки множитель a_m , а в знаменателе множитель b_n .

$$\text{Корни уравнения } M(p) = a_m \left(p^m + \frac{a_{m-1}}{a_m} p^{m-1} + \dots + \frac{a_1}{a_m} p + \frac{a_0}{a_m} \right) = 0$$

обозначим через p_1, p_3, p_5, \dots , а корни уравнения

$$N(p) = b_n \left(p^n + \frac{b_{n-1}}{b_n} p^{n-1} + \dots + \frac{b_1}{b_n} p + \frac{b_0}{b_n} \right) = 0$$

через p_2, p_4, p_6, \dots . Число корней числителя равно m , число корней знаменателя n . Тогда

$$Z(p) = \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{(p-p_1)(p-p_3)(p-p_5)\dots(p-p_m)}{(p-p_2)(p-p_4)(p-p_6)\dots(p-p_n)}. \quad (1.8)$$

Значения переменной p , соответствующей корням полинома $M(p) = 0$, т. е. p_1, p_3, p_5, \dots , обращают входное сопротивление $Z(p)$ в нуль и называются *нулями* функции $Z(p)$.

Корни уравнения $N(p) = 0$, т. е. значения p_2, p_4, p_6, \dots , при которых $Z(p)$ обращается в бесконечность, называют *полюсами* функции $Z(p)$.

Полагаем, что нули и полюсы функции сопротивления простые (однократные). В общем случае нули и полюсы являются комплексными числами и могут быть изображены на комплексной плоскости. Нули принято изображать кружками или жирными точками, а полюсы – крестиками.

Так как

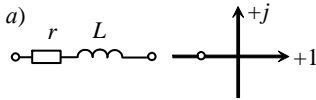
$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)},$$

то нули $Z(p)$ являются полюсами $Y(p)$, а полюсы $Z(p)$ – это нули для $Y(p)$.

Рассмотрим определение нулей и полюсов простейших активно-реактивных двухполюсников. На рисунке 1.4 изображены схемы двухполюсников и соответствующие им *полюсно-нулевые диаграммы* операторных сопротивлений, т. е. расположения нулей и полюсов на комплексной плоскости. Для двухполюсника на рисунке 1.4, *а* операторное сопротивление записывается в форме:

$$Z(p) = r + pL$$

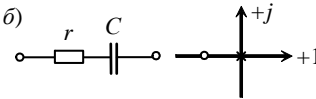
и имеет нуль при $p = -\frac{r}{L}$.



Двухполюсник на рисунке 1.4, *б*, для которого

$$Z(p) = r + \frac{1}{Cp} = \frac{rCp + 1}{Cp},$$

имеет нуль при $p = -\frac{1}{rC}$ и полюс при $p = 0$.



У двухполюсника на рисунке 1.4, *в* операторная характеристика

$$Z(p) = \frac{rLp}{r + Lp}$$

имеет нуль при $p = 0$ и полюс при $p = -\frac{r}{L}$.

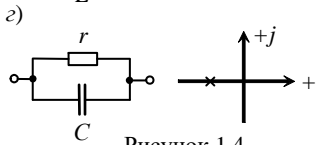
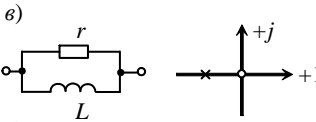


Рисунок 1.4

Операторное сопротивление двухполюсника на рисунке 1.4, *з* $Z(p) = \frac{r}{rCp + 1}$ имеет полюс при $p = -\frac{1}{rC}$.

Как видно из рисунка 1.4, у двухполюсников, имеющих в схеме только элементы r и L или только r и C , нули и полюсы операторного сопротивления $Z(p)$ расположены на отрицательной полуоси.

1.4 Канонические схемы пассивных двухполюсников

В ряде случаев бывает необходимо иметь двухполюсники с заданными характеристиками и состоящими из наименьшего числа элементов. При этом схема двухполюсника должна быть такой, чтобы можно было достаточно просто определить численные значения параметров ее элементов. Такие двухполюсники называются *каноническими*.

1.4.1 Канонические схемы Фостера

На рисунке 1.5 представлен простейший двухэлементный двухполюсник с параллельным соединением элементов r_k и C_k .

Будем полагать, что каждый элемент данной схемы и во всех последующих эквивалентен любому сложному соединению однотипных элементов.

Операторное сопротивление такого двухполюсника запишем следующим образом:

$$Z_k(p) = \frac{r_k \frac{1}{C_k p}}{r_k + \frac{1}{C_k p}} = \frac{r_k}{r_k C_k p + 1} = \frac{1}{p + \frac{1}{r_k C_k}} = \frac{A_k}{p - p_k}, \quad (1.9)$$

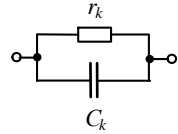


Рисунок 1.5

где $A_k = \frac{1}{C_k}$; $p_k = -\frac{1}{r_k C_k}$.

Если соединить последовательно несколько таких простейших цепей и учесть, что в частных случаях r_k может быть бесконечно большим, а C_k бесконечно малым, то получим схему на рисунке 1.6. Такую схему называют *первой канонической схемой Фостера*.

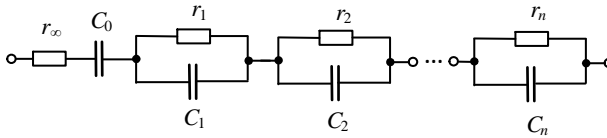


Рисунок 1.6

Операторное сопротивление такой схемы двухполюсника

$$Z(p) = r_\infty + \frac{1}{C_0 p} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}. \quad (1.10)$$

Для схемы с последовательным соединением элементов r_k и C_k на рисунке 1.7 операторное сопротивление

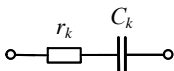


Рисунок 1.7

$$Z_k(p) = r_k + \frac{1}{C_k p} = \frac{r_k C_k p + 1}{C_k p}.$$

Входная операторная проводимость схемы:

$$Y_k(p) = \frac{1}{Z_k(p)} = \frac{C_k p}{r_k C_k p + 1} = \frac{\frac{1}{r_k} p}{p + \frac{1}{r_k C_k}} = \frac{A_k p}{p - p_k}, \quad (1.11)$$

где $A_k = \frac{1}{r_k}$; $p_k = -\frac{1}{r_k C_k}$.

При параллельном соединении таких цепей можно получить схемы двухполосников с заданными характеристиками. При этом следует иметь в виду, что r_k может принимать нулевые значения, а C_k – бесконечно большие. С учетом этого получаем *вторую каноническую схему Фостера* на рисунке 1.8.

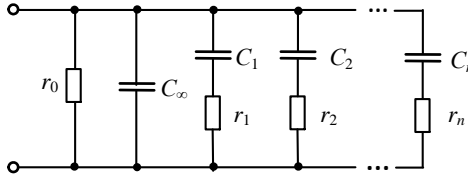


Рисунок 1.8

Проводимость такого двухполосника, представленного на рисунке 1.8,

$$Y(p) = \frac{1}{r_0} + C_\infty p + \sum_{k=1}^n \frac{A_k p}{p - p_k}, \quad (1.12)$$

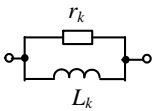


Рисунок 1.9

Аналогичным образом проведем исследование активно-индуктивных двухполосников. Для параллельной схемы на рисунке 1.9 операторное сопротивление двухполосника

$$Z_k(p) = \frac{r_k L_k p}{L_k p + r_k} = \frac{r_k p}{p + \frac{r_k}{L_k}} = \frac{A_k p}{p - p_k}, \quad (1.13)$$

где $A_k = r_k$; $p_k = -\frac{r_k}{L_k}$.

При последовательном соединении таких двухполосных схем получим первую схему Фостера двухполосника (рисунок 1.10).

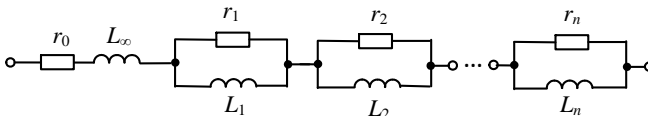


Рисунок 1.10

Операторное сопротивление схемы

$$Z(p) = r_0 + L_\infty p + \sum_{k=1}^n \frac{A_k p}{p - p_k}, \quad (1.14)$$

Проводимость схемы, составленной из последовательно соединенных элементов r_k и L_k , (рисунок 1.11):

$$Y_k(p) = \frac{1}{L_k p + r_k} = \frac{\frac{1}{L_k}}{p + \frac{r_k}{L_k}} = \frac{A_k}{p - p_k},$$

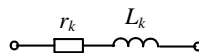


Рисунок 1.11

где $A_k = \frac{1}{L_k}$; $p_k = -\frac{r_k}{L_k}$.

При параллельном соединении простейших схем (рисунок 1.12) получим вторую каноническую схему Фостера для двухполюсника, состоящего из активных сопротивлений и индуктивностей. ,

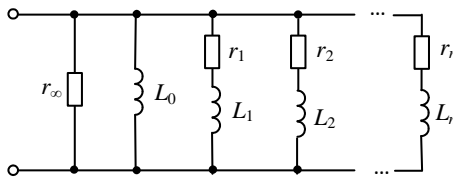


Рисунок 1.12

Операторная проводимость двухполюсника

$$Y(p) = \frac{1}{r_\infty} + \frac{1}{L_0 p} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}. \quad (1.15)$$

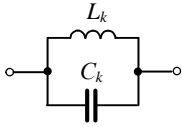


Рисунок 1.13

Далее исследуем схему двухполюсника, которая образована параллельным соединением реактивных элементов L_k и C_k (рисунок 1.13).

Сопротивление схемы

$$Z_k(p) = \frac{L_k p \frac{1}{C_k p}}{L_k p + \frac{1}{C_k p}} = \frac{L_k p}{L_k C_k p^2 + 1} = \frac{\frac{1}{C_k} p}{p^2 + \frac{1}{L_k C_k}}. \quad (1.16)$$

Сопротивление двухполюсника имеет нуль при $p = 0$ и два полюса при $p_k = \pm j \sqrt{\frac{1}{L_k C_k}} = \pm j \omega_k$. Соответствующая полюсно-нулевая диаграмма операторного сопротивления приведена на рисунке 1.14. Разложим $Z_k(p)$ на сумму элементарных дробей:

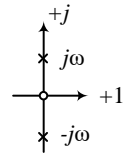


Рисунок 1.14

$$Z_k(p) = \frac{\frac{1}{C_k} p}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{A_k}{p - j\omega_k} + \frac{B_k}{p + j\omega_k} = \frac{(A_k + B_k)p + (A_k - B_k)j\omega_k}{(p - j\omega_k)(p + j\omega_k)}.$$

Определим коэффициенты разложения:

$$A_k - B_k = 0, \quad A_k = B_k, \quad A_k + B_k = \frac{1}{C_k} = 2A_k.$$

Получим
$$Z_k(p) = \frac{2A_k p}{p^2 + \omega_k^2}. \quad (1.17)$$

Соединяя последовательно простейшие схемы, получим первую каноническую схему Фостера для реактивного двухполюсника (рисунок 1.15) с операторным сопротивлением

$$Z(p) = L_\infty p + \frac{1}{C_0 p} + \sum_{k=1}^n \frac{2A_k p}{p^2 - p_k^2}, \quad (1.18)$$

где $A_k = \frac{1}{2C_k}$;

$$p_k = \pm j \sqrt{\frac{1}{L_k C_k}} = \pm j \omega_k;$$

n – число пар комплексно-сопряженных полюсов функции $Z(p)$.

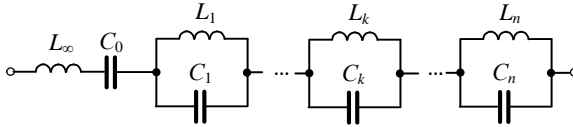


Рисунок 1.15

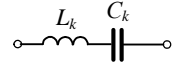


Рисунок 1.16

Для схемы на рисунке 1.16 с последовательным соединением реактивных элементов операторная проводимость двухполюсника

$$Y_k(p) = \frac{1}{L_k p + \frac{1}{C_k p}} = \frac{C_k p}{L_k C_k p^2 + 1} = \frac{(1/L_k)p}{p^2 + \frac{1}{L_k C_k}} = \frac{2A_k p}{p^2 - p_k^2}. \quad (1.19)$$

Операторное сопротивление двухполюсника

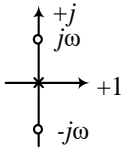


Рисунок 1.17

$$Z_k(p) = L_k p + \frac{1}{C_k p} = \frac{L_k C_k p^2 + 1}{C_k p}$$

имеет один полюс при $p = 0$ и два нуля при

$$p_k = \pm j \sqrt{\frac{1}{L_k C_k}} = \pm j \omega_k \quad (\text{рисунок 1.17}).$$

Вторая каноническая схема Фостера реактивного двухполюсника представлена на рисунке 1.18.

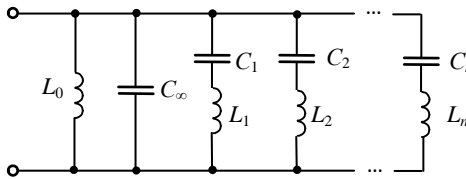


Рисунок 1.18

Для данной схемы проводимость реактивного двухполюсника

$$Y(p) = C_\infty p + \frac{1}{L_0 p} + \sum_{k=1}^n \frac{2A_k p}{p^2 - p_k^2}, \quad (1.20)$$

где $A_k = \frac{1}{2L_k}$;

$$p_k = \pm j \frac{1}{\sqrt{L_k C_k}} = \pm j \omega_k.$$

n – число пар комплексно-сопряженных полюсов функции $Y(p)$;

Из построенных для реактивных двухполюсников полюсно-нулевых диаграмм следует, что нули и полюсы расположены только на мнимой оси, при этом нули и полюсы чередуются.

1.4.2 Канонические схемы Кауэра

Исследуем на рисунке 1.19, *a* электрическую схему двухполюсника, образованную последовательно и параллельно соединенными комплексными сопротивлениями. Схемы такого типа называют *цепными* или *лестничными*. Для продольных ветвей этих схем удобнее оперировать сопротивлениями и обозначать их нечетными индексами. В поперечных ветвях будем оперировать проводимостями, применяя к ним четные индексы.

Найдем эквивалентное сопротивление этой схемы относительно входных зажимов. С этой целью произведем эквивалентные преобразования схемы, что легко прослеживается из рисунка 1.19, *b–d*.

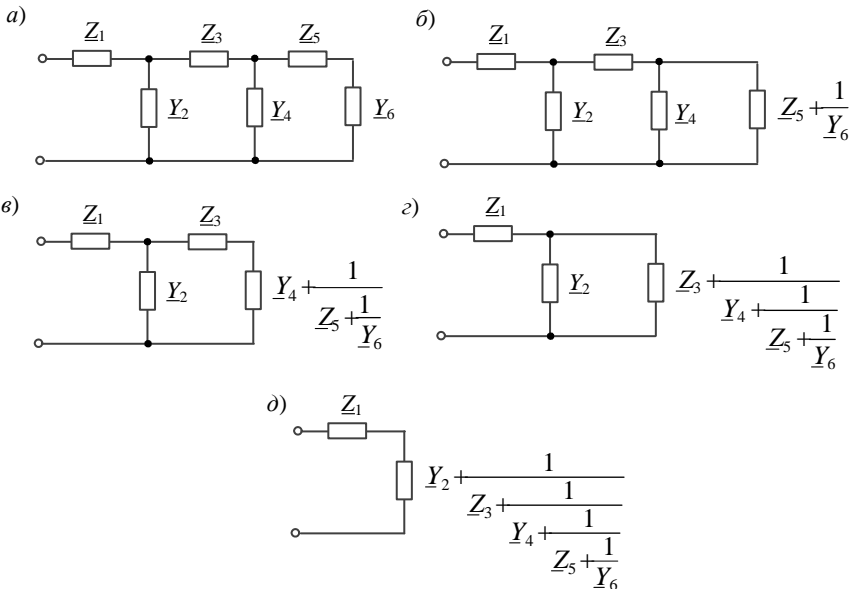


Рисунок 1.19

В результате такого *свертывания* получаем выражение для эквивалентного (входного) сопротивления схемы:

$$\underline{Z}_{\text{эк}} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_2 + \frac{1}{\underline{Z}_3 + \frac{1}{\underline{Y}_4 + \frac{1}{\underline{Z}_5 + \frac{1}{\underline{Y}_6}}}}}$$

Выражение для эквивалентного сопротивления имеет вид *цепной дроби*.

Аналогичным образом проведем эквивалентное преобразование схемы двухполюсника (рисунок 1.20, а).

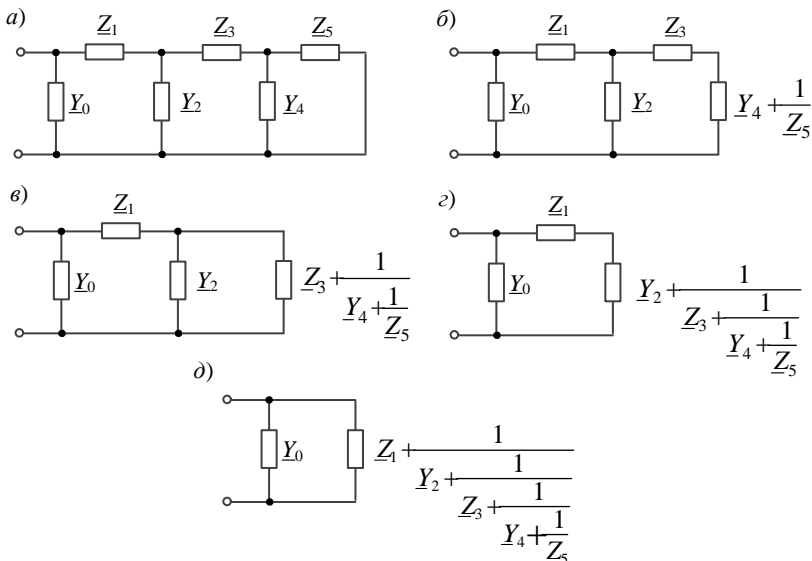


Рисунок 1.20

Получим выражение для эквивалентной (входной) проводимости

$$\underline{Y}_{\text{эк}} = \underline{Y}_0 + \frac{1}{\underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_2 + \frac{1}{\underline{Z}_3 + \frac{1}{\underline{Y}_4 + \frac{1}{\underline{Z}_5}}}}}$$

Произведем построение схемы двухполюсника по операторному сопротивлению, заданному формулой (1.7),

$$Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

путем приведения выражения к виду цепной дроби. Для этого осуществим постепенное деление числителя на знаменатель.

Частное от деления первого члена полинома $M(p)$ на первый член полинома $N(p)$ равно $\frac{a_m}{b_n} p^{m-n}$. Как отмечалось выше, степени полиномов либо равны, либо отличаются на единицу. Таким образом, при равенстве $m = n$

получаем $\frac{a_m}{b_n} = A$. Если $m - n = 1$, то $\frac{a_m}{b_n} = Ap$, а при $m - n = -1$ $\frac{a_m}{b_n} = \frac{A}{p}$. В

полученных соотношениях постоянную A можно представить как некоторое активное сопротивление. В таком случае Ap будет соответствовать индуктивному операторному сопротивлению Lp , а $\frac{A}{p}$ – емкостному операторному

сопротивлению $\frac{1}{Cp}$ или соответствующим операторным проводимостям

$$\left(Cp \text{ или } \frac{1}{Lp} \right).$$

Если в формуле (1.7) для входного операторного сопротивления показатели степени p в полиномах $M(p)$ и $N(p)$ отличаются на единицу и снижаются сразу на две, то в этом случае мы имеем дело с чисто реактивным двухполюсником.

Рассмотрим два возможных варианта деления полиномов.

Пусть степень m полинома числителя превышает степень n полинома знаменателя на единицу.

Частное от деления числителя M на знаменатель N будет представлено в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое содержит оператор p в первой степени и представляет собой операторное индуктивное сопротивление

$L_1 p$. Второе слагаемое представляет собой остаток в виде отношения $\frac{M'}{N}$,

где M' – полином, степень которого на единицу меньше степени полинома

N . Представив остаток в виде $\frac{1}{N/M'}$, продолжим деление:

$$Z(p) = L_1 p + \frac{1}{C_2 p + \frac{N'}{M'}}$$

где N' – полином, степень которого на единицу ниже степени M' .

Продолжая подобным образом деление, получаем:

$$Z(p) = L_1 p + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{L_3 p + \frac{1}{C_4 p + \dots + \frac{1}{L_n p + \frac{1}{C_n p}}}}}. \quad (1.21)$$

Построим в соответствии с полученной формулой (1.21) и с учетом того, что $p = j\omega$, лестничную электрическую схему (рисунок 1.21). Ее называют *первой канонической схемой Кауэра*.

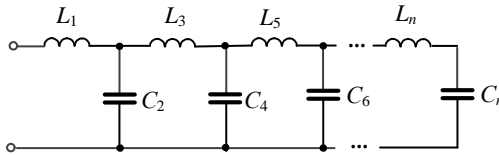


Рисунок 1.21

Во втором варианте показатель полинома числителя M на единицу меньше показателя полинома N . В этом случае деление полиномов приводит к разложению следующего вида:

$$Z(p) = \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{\frac{1}{L_2 p} + \frac{1}{C_3 p + \frac{1}{L_4 p + \dots + \frac{1}{C_n p + \frac{1}{L_n p}}}}}. \quad (1.22)$$

Цепная схема, соответствующая уравнению (1.22), дана на рисунке 1.22 и является *второй канонической схемой Кауэра*.

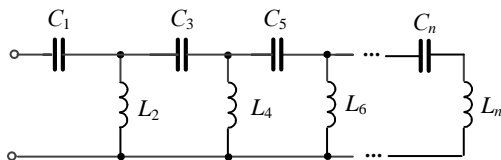


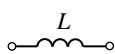
Рисунок 1.22

1.5 Частотные характеристики реактивных двухполюсников

1.5.1 Одноэлементные реактивные двухполюсники

Идеальная катушка индуктивности L и конденсатор C (рисунок 1.23) представляют собой одноэлементные реактивные двухполюсники.

Частотные характеристики катушки, т. е. зависимости комплексного сопротивления и соответственно комплексной проводимости от частоты, имеют следующий вид:



$$\underline{Z}_L(j\omega) = j\omega L = jx_L; \quad \underline{Y}_L(j\omega) = \frac{1}{j\omega L} = -jb_L.$$



Соответствующие частотные характеристики для емкостного элемента:

Рисунок 1.23

$$\underline{Z}_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = -jx_C; \quad \underline{Y}_C(j\omega) = j\omega C = jb_C.$$

Как следует из приведенных формул, знак комплексного сопротивления и комплексной проводимости каждого из этих элементов не изменяется при изменении частоты. Графически частотные характеристики рассмотренных элементов изображены на рисунке 1.24, соответственно для сопротивлений (см. рисунок 1.24, а) и для проводимостей (см. рисунок 1.24, б).

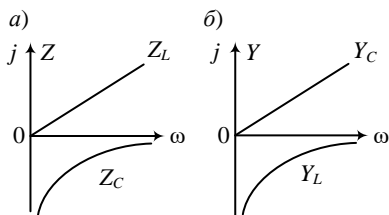


Рисунок 1.24

Частотные характеристики $\underline{Z}_L(j\omega)$ и $\underline{Y}_C(j\omega)$ в прямоугольной системе координат представляют собой прямые линии, а частотные характеристики $\underline{Y}_L(j\omega)$ и $\underline{Z}_C(j\omega)$ – гиперболы. Как видно из приведенных графиков, сопротивление и проводимости реактивных элементов возрастают (с учетом знака) с увеличением частоты, т. е.

$$\frac{dZ}{d\omega} > 0; \quad \frac{dY}{d\omega} > 0.$$

1.5.2 Двухэлементные реактивные двухполюсники

При последовательном или параллельном соединении индуктивности и емкости получим двухэлементный реактивный двухполюсник. Схема на рисунке 1.25 представляет собой последовательный колебательный контур. Запишем выражение для функции входного сопротивления схемы:



Рисунок 1.25

$$\underline{Z}(j\omega) = jx = j(x_L - x_C) = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1 - LC\omega^2}{j\omega C}. \quad (1.23)$$

Для нахождения нулей функции приравняем к нулю выражение числителя:

$$1 - LC\omega^2 = 0.$$

Получим $\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Отрицательный корень числителя в расчет не принимается. Остается нуль при частоте $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Приравняв к нулю знаменатель функции, получим полюс при частоте $\omega = 0$, при которой сопротивление двухполюсника бесконечно велико. При частоте, стремящейся к бесконечности, сопротивление двухполюсника также стремится к бесконечно большому значению.

Построим *характеристическую строку* для данного двухполюсника, которая представляет ось угловой частоты с нанесенными на ней нулям и полюсами функции входного сопротивления. Нули и полюсы, соответствующие частотам $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$, будем называть *внешними*. Если нуль или полюс находят для бесконечно большой частоты, то они обозначаются соответствующим образом над осью ω . Таким образом, частотная характеристика рассматриваемого двухполюсника имеет два внешних полюса.

Характеристическая строка для этого двухполюсника приведена на рисунке 1.26.

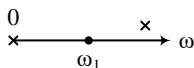


Рисунок 1.26

Частотная характеристика проводимости двухэлементного двухполюсника представляет собой функцию, обратную сопротивлению:

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(j\omega)} = \frac{j\omega C}{1 - LC\omega^2}. \quad (1.24)$$

На рисунке 1.27 приведены частотные характеристики сопротивления $\underline{Z}(j\omega)$ (см. рисунок 1.27, а) и проводимости $\underline{Y}(j\omega)$ (см. рисунок 1.27, б) последовательного колебательного контура, построенные согласно уравнениям (1.23) и (1.24).

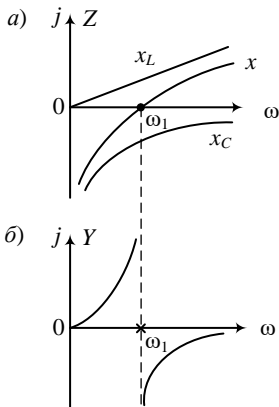


Рисунок 1.27

Из графика следует, что реактивное сопротивление $x(\omega)$, равное алгебраической сумме индуктивного $x_L(\omega)$ и емкостного $x_C(\omega)$ сопротивлений, растет с увеличением частоты, принимая нулевое значение при частоте резонанса напряжений

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

При изменении частоты от 0 до ω_1 сопротивление x имеет емкостный характер, а при частотах, превышающих ω_1 , приобретает индуктивный характер.

Преобразуем выражение (1.23) и приведем его к каноническому виду:

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1 - LC\omega^2}{j\omega C} = LC \frac{1 - \omega^2}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega} L(\omega_1^2 - \omega^2). \quad (1.25)$$

Частотная характеристика проводимости

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{j\omega}{L} \cdot \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2}. \quad (1.26)$$

При параллельном соединении катушки и конденсатора (рисунок 1.28) образуется параллельный колебательный контур с комплексной проводимостью

$$\underline{Y}(j\omega) = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1 - LC\omega^2}{j\omega L} = j(b_C - b_L) = jb.$$

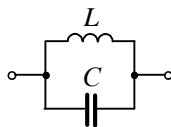


Рисунок 1.28

Комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Y}(j\omega)} = \frac{j\omega L}{1 - LC\omega^2}. \quad (1.27)$$

Приравняв к нулю числитель выражения (1.27), получим внешний нуль при $\omega = 0$. Катушка для постоянного тока представляет собой короткозамкнутый участок.

Для нахождения полюса приравняем к нулю знаменатель функции:

$$1 - LC\omega^2 = 0.$$

Найдем полюс, соответствующий частоте резонанса токов:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

При $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление исследуемого двухполюсника стремится к нулевому значению. Получаем еще один внешний нуль.

Характеристическая строка для сопротивления параллельного колебательного контура приведена на рисунке 1.29.

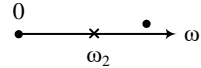
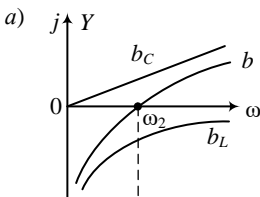


Рисунок 1.29

На рисунке 1.30, *a* построена частотная характеристика проводимости двухполюсника $b(\omega)$, полученная в результате графического сложения характеристик $b_C(\omega)$ и $b_L(\omega)$, а на рисунке 1.30, *б* – частотная характеристика сопротивления того же двухполюсника.

Построенные на рисунке 1.30 частотные характеристики соответствуют уравнениям:



$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{j\omega L}{1 - LC\omega^2} = j\omega \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \quad (1.28)$$

и
$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{C}{j\omega} \cdot (\omega_2^2 - \omega^2). \quad (1.29)$$

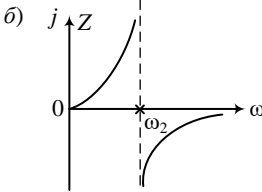


Рисунок 1.30

Как следует из рисунка 1.30, *б*, в области частот ниже резонансной сопротивление двухполюсника имеет индуктивный характер, а при частотах выше резонансной оно емкостного характера.

Сопротивления двухэлементных двухполюсников, в отличие от одноэлементных, зависят не только от частоты, но и от разности квадратов резонансной и текущей частот.

1.5.3 Трехэлементные реактивные двухполюсники

Схема трехэлементного реактивного двухполюсника может иметь две индуктивности и одну емкость или две емкости и одну индуктивность. Та-

ким образом, общее число возможных канонических схем трехэлементных реактивных двухполюсников равно четырем.

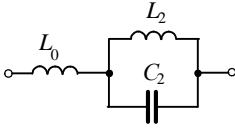


Рисунок 1.31

Рассмотрим трехэлементный реактивный двухполюсник, представленный в виде первой канонической схемы Фостера на рисунке 1.31. Он состоит из последовательно соединенных одноэлементного двухполюсника в виде индуктивности L_0 и параллельного контура $L_2 - C_2$. Запишем выражение для функции сопротивления двухполюсника

$$\begin{aligned} \underline{Z}(j\omega) &= j\omega L_0 + \frac{j\omega L_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \\ &= j\omega L_0 + \frac{j\omega L_2}{1 - L_2 C_2 \omega^2} = j\omega \frac{L_0 + L_2 - L_0 L_2 C_2 \omega^2}{1 - L_2 C_2 \omega^2} = j\omega L_0 \frac{\left(\frac{L_0 + L_2}{L_0 L_2 C_2} - \omega^2 \right)}{\frac{1}{L_2 C_2} - \omega^2}. \end{aligned}$$

Проанализируем полученную частотную характеристику. Приравняв к нулю знаменатель, получим частоту, соответствующую полюсу. Она равна частоте резонанса токов параллельного колебательного контура:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (1.30)$$

При равенстве нулю числителя получаем два нуля: внешний нуль при частоте $\omega = 0$ и нуль, который определяется из уравнения

$$\frac{L_0 + L_2}{L_0 L_2 C_2} - \omega^2 = 0.$$

Получим частоту $\omega' = \sqrt{\frac{L_0 + L_2}{L_0 L_2 C_2}}$, которая соответствует резонансу

напряжений. По своему значению она превышает частоту ω_2 , и, следовательно, может быть обозначена как

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{L_0 + L_2}{L_0 L_2 C_2}}. \quad (1.31)$$

С учетом полученных соотношений для резонансных частот частотная характеристика сопротивления соответствует каноническому выражению

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega \cdot L_0 \cdot \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \quad (1.32)$$

и приведена на рисунке 1.32. При изменении частоты от нуля до ω_2 сопротивление двухполюсника имеет индуктивный характер. При частотах $\omega_2 < \omega < \omega_3$ оно принимает емкостный характер, а когда частота превышает ω_3 , то сопротивление двухполюсника становится вновь индуктивным.

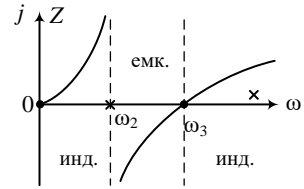


Рисунок 1.32

Проведем анализ схемы (рисунок 1.33), на которой трехэлементный реактивный двухполюсник состоит из параллельно соединенных индуктивности L_1 и последовательного колебательного контура $L_3 - C_3$. Двухполюсник представляет собой вторую каноническую схему Фостера.

Комплексная проводимость двухполюсника

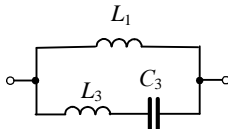


Рисунок 1.33

$$\begin{aligned} \underline{Y}(j\omega) &= \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} = \\ &= \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{j\omega C_3}{1 - L_3 C_3 \omega^2} = \frac{1 - (L_1 + L_3) C_3 \omega^2}{j\omega L_1 (1 - L_3 C_3 \omega^2)}. \end{aligned}$$

Сопротивление двухполюсника

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{j\omega L_1 (1 - L_3 C_3 \omega^2)}{1 - (L_1 + L_3) C_3 \omega^2}. \quad (1.33)$$

Найдем нули и полюсы полученного выражения для $\underline{Z}(j\omega)$.

Нули функции сопротивления: $\omega = 0$ (внешний) и $\omega' = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}$ — резонансная частота последовательного колебательного контура $L_3 - C_3$.

Полюс соответствует частоте

$$\omega'' = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_3) C_3}}.$$

Из сопоставления частот следует, что $\omega' > \omega''$, следовательно, можно принять следующие обозначения:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_3)C_3}} - \text{частота резонанса токов}; \quad (1.34)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{L_3C_3}} - \text{частота резонанса напряжений}. \quad (1.35)$$

Формула (1.33) для сопротивления двухполосника на рисунке 1.33 может быть записана в следующей форме:

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega \cdot \frac{L_1L_3}{L_1 + L_3} \cdot \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2}. \quad (1.36)$$

Если построить частотную характеристику в соответствии с формулой (1.36), то качественно она будет такой же, как и для схемы на рисунке 1.31. Можно подобрать параметры элементов схем на рисунках 1.31 и 1.33 таким образом, чтобы характеристики сопротивлений обоих двухполосников совпали. В этом случае оба двухполосника будут в электрическом смысле эквивалентными. Условия эквивалентности этих двухполосников можно записать на основании сопоставления формул (1.30)–(1.32) и (1.34)–(1.36):

$$\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_3)C_3}}; \quad \sqrt{\frac{L_0 + L_2}{L_0L_2C_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_3C_3}}; \quad L_0 = \frac{L_1L_3}{L_1 + L_3}.$$

Полученные соотношения позволяют выразить параметры элементов схемы на рисунке 1.31 через параметры элементов схемы на рисунке 1.33 и наоборот:

$$L_0 = \frac{L_1L_3}{L_1 + L_3}; \quad L_2 = \frac{L_1^2}{L_1 + L_3}; \quad C_2 = \left(\frac{L_1 + L_3}{L_1} \right)^2 C_3;$$

$$L_1 = L_0 + L_2; \quad L_3 = \frac{L_0(L_0 + L_2)}{L_2}; \quad C_3 = \left(\frac{L_0}{L_0 + L_2} \right)^2 C_2.$$

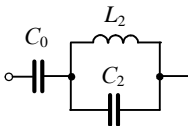


Рисунок 1.34

Исследуем схемы двухполосников, состоящие из одной индуктивности и двух емкостей. Найдем сопротивление схемы двухполосника на рисунке 1.34:

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_0} + \frac{j\omega L_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} =$$

$$= \frac{1}{j\omega C_0} + \frac{j\omega L_2}{1 - L_2 C_2 \omega^2} = \frac{1 - L_2(C_0 + C_2)\omega^2}{j\omega C_0(1 - L_2 C_2 \omega^2)}. \quad (1.37)$$

$$\text{Ноль функции сопротивления: } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_2(C_0 + C_2)}}. \quad (1.38)$$

Полюсы: внешний $\omega = 0$ и внутренний

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (1.39)$$

Частота ω_1 соответствует резонансу напряжений, а частота ω_2 – резонансу токов. Преобразуем формулу входного сопротивления (1.37):

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{L_2(C_0 + C_2) \left[\frac{1}{L_2(C_0 + C_2)} - \omega^2 \right]}{j\omega C_0 L_2 C_2 \left(\frac{1}{L_2 C_2} - \omega^2 \right)} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{C_0 + C_2}{C_0 C_2} \cdot \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}. \quad (1.40)$$

В соответствии с формулой (1.40) на рисунке 1.35 построена частотная характеристика функции сопротивления двухполюсника. При частотах от нуля до частоты резонанса напряжений ω_1 сопротивление имеет емкостный характер. В диапазоне изменения частоты от ω_1 до ω_2 характер сопротивления становится индуктивным. При частотах, превышающих частоту резонанса токов ω_2 , сопротивление приобретает емкостный характер.

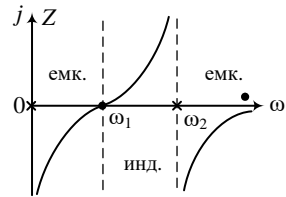


Рисунок 1.35

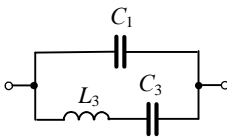


Рисунок 1.36

Еще одна схема реактивного двухполюсника с одной катушкой и двумя конденсаторами приведена на рисунке 1.36. Она состоит из параллельно соединенных ветви с емкостью C_1 и ветви с последовательно соединенными индуктивностью L_3 и емкостью C_3 . Найдем входную проводимость схемы:

$$\underline{Y}(j\omega) = j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} = j\omega C_1 + \frac{j\omega C_3}{1 - L_3 C_3 \omega^2} = \frac{j\omega(C_1 + C_3 - L_3 C_1 C_3 \omega^2)}{1 - L_3 C_3 \omega^2}.$$

Сопrotивление двухполюсника

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1 - L_3 C_3 \omega^2}{j\omega(C_1 + C_3 - L_3 C_1 C_3 \omega^2)}. \quad (1.41)$$

Найдем корни числителя и знаменателя этой функции сопротивления. Приравняв к нулю числитель, получим нуль функции:

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}.$$

При равенстве нулю знаменателя получаем два полюса: внешний при $\omega = 0$ и внутренний

$$\omega'' = \sqrt{\frac{C_1 + C_3}{L_3 C_1 C_3}}.$$

Очевидно, что $\omega'' > \omega'$, поэтому примем следующие обозначения:

$$\text{— частота резонанса напряжений } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}; \quad (1.42)$$

$$\text{— частота резонанса токов } \omega_2 = \sqrt{\frac{C_1 + C_3}{L_3 C_1 C_3}}. \quad (1.43)$$

Преобразуем формулу (1.41) с учетом соотношений (1.42) и (1.43):

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{L_3 C_3 \left(\frac{1}{L_3 C_3} - \omega^2 \right)}{j\omega L_3 C_1 C_3 \left(\frac{C_1 + C_3}{L_3 C_1 C_3} - \omega^2 \right)} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{C_1} \cdot \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}. \quad (1.44)$$

Из сопоставления формул (1.40) и (1.44) можно заключить, что они имеют одинаковую форму записи. Следовательно, частотная характеристика сопротивления, построенная согласно формуле (1.44), качественно будет такой же, как и частотная характеристика на рисунке 1.35. Если подобрать параметры элементов схем двухполюсников на рисунках 1.34 и 1.36 таким образом, что их частотные характеристики совпадут, то эти двухполюсники в электрическом смысле будут эквивалентными.

Условия эквивалентности этих реактивных двухполюсников получим в результате приравнивания друг другу выражений для сопротивлений (1.40) и (1.44), а также соответственно для резонансных частот (1.38), (1.39) и (1.42), (1.43):

$$\frac{C_0 + C_2}{C_0 C_2} = \frac{1}{C_1}; \quad L_2(C_0 + C_2) = L_3 C_3; \quad L_2 C_2 = \frac{L_3 C_1 C_3}{C_1 + C_3},$$

откуда

$$C_1 = \frac{C_0 C_2}{C_0 + C_2}; \quad C_3 = \frac{C_0^2}{C_0 + C_2}; \quad L_3 = \frac{L_2(C_0 + C_2)^2}{C_0^2};$$

$$C_0 = C_1 + C_3; \quad C_2 = \frac{C_1(C_1 + C_3)}{C_3}; \quad L_2 = \frac{L_3 C_3^2}{(C_1 + C_3)^2}.$$

1.5.4 Общие принципы записи выражения для сопротивления канонической схемы реактивного двухполюсника

Проанализировав рассмотренные выше частотные характеристики канонических схем реактивных двухполюсников и выражения для их комплексных сопротивлений, приходим к следующим выводам.

1 Общее число резонансов в схеме двухполюсника на единицу меньше числа реактивных элементов, из которых состоит схема. Это значит, что количество нулей и полюсов (без учета нулей и полюсов в начале координат и на бесконечности) равно числу резонансов. При этом следует иметь в виду, что каждый элемент эквивалентен любому сложному соединению однородных элементов.

2 Число индуктивностей в схеме равно числу емкостей или отличается на единицу.

3 Частоты резонансов напряжений и токов чередуются.

4 При возрастании частоты реактивное сопротивление $Z(j\omega)$ двухполюсника в точках непрерывности возрастает (с учетом знака реактивного сопротивления).

5 Выражения сопротивлений $Z(j\omega)$ двухполюсников в общем виде можно представить одной из форм:

$$Z(j\omega) = j\omega \cdot H \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (\omega_i^2 - \omega^2)}{\prod_{j=1}^n (\omega_j^2 - \omega^2)} \quad (1.45)$$

или

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot H \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (\omega_i^2 - \omega^2)}{\prod_{j=1}^n (\omega_j^2 - \omega^2)}, \quad (1.46)$$

где Π – знак произведения повторяющихся сомножителей;

m – число резонансов напряжений;

n – число резонансов токов;

ω_i – частоты резонансов напряжений;

ω_j – частоты резонансов токов.

Множитель $j\omega$ находится в числителе, если в схеме имеется путь для постоянного тока, в этом случае первым будет резонанс токов. Если в схеме нет пути для постоянного тока, но есть путь для тока бесконечно большой частоты, то множитель $j\omega$ находится в знаменателе, и первым будет резонанс напряжений. В канонической схеме не должно быть более одного пути как для постоянного тока, так и для тока бесконечно большой частоты.

Постоянная H имеет размерность индуктивности либо размерность, обратную емкости и определяется следующим образом. Для нахождения постоянной H нужно определить характер сопротивления двухполюсника на частоте, превышающей наибольшую резонансную. Если оно имеет индуктивный характер, то все емкости схемы следует заменить короткозамкнутыми участками, определить эквивалентную индуктивность оставшейся схемы и приравнять ее H ($H = L_{\text{эк}}$). При емкостном характере сопротивления в схеме двухполюсника нужно разомкнуть все ветви, содержащие индуктивности, и определить эквивалентную емкость полученной схемы, а затем H приравнять этой обратной эквивалентной емкости ($H = 1/C_{\text{эк}}$).

Числитель формулы сопротивления содержит также произведение разностей квадратов частот резонансов напряжений и текущей частоты, а знаменатель – произведение разностей квадратов частот резонансов токов и текущей частоты.

В зависимости от расположения внешних нулей и полюсов функции $\underline{Z}(j\omega)$, т. е. в зависимости от характера сопротивления реактивных двухполюсников при частотах $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$, различают 4 типа или класса частотных характеристик двухполюсников:

а) частотная характеристика с двумя внешними полюсами (обозначается $\infty - \infty$): при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление двухполюсника равно бесконечности, т. е. путь для постоянного тока и тока бесконечно высокой частоты отсутствует;

б) частотная характеристика с двумя внешними нулями (обозначается $0 - 0$): при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление двухполюсника равно нулю, т. е. имеется путь для постоянного тока и тока бесконечно высокой частоты;

в) частотная характеристика с внешним полюсом при $\omega = 0$ и внешним нулем при $\omega \rightarrow \infty$ (обозначается $\infty - 0$): отсутствует путь для постоянного тока, но имеется путь для тока бесконечно высокой частоты;

г) частотная характеристика с внешним нулем при $\omega = 0$ и внешним полюсом при $\omega \rightarrow \infty$ (обозначается $0 - \infty$): имеется путь для постоянного тока, отсутствует путь для тока бесконечно высокой частоты.

1.5.5 Четырехэлементные реактивные двухполюсники

Они состоят из двух индуктивностей и двух емкостей. Общее число возможных схем четырехэлементных реактивных двухполюсников равно восьми. Рассмотрим двухполюсники, представленные на рисунках 1.37 и 1.38. Каждый из двухполюсников имеет три резонансных частоты.

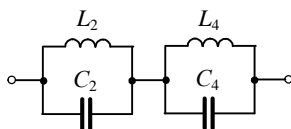


Рисунок 1.37

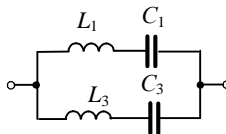


Рисунок 1.38

Схема на рисунке 1.37 представляет собой два последовательно соединенных параллельных резонансных контура: $L_2 - C_2$ и $L_4 - C_4$. В схеме есть путь для постоянного тока и путь для тока бесконечно большой частоты. Это соответствует нулевому значению сопротивления двухполюсника при частотах $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$. Частотная характеристика сопротивления двухполюсника приведена на рисунке 1.39 и соответствует типу $0 - 0$.

Анализ частотной характеристики показывает, что первым будет резонанс токов с частотой $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$, затем резонанс напряжений с частотой ω_3 , и последним наступит резонанс токов с

частотой $\omega_4 = \frac{1}{\sqrt{L_4 C_4}}$.

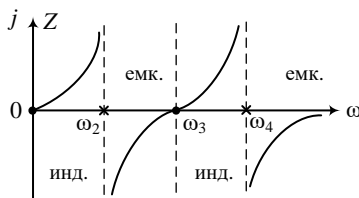


Рисунок 1.39

В выражении для сопротивления множитель $j\omega$ будет находиться в числителе. В соответствии с частотной характеристикой после последнего резонанса сопротивление двухполюсника имеет емкостный характер, и коэффициент H в формуле (1.45) будет $H = \frac{1}{C_{\text{эк}}} = \frac{C_2 + C_4}{C_2 C_4}$. Формулу для входного сопротивления рассматриваемой схемы двухполюсника можем записать в следующей форме:

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega \frac{C_2 + C_4}{C_2 C_4} \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2)}. \quad (1.47)$$

Значение резонансной частоты ω_3 найдем из выражения сопротивления двухполюсника:

$$\begin{aligned} \underline{Z}(j\omega) &= \frac{j\omega L_2 \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} + \frac{j\omega L_4 \frac{1}{j\omega C_4}}{j\omega L_4 + \frac{1}{j\omega C_4}} = \frac{j\omega L_2}{1 - L_2 C_2 \omega^2} + \frac{j\omega L_4}{1 - L_4 C_4 \omega^2} = \\ &= j\omega \left(\frac{L_2}{1 - L_2 C_2 \omega^2} + \frac{L_4}{1 - L_4 C_4 \omega^2} \right) = j\omega \frac{(L_2 + L_4) - L_2 L_4 (C_2 + C_4) \omega^2}{(1 - L_2 C_2 \omega^2)(1 - L_4 C_4 \omega^2)}. \end{aligned}$$

Ноль функции сопротивления соответствует частоте резонанса напряжений, значение которой найдем, приравняв к нулю числитель полученного выражения:

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{L_2 + L_4}{L_2 L_4 (C_2 + C_4)}}. \quad (1.48)$$

Формулу для резонансной частоты ω_3 можно найти другим способом. С этой целью входное сопротивление четырехполюсника запишем в виде суммы сопротивлений двухэлементных двухполюсников с учетом соотношения (1.21)

$$\underline{Z}(j\omega) = \underline{Z}_2(j\omega) + \underline{Z}_4(j\omega) = j\omega \frac{1}{C_2} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} + j\omega \frac{1}{C_4} \frac{1}{\omega_4^2 - \omega^2}. \quad (1.49)$$

Значения резонансных частот ω_2 и ω_4 определяются непосредственно элементами двухполюсника, как это было выполнено выше.

Частота резонанса напряжений $\omega = \omega_3$ находится из условия равенства нулю сопротивления двухполюсника, выраженного соотношением (1.49):

$$\frac{1}{C_2(\omega_2^2 - \omega_3^2)} + \frac{1}{C_4(\omega_4^2 - \omega_3^2)} = 0,$$

откуда
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{L_2 + L_4}{L_2 L_4 (C_2 + C_4)}}.$$

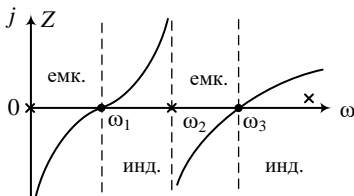


Рисунок 1.40

Двухполюсник на рисунке 1.38 не имеет пути ни для постоянного тока, ни для тока бесконечно большой частоты. Согласно частотной характеристике сопротивления, представленной на рисунке 1.40, он относится к классу $\infty - \infty$. В двухполюснике имеют место два резонанса напряжений, частоты которых

определяются непосредственно элементами схемы:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{и} \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}.$$

Частоту резонанса токов ω_2 предстоит определить.

После последнего резонанса сопротивление двухполюсника имеет индуктивный характер, следовательно, коэффициент H в формуле для сопротивления будет определяться параллельно соединенными индуктивностями схемы L_1 и L_3 :

$$H = L_{\text{жк}} = \frac{L_1 L_3}{L_1 + L_3}.$$

С учетом того, что множитель $j\omega$ стоит в знаменателе, общее выражение сопротивления двухполюсника имеет вид:

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \frac{L_1 L_3}{L_1 + L_3} \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{\omega_2^2 - \omega^2}.$$

Двухполюсник на рисунке 1.38 представляет собой параллельное соединение двух ветвей, входную проводимость которого с учетом соотношения (1.19) можно представить в виде суммы проводимостей ветвей:

$$\underline{Y}(j\omega) = \underline{Y}_1(j\omega) + \underline{Y}_3(j\omega) = j\omega \frac{1}{L_1} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + j\omega \frac{1}{L_3} \frac{1}{\omega_3^2 - \omega^2}.$$

Частоту резонанса токов $\omega = \omega_2$ можно найти из условия, что проводимость схемы при резонансе токов равна нулю. В этом случае схема исследуемого двухполюсника может рассматриваться в виде замкнутого контура с последовательным соединением элементов L_1 , L_3 , C_1 , C_3 , а ω_2 представляет собой частоту собственных колебаний этого контура.

Таким образом,

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_3) \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}}}. \quad (1.50)$$

1.6 Эквивалентные двухполюсники

Как уже отмечалось выше, два двухполюсника, имеющие разную структуру, эквивалентны в электрическом смысле, если их комплексные сопротивления или соответственно проводимости равны друг другу во всем спек-

тре частот. Замена в электрической цепи какого-то двухполосника другим эквивалентным ему двухполосником не изменит распределение токов в ветвях остальной части цепи.

Два двухполосника, имеющие качественно одинаковые частотные характеристики, т. е. одинаковые последовательности чередования нулей и полюсов, но отличающиеся друг от друга значениями коэффициента H в формуле для $\underline{Z}(j\omega)$ или значениями резонансных частот, называются *потенциально эквивалентными*. В таком случае их комплексные сопротивления являются неравными. При выполнении соответствующих условий двухполосники становятся эквивалентными.

Установим соотношения между параметрами элементов схем эквивалентных двухполосников любого типа, в том числе с потерями. В качестве примера рассмотрим на рисунке 1.41 трехэлементные канонические схемы Фостера и запишем выражения для сопротивлений этих схем.

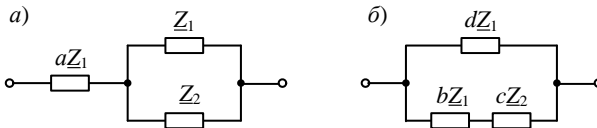


Рисунок 1.41

Для схемы на рисунке 1.41, а:

$$\underline{Z} = a\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{a\underline{Z}_1^2 + (a+1)\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \quad (1.51)$$

для схемы на рисунке 1.41, б):

$$\underline{Z} = \frac{d\underline{Z}_1(b\underline{Z}_1 + c\underline{Z}_2)}{(b+d)\underline{Z}_1 + c\underline{Z}_2} = \frac{\frac{bd}{c}\underline{Z}_1^2 + d\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\frac{b+d}{c}\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (1.52)$$

Выражения (1.51) и (1.52) равны друг другу во всем диапазоне частот при выполнении следующих условий:

$$\frac{bd}{c} = a; \quad d = a + 1; \quad \frac{b+d}{c} = 1$$

или

$$b = a(a+1); \quad c = (a+1)^2; \quad d = a+1.$$

Найдем условия эквивалентности схем двухполюсника, представленных на рисунке 1.42.

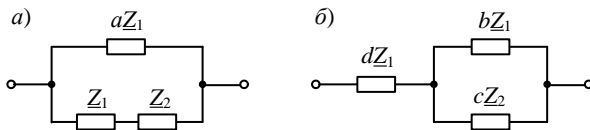


Рисунок 1.42

Комплексное сопротивление двухполюсника на рисунке 1.42, а:

$$\underline{Z} = \frac{a\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{(a+1)\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{a\underline{Z}_1^2 + a\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{(a+1)\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \quad (1.53)$$

а сопротивление двухполюсника на рисунке 1.42, б:

$$\underline{Z} = d\underline{Z}_1 + \frac{b\underline{Z}_1 c \underline{Z}_2}{b\underline{Z}_1 + c\underline{Z}_2} = \frac{bd\underline{Z}_1^2 + (b+d)\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\frac{b}{c}\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (1.54)$$

Сопоставляя выражения (1.53) и (1.54), получим соотношения:

$$\frac{bd}{c} = a; \quad b + d = a; \quad \frac{b}{c} = a + 1$$

или

$$b = \frac{a^2}{a+1}; \quad c = \left(\frac{a}{a+1}\right)^2; \quad d = \frac{a}{a+1}.$$

1.7 Обратные двухполюсники

Два двухполюсника называются *обратными*, если произведение их сопротивлений \underline{Z}_k и \underline{Z}'_k равно постоянной величине, не зависящей от частоты,:

$$\underline{Z}_k \underline{Z}'_k = k^2, \quad (1.55)$$

где k – коэффициент, имеющий размерность сопротивления.

Если два двухполюсника являются обратными, то они представляют собой *дуальные* цепи, сопротивления которых удовлетворяют условию (1.55).

Обратные двухполюсники характеризуются противоположными частотными характеристиками входных сопротивлений.

Условие дуальности заключается в том, что закон изменения токов в одной цепи подобен закону изменения напряжения в другой цепи.

Два элемента цепи считают дуальными, если уравнение, выражающее зависимость напряжения от тока одного элемента, имеет ту же структуру, что и уравнение, выражающее зависимость тока от напряжения другого элемента.

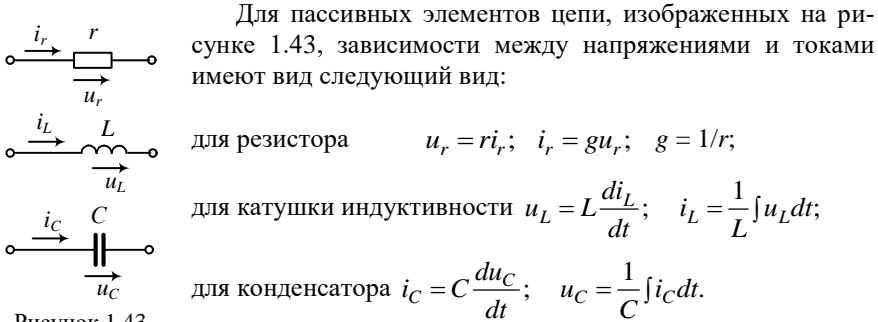


Рисунок 1.43

Из записанных соотношений следует, что сопротивление резистора r и его проводимость g будут дуальными. Индуктивный элемент L дуален емкостному C .

На рисунке 1.44, а приведена схема последовательного соединения элементов r, L, C , которая подключена к источнику синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$. На рисунке 1.44, б эти же элементы соединены параллельно и подключены к источнику синусоидального тока $j(t) = J_m \sin \omega t$.

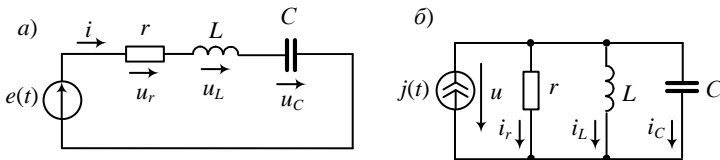


Рисунок 1.44

При последовательном соединении элементов уравнение равновесия записываем для мгновенных значений по второму закону Кирхгофа:

$$u_r + u_L + u_C = e(t).$$

Схема с параллельным соединением элементов описывается уравнением, составленным по первому закону Кирхгофа:

$$i_r + i_L + i_C = j(t).$$

При последовательном соединении элементов суммируются напряжения, а при параллельном – токи. Следовательно, последовательному соединению

дуально параллельное соединение, и наоборот. Схемы на рисунке 1.44 являются дуальными.

Порядок построения схем обратных двухполюсников:

1 В схеме исходного двухполюсника все элементы заменяются на дуальные, параметры которых находим по формуле (1.55).

Активное сопротивление r_k исходного четырехполюсника заменяется на сопротивление $r'_k = \frac{k^2}{r_k}$. Индуктивное сопротивление $Z_k = j\omega L_k$ заменяется

емкостным сопротивлением $Z'_k = \frac{1}{j\omega C'_k}$, т. е. индуктивность L_k заменяют

емкостью $C'_k = \frac{L_k}{k^2}$. В свою очередь, вместо емкостного сопротивления

$Z_k = \frac{1}{j\omega C_k}$ вводится индуктивное $Z'_k = j\omega L'_k$, и емкость C_k заменяют индуктивностью $L'_k = k^2 C_k$.

2 Все соединения в схеме исходного двухполюсника заменяют на дуальные: последовательные соединения заменяют параллельными, а параллельные – последовательными.

На рисунке 1.45 схема исходного двухполюсника (а) и соответствующая ей схема обратного двухполюсника (б).

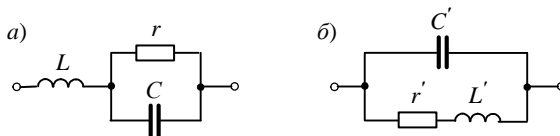


Рисунок 1.45

Значения параметров элементов схемы обратного двухполюсника определяем по формулам:

$$r' = \frac{k^2}{r}; \quad C' = \frac{L}{k^2}; \quad L' = k^2 C.$$

1.8 Условия физической реализуемости двухполюсников

Каждая линейная электрическая цепь реагирует определенным образом на внешнее воздействие. Если рассматривается задача анализа электрической цепи, то в этом случае имеем всегда единственное решение. Задачи синтеза цепи противоположны задачам анализа. Они имеют неоднозначные решения, потому что различные по структуре и типу элементов цепи могут обладать одинаковыми характеристиками. Поэтому решение задачи синтеза, если оно существует, может быть не единственным. В некоторых случаях

бывает невозможной реализация цепи с заданными свойствами, т. е. не всегда по заданной характеристике можно построить цепь. В таких случаях считают, что электрическая цепь с заданной характеристикой физически не реализуема.

Если цепь с заданной характеристикой может быть построена из отдельных идеализированных элементов, то такая характеристика цепи является физически реализуемой. Синтез линейных цепей чаще всего выполняется по их заданным частотным характеристикам.

Как отмечалось выше, операторные характеристики линейных электрических цепей, например, входные операторные сопротивления $Z(p)$ и проводимости $Y(p)$ двухполюсников, представляются дробно-рациональной функцией переменной $p = \delta + j\omega$ с вещественными коэффициентами, т. е. отношениями двух полиномов:

$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)} = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Под физической реализуемостью характеристики цепи следует понимать проблему: всякая ли рациональная функция с вещественными коэффициентами физически реализуема в качестве операторной характеристики линейной цепи. В математике рассмотрение этого вопроса показывает, что необходимое и достаточное условие физической реализуемости рациональной функции $Z(p)$ в качестве операторной входной функции $Z(p)$ линейной пассивной цепи заключается в том, чтобы $Z(p)$ являлась *положительной вещественной функцией* комплексной частоты p .

Положительной вещественной функцией (ПВФ) комплексного переменного p называется функция $Z(p)$, действительная часть которой неотрицательна при неотрицательных значениях действительной части p :

$$\operatorname{Re} Z(p) \geq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p \geq 0,$$

а мнимая часть равна нулю при мнимой части p , равной нулю:

$$\operatorname{Im} Z(p) = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} p = 0.$$

Из приведенных соотношений и на основе ранее рассмотренных свойств различного вида двухполюсников вытекают следующие условия, необходимые и достаточные для того, чтобы заданная рациональная функция комплексного переменного $Z(p)$ являлась положительной вещественной функцией p :

1) все коэффициенты a_k и b_k полиномов $M(p)$ и $N(p)$ должны быть вещественны и неотрицательны;

2) наибольшие и соответственно наименьшие степени полиномов $M(p)$ и $N(p)$ не могут отличаться более чем на единицу;

3) нули и полюсы функции $Z(p)$ не могут располагаться в правой комплексной полуплоскости;

4) нули и полюсы функции $Z(p)$, расположенные на мнимой оси, должны быть только простыми (не кратными), причем производные функции $Z(p)$ в нулях и вычеты функции в полюсах должны быть вещественны и положительны;

5) вещественная часть функции $Z(p)$ должна быть неотрицательной на мнимой оси: $\operatorname{Re} Z(p) \geq 0$ при $\operatorname{Re} p \geq 0$;

Перечисленные условия могут рассматриваться как критерии физической реализуемости функции $Z(p)$ в качестве операторной входной характеристики линейной пассивной цепи.

При исследовании реактивных двухполюсников, которые можно рассматривать в качестве частного случая линейных пассивных электрических цепей, к критериям физической реализуемости функции $Z(p)$ необходимо добавить дополнительное условие: *полином $M(p)$ должен быть четным, а полином $N(p)$ – нечетным, либо наоборот.*

Функция, обладающая такими свойствами, называется *реактансной*. Она обладает всеми свойствами положительных вещественных функций, но имеет некоторые особенности:

1) нули и полюсы ее расположены только на мнимой оси;

2) нули и полюсы чередуются, причем как в начале координат ($p = 0$), так и на бесконечности ($p = \pm\infty$) обязательно находится нуль или полюс;

3) значения реактансной функции на мнимой оси являются чисто мнимыми и растут с ростом частоты ω в точках непрерывности.

1.9 Реализация реактивных двухполюсников

По заданной частотной характеристике или реактансной функции двухполюсник можно реализовать любой из четырех канонических схем.

Рассмотрим реализацию канонических схем реактивных двухполюсников по Фостеру. Как отмечалось ранее, реактансная функция $Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$

может быть реализована в качестве операторного входного сопротивления линейной пассивной цепи и в соответствии с формулой (1.16) представлена в виде суммы простейших функций:

$$Z(p) = A_{\infty} p + \frac{A_0}{p} + \sum_{k=1}^n \frac{2A_k p}{p^2 + \omega_k^2}, \quad (1.56)$$

где A_∞, A_0, A_k – постоянные действительные положительные коэффициенты. Они определяются следующим образом.

A_∞ – вычет в полюсе $p = \infty$:

$$A_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p} \text{ при } p \rightarrow \infty;$$

A_0 – вычет функции $Z(p)$ в полюсе $p = 0$:

$$A_0 = \text{Res}Z(p)|_{p=0} = \left[\frac{M(p)}{dN(p)/dp} \right]_{p=0};$$

A_k – вычеты функции $Z(p)$ в полюсах $p = \pm j\omega_k$:

$$A_k = \text{Res}Z(p)|_{p=\pm j\omega_k} = \left[\frac{M(p)}{dN(p)/dp} \right]_{p=\pm j\omega_k}.$$

Первый член разложения (1.56) можно рассматривать в качестве операторного сопротивления индуктивности

$$L_\infty = A_\infty, \quad (1.57)$$

второй член – как операторное сопротивление емкости

$$C_0 = 1/A_0, \quad (1.58)$$

а каждое из слагаемых вида $Z(p) = \frac{2A_k p}{p^2 + \omega_k^2}$ – как операторное сопротивление

параллельной LC -цепи, составленной из элементов

$$L_k = \frac{1}{2A_k}; \quad C_k = \frac{2A_k}{\omega_k^2}. \quad (1.59)$$

При анализе различных видов реактансных функций $Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ приходят к заключению, что реактивный двухполюсник, реализующий заданную функцию по первой канонической схеме Фостера, будет содержать индуктивность L_∞ только в том случае, если степень полинома $M(p)$ превышает на единицу степень полинома $N(p)$, и емкость C_0 только тогда, в многочлене $N(p)$ множитель p может быть вынесен за скобки.

Аналогичным образом реализуется и вторая каноническая схема Фостера, когда реактансная функция задается в виде операторной входной прово-

димости $Y(p)$ линейной пассивной цепи и может быть разложена согласно выражению (1.23) на простые дроби:

$$Y(p) = A_\infty p + \frac{A_0}{p} + \sum_{k=1}^n \frac{2A_k p}{p^2 + \omega_k^2}, \quad (1.60)$$

где $A_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p}$ при $p \rightarrow \infty$;

$$A_0 = \text{Res}Y(p)|_{p=0};$$

$$A_k = \text{Res}Y(p)|_{p=\pm j\omega_k}.$$

Параметры элементов второй канонической схемы Фостера на рисунке 1.19 определяют по формулам: $C_\infty = A_\infty$; $L_0 = \frac{1}{A_0}$; $L_k = \frac{1}{2A_k}$; $C_k = \frac{2A_k}{\omega_k^2}$.

Емкость C_∞ присутствует в схеме двухполосника, если функция $Y(p)$ имеет полюс на бесконечности (степень числителя функции $Y(p)$ на единицу выше степени знаменателя), а индуктивность L_0 , если функция $Y(p)$ имеет полюс при $p = 0$.

1.10 Примеры решения задач

Пример 1.1 Двухполосник на рисунке 1.46 имеет следующие параметры: $L_1 = 30$ мГн, $L_2 = 10$ мГн, $C_3 = 1$ мкФ.

Требуется:

- 1) определить резонансные частоты двухполосника.
- 2) записать выражение для сопротивления в канонической форме.

Решение.

Двухполосник состоит из двух индуктивностей и одной емкости, поэтому число резонансных частот равно двум. Схема имеет прямой путь для постоянного тока, следовательно, первым будет резонанс токов на частоте ω_2 , а затем резонанс напряжений на частоте ω_3 . Множитель $j\omega$ в формуле сопротивления будет в числителе. Частотная характеристика сопротивления имеет внешний нуль при $\omega = 0$ и внешний полюс при $\omega \rightarrow \infty$. Качественно частотная характеристика представлена на рисунке 1.47. Сопротивление двухполосника на частоте, превышающей наибольшую резонансную, имеет индуктивный характер. В таком случае параметр N в формуле сопротивления

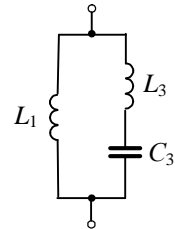


Рисунок 1.46

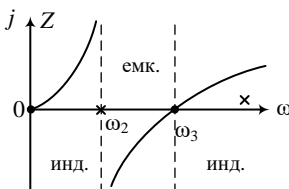


Рисунок 1.47

$$H = L_{\text{эк}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Формула входного сопротивления двухполосника в канонической форме

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega \cdot H \cdot \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}.$$

Для определения резонансных частот найдем комплексное сопротивление схемы

$$\begin{aligned} \underline{Z}(j\omega) &= \frac{j\omega L_1 \left(j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)}{j\omega L_1 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} = \frac{j\omega L_1 (1 - L_3 C_3 \omega^2)}{1 - (L_1 + L_3) C_3 \omega^2} = \\ &= j\omega \frac{L_1 L_3 \left(\frac{1}{L_3 C_3} - \omega^2 \right)}{(L_1 + L_3) \left[\frac{1}{(L_1 + L_3) C_3} - \omega^2 \right]} = j\omega \frac{L_1 L_3}{L_1 + L_3} \left(\frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \right). \end{aligned}$$

Определяем значения резонансных частот:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_3) C_3}} = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}} = 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Сопротивление двухполосника в канонической форме

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega \cdot 7,5 \cdot 10^3 \cdot \frac{10^8 - \omega^2}{25 \cdot 10^6 - \omega^2}.$$

Пример 1.2 На рисунке 1.48, а приведена схема реактивного двухполосника, элементы которого имеют следующие параметры: $L_1 = L_2 = 1 \text{ мГн}$, $L_3 = 2 \text{ мГн}$, $L_4 = 1 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$.

Требуется:

- 1) преобразовать схему, приведя ее к каноническому виду, и определить параметры ее элементов;
- 2) найти резонансные частоты;
- 3) записать формулу для входного сопротивления полученной схемы в канонической форме.

Решение.

Заданная на рисунке 1.48, а схема двухполосника не является канонической по следующим причинам:

- 1) число емкостей равно 4, в то время, как индуктивность одна;
- 2) имеется два пути для постоянного тока: один путь через L_1, L_2 , а второй – через L_3, L_4 .

По виду исходной схемы можно заключить, что входное сопротивление равно нулю при $\omega = 0$ (внешний нуль) и стремится к бесконечно большому значению при $\omega \rightarrow \infty$ (внешний полюс), т. к. отсутствует путь для тока бесконечно высокой частоты. При наличии одной емкости в канонической схеме могут быть две индуктивности. Такая схема может

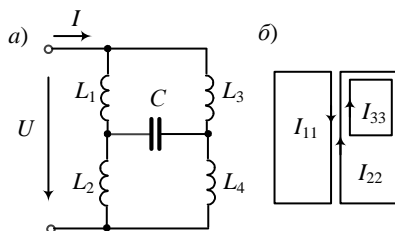


Рисунок 1.48

быть представлена первой схемой Фостера на рисунке 1.49. Качественно эта схема двухполюсника будет иметь такую же частотную характеристику, как и схема на рисунке 1.47. Следовательно, двухполюсники на рисунках 1.46 и 1.49 являются потенциально эквивалентными.

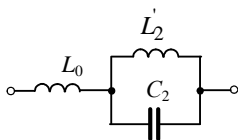


Рисунок 1.49

Для получения формулы входного сопротивления схемы не будем использовать традиционные пути эквивалентных преобразований, а поступим следующим образом. Запишем выражение для входного

сопротивления исходной схемы по закону Ома, предварительно выразив входной ток I по заданному напряжению U . С этой целью воспользуемся методом контурных токов, выбрав независимые контуры и контурные токи в них на рисунке 1.48, б. Расчет проведем для операторных величин.

Запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} (L_1 + L_2)pI_{11}(p) - (L_1 + L_2)pI_{22}(p) - L_1pI_{33}(p) &= U(p); \\ -(L_1 + L_2)pI_{11}(p) + (L_1 + L_2 + L_4 + L_3)pI_{22}(p) + (L_1 + L_3)pI_{33}(p) &= 0; \\ -L_1pI_{11}(p) + (L_1 + L_2)pI_{22}(p) + \left[(L_1 + L_3)p + \frac{1}{Cp} \right] I_{33}(p) &= 0. \end{aligned}$$

Подставим числовые значения в уравнения:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10^{-3} pI_{11}(p) - 3 \cdot 10^{-3} pI_{22}(p) - 2 \cdot 10^{-3} pI_{33}(p) &= U(p); \\ -3 \cdot 10^{-3} pI_{11}(p) + 5 \cdot 10^{-3} pI_{22}(p) + 3 \cdot 10^{-3} pI_{33}(p) &= 0; \end{aligned}$$

$$-2 \cdot 10^{-3} p I_{11}(p) + 3 \cdot 10^{-3} p I_{22}(p) + \left(3 \cdot 10^{-3} p + \frac{10^6}{p} \right) I_{33}(p) = 0.$$

Разделив левые и правые части системы уравнений на $10^{-3} p$, получим:

$$3I_{11}(p) - 3I_{22}(p) - 2I_{33}(p) = 10^3 \frac{U(p)}{p};$$

$$-3I_{11}(p) + 5I_{22}(p) + 3I_{33}(p) = 0;$$

$$-2I_{11}(p) + 3I_{22}(p) + \frac{3p^2 + 10^9}{p^2} I_{33}(p) = 0.$$

Решим систему уравнений методом Крамера и выразим входной ток $I(p)$ через напряжение $U(p)$.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & \frac{3p^2 + 10^9}{p^2} \end{bmatrix} = \frac{7p^2 + 6 \cdot 10^9}{p^2};$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 10^3 \frac{U(p)}{p} & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & \frac{3p^2 + 10^9}{p^2} \end{bmatrix} = 10^3 \cdot \frac{U(p)}{p} \cdot \frac{6p^2 + 5 \cdot 10^9}{p^2}.$$

Находим входной ток:

$$I(p) = I_{11}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 10^3 \cdot \frac{U(p)}{p} \cdot \frac{6p^2 + 5 \cdot 10^9}{p^2} \cdot \frac{p^2}{7p^2 + 6 \cdot 10^9}.$$

Получим выражение для входного операторного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = p \cdot 10^{-3} \cdot \frac{7p^2 + 6 \cdot 10^9}{6p^2 + 5 \cdot 10^9} = p \cdot 1,167 \cdot 10^{-3} \frac{0,857 \cdot 10^9 + p^2}{0,833 \cdot 10^9 + p^2}.$$

Заменив в полученном выражении оператор p на оператор $j\omega$, получим выражение для функции входного сопротивления:

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega \cdot 1,167 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0,857 \cdot 10^9 - \omega^2}{0,833 \cdot 10^9 - \omega^2}.$$

Этому выражению соответствует формула в общем виде для входного сопротивления двухполосника на рисунке 1.49:

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega \cdot H \cdot \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}.$$

Сопоставляя последние выражения, находим значения резонансных частот и параметра H :

$$\text{частота резонанса токов } \omega_2 = \sqrt{0,857 \cdot 10^9} = 29274,6 \text{ с}^{-1};$$

$$\text{частота резонанса напряжений } \omega_3 = \sqrt{0,833 \cdot 10^9} = 28861,7 \text{ с}^{-1}.$$

Параметр H в выражениях для входного сопротивления двухполосников на рисунках 1.48, а и 1.49 будет одинаков, т. к. они эквивалентны, и численно равен $1,167 \cdot 10^{-3}$. Для схемы на рисунке 1.48, а

$$H = L_{\text{эк}} = \frac{L_1 L_3}{L_1 + L_3} + \frac{L_2 L_4}{L_2 + L_4} = 1,167 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Для схемы на рисунке 1.49

$$H = L_0 = 1,167 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.} \quad (1.61)$$

Выразим резонансные частоты через элементы схемы 1.49.

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (1.62)$$

Для определения резонансной частоты приравняем к нулю входное сопротивление трехэлементного двухполосника, представив его в виде последовательно соединенных одно- и двухэлементной схем:

$$\underline{Z}(j\omega) = \underline{Z}_0(j\omega) + \underline{Z}_2(j\omega) = j\omega L_0 + j\omega \frac{1}{C_2} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_3^2} = 0,$$

откуда находим

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{L_0 + L_2'}{L_0 L_2 C_2}}. \quad (1.63)$$

Зная значения L_0 , ω_2 , ω_3 и решая уравнения (1.62), (1.63), найдем

$$L_2' = \left[\left(\frac{\omega_3}{\omega_2} \right)^2 - 1 \right] L_0 = 0,0336 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{1}{\omega_2^2 L_2'} = 35,73 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$$

Пример 1.3 Определить, является ли функция $Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{p^3 + 2p}{p^2 + 1}$

физически реализуемой в качестве операторного входного сопротивления двухполюсника.

Решение. Непосредственно по виду функции констатируем:

1) все коэффициенты полиномов $M(p)$ и $N(p)$ вещественны и положительны;

2) полином числителя имеет степень $m = 3$, которая отличается на единицу от степени полинома знаменателя ($n = 2$).

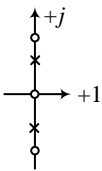


Рисунок 1.50

Нули полинома $M(p)$ $p_0 = 0$; $p_1 = j\sqrt{2}$; $p_3 = -j\sqrt{2}$ и полюсы полинома $N(p)$ $p_2 = j$; $p_4 = -j$ являются простыми, располагаются на мнимой оси и чередуются (рисунок 1.50).

Найдем производные функции в нулях:

$$\left. \frac{dZ(p)}{dp} \right|_{p=0} = \left. \frac{p^4 - p^2 + 2}{(p^2 + 1)^2} \right|_{p=0} = 2;$$

$$\left. \frac{dZ(p)}{dp} \right|_{p=\pm j\sqrt{2}} = \left. \frac{p^4 - p^2 + 2}{(p^2 + 1)^2} \right|_{p=\pm j\sqrt{2}} = 4.$$

Вычеты функции в полюсах:

$$\text{Res}Z(p) \Big|_{p=\pm j} = \left. \frac{p^2 + 2}{2} \right|_{p=\pm j} = 1/2.$$

Производные функции в нулях и вычеты функции в полюсах вещественны и положительны.

Вещественная часть функции на мнимой оси

$$\text{Re}Z(p) \Big|_{p=j\omega} = \text{Re} \frac{j\omega(2 - \omega^2)}{1 - \omega^2} = 0.$$

Таким образом, исследуемая функция $Z(p)$ является физически реализуемой в качестве операторного сопротивления двухполюсника. При этом схема двухполюсника будет чисто реактивной.

Пример 1.4 Для заданной функции входного сопротивления в операторной форме

$$Z(p) = \frac{(p^2 + 4)(p^2 + 25)}{p(p^2 + 9)} = \frac{p^4 + 29p + 100}{p^3 + 9p}$$

построить первую схему двухполюсника по Фостеру и определить параметры элементов.

Решение. Выделим первый элемент схемы путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{r} p^4 + 29p + 100 \\ - p^4 + 9p \\ \hline 20p^2 + 100 \end{array} \left| \begin{array}{l} p^3 + 9p \\ p \end{array} \right.$$

Получим
$$Z(p) = p + \frac{20p^2 + 100}{p(p^2 + 9)} = p + Z'(p).$$

Первый элемент представляет собой операторное сопротивление индуктивности $L_\infty = 1$ Гн.

Методом неопределенных коэффициентов разложим сопротивление $Z'(p)$ на простые дроби:

$$Z'(p) = \frac{20p^2 + 100}{p(p^2 + 9)} = \frac{20p^2 + 100}{p(p - p_2)(p - p_4)},$$

где $p_2 = j3$; $p_4 = -j3$.

$$\frac{20p^2 + 100}{p(p - p_2)(p - p_4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - j3} + \frac{C}{p + j3} = \frac{(A + B + C)p^2 + 9A + (B - C)j3p}{p(p^2 + 9)}.$$

Получим уравнения для определения коэффициентов A, B и C :

$$A + B + C = 20; \quad 9A = 100; \quad B - C = 0,$$

откуда $A = \frac{100}{9}$; $B = C = \frac{40}{9}$.

В результате разложения получим сопротивление

$$Z'(p) = \frac{100}{9p} + \frac{80/9}{p_2 + 9}.$$

Слагаемое $\frac{100}{9p}$ соответствует операторному сопротивлению емкости

$C_0 = \frac{9}{100}$ Ф. Слагаемому $\frac{80/9}{p^2 + 9}$ согласно формуле (1.16) соответствует

сопротивление параллельного колебательного контура:

$$\frac{80/9}{p^2 + 9} = \frac{1/C_2}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}}.$$

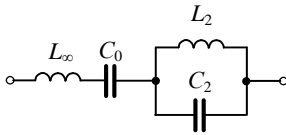


Рисунок 1.51

Находим значения параметров элементов контура:

$$C_2 = \frac{9}{80} \text{ Ф}; L_2 = \frac{1}{4C_2} = \frac{20}{9} \text{ Гн}.$$

Каноническая схема двухполюсника Фостера приведена на рисунке 1.51.

Пример 1.5 На рисунке 1.52 дана вторая каноническая схема двухполюсника Фостера с параметрами: $L_1 = 15$ мГн, $C_1 = 0,08$ мкФ, $L_3 = 8$ мГн, $C_3 = 0,05$ мкФ. Требуется:

- 1) определить класс двухполюсника;
- 2) найти резонансные частоты двухполюсника;
- 3) построить первую каноническую схему Кауэра, эквивалентную исходной.

Решение. Сопротивление двухполюсника при частотах $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ стремится к бесконечно большому значению, следовательно, двухполюсник относится к классу $\infty - \infty$ и имеет частотную характеристику входного сопротивления, приведенную на рисунке 1.40.

Схема состоит из двух параллельно соединенных последовательных колебательных контуров, в которых имеют место два резонанса напряжений на частотах

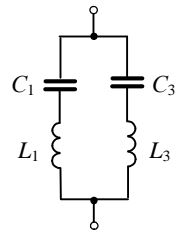


Рисунок 1.52

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 28867,5 \text{ с}^{-1} \text{ и } \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}} = 5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Принимая во внимание тот факт, что при резонансе токов на частоте ω_2 сопротивление двухполюсника бесконечно велико, схема двухполюсника в этом случае будет представлять собой контур с последовательным соединением элементов L_1, L_2, C_1, C_2 , собственная частота колебаний которого

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_3) \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}}} = 37590,5 \text{ с}^{-1}.$$

Найдем операторную проводимость двухполюсника:

$$\begin{aligned} Y(p) = Y_1(p) + Y_3(p) &= \frac{1}{L_1 p + \frac{1}{C_1 p}} + \frac{1}{L_3 p + \frac{1}{C_3 p}} = \\ &= \frac{(L_1 + L_3) C_1 C_3 p^3 + (C_1 + C_3) p}{L_1 C_1 L_3 C_3 p^4 + (L_1 C_1 + L_3 C_3) p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Операторное сопротивление

$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)} = \frac{L_1 C_1 L_3 C_3 p^4 + (L_1 C_1 + L_3 C_3) p^2 + 1}{(L_1 + L_3) C_1 C_3 p^3 + (C_1 + C_3) p}.$$

Подставив числовые значения параметров элементов, получим:

$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)} = \frac{0,48 \cdot 10^{-18} p^4 + 1,6 \cdot 10^{-9} p^2 + 1}{9,2 \cdot 10^{-17} p^3 + 0,13 \cdot 10^{-6} p}.$$

Найдем схему Кауэра, реализующую полученное выше сопротивление, путем разложения функции $Z(p)$ в цепную дробь:

$$\begin{array}{r}
\frac{0,48 \cdot 10^{-18} p^4 + 1,6 \cdot 10^{-9} p^2 + 1}{0,48 \cdot 10^{-18} p^4 + 0,678 \cdot 10^{-9} p^2} \left| \frac{9,2 \cdot 10^{-17} p^3 + 0,13 \cdot 10^{-6} p}{0,052 \cdot 10^{-1} p} = Z_1(p) \right. \\
\frac{9,2 \cdot 10^{-17} p^3 + 0,13 \cdot 10^{-6} p}{9,2 \cdot 10^{-17} p^3 + 0,1 \cdot 10^{-6} p} \left| \frac{0,92 \cdot 10^{-9} p^2 + 1}{10 \cdot 10^{-8} p} = Y_2(p) \right. \\
\frac{0,92 \cdot 10^{-9} p^2 + 1}{0,92 \cdot 10^{-9} p^2} \left| \frac{0,03 \cdot 10^{-6} p}{30,67 \cdot 10^{-3} p} = Z_3(p) \right. \\
\frac{0,03 \cdot 10^{-6} p}{0,03 \cdot 10^{-6} p} \left| \frac{1}{0,03 \cdot 10^{-6} p} = Y_4(p) \right. \\
0
\end{array}$$

Используя полученные результаты, строим первую каноническую схему Кауэра (рисунок 1.53) и определяем ее параметры:

$$L_1 = 5,2 \text{ мГн}; L_3 = 30,67 \text{ мГн}; \\ C_2 = 0,1 \text{ мкФ}; C_4 = 0,03 \text{ мкФ}.$$

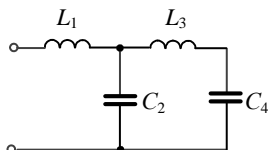


Рисунок 1.53

Пример 1.6 Для двухполосника на рисунке 1.54 известны резонансные частоты $\omega_1 = 4080 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_2 = 7070 \text{ с}^{-1}$. Определить параметры элементов двухполосника, если на частоте $\omega' = 3200 \text{ с}^{-1}$ модуль его сопротивления равен 510 Ом.

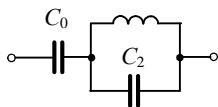


Рисунок 1.54

Решение. На рисунке 1.55 приведена качественная частотная характеристика сопротивления двухполосника. Из нее следует, что двухполосник относится к классу $\infty - 0$, имеет первым резонанс напряжений, а затем резонанс токов. При частотах, превышающих ω_2 , сопротивление двухполосника имеет емкостный характер.

характер.

Входное сопротивление двухполосника

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} H \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}.$$

В формуле коэффициент

$$H = \frac{1}{C_3} = \frac{C_0 + C_2}{C_0 C_2}. \quad (1.64)$$

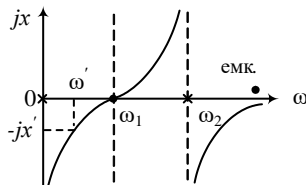


Рисунок 1.55

Из рисунка 1.55 также следует, что при частоте ω' сопротивление двухполюсника имеет емкостный характер и равно $\underline{Z} = -jx' = -j510$ Ом.

Из формулы для входного сопротивления двухполюсника при заданных значениях частот ω' , ω_1 и ω_2 найдем значение параметра H :

$$H = \frac{x' \omega' [\omega_2^2 - (\omega')^2]}{\omega_1^2 - (\omega')^2} = \frac{510 \cdot 3200(7070^2 - 3200^2)}{4080^2 - 3200^2} = 10124824,68.$$

Запишем формулы для резонансных частот. В параллельном колебательном контуре частота резонанса токов

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (1.65)$$

При резонансе напряжений входное сопротивление двухполюсника равно нулю. Следовательно, в схеме на рисунке 1.54 внешние клеммы можно переключить. В таком случае получаем, что параллельно соединенные емкости C_0 и C_2 включаются последовательно с индуктивностью L_2 . Таким образом, будет иметь место свободный колебательный процесс с частотой

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_2(C_0 + C_2)}}. \quad (1.66)$$

Решая уравнения (1.64)–(1.66) находим значения параметров схемы двухполюсника: $C_0 = 0,296 \cdot 10^{-6}$ Ф; $C_2 = 0,148 \cdot 10^{-6}$ Ф; $L_2 = 0,135$ Гн.

2 ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

2.1 Общая характеристика однородных линий

Электромагнитные процессы в электрической цепи, состоящей из пассивных элементов (резисторов, катушек индуктивности и конденсаторов) и находящейся под действием гармонического источника, описываются в предположении, что эти элементы имеют незначительные геометрические размеры, т. е. фактически располагаются в различных точках цепи и харак-

теризуются следующими параметрами: сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C . Компонентные уравнения для них, устанавливающие соотношения между током и напряжением каждого элемента

$$u_r = r i; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_C = C \frac{du_C}{dt},$$

записываются, исходя из условия, что ток, входящий в каждый элемент, равен току, выходящему из него.

При исследовании таких цепей считают, что электрическое и магнитное поля сосредоточены только на отдельных участках цепи, т. е. в конденсаторах и катушках индуктивности соответственно, а необратимое преобразование электрической энергии в тепловую имеет место только в резисторах. Такие допущения успешно применяются для *цепей с сосредоточенными параметрами*.

Однако при исследовании электромагнитных процессов часто встречаются с такими электрическими цепями, в которых электрическое и магнитное поля, а также потери энергии распределяются непрерывно вдоль всех участков цепи. Такие цепи называют *цепями с распределенными параметрами*. Примером таких цепей могут служить линии передачи.

По таким линиям передается энергия от источников (электрических станций и подстанций) к потребителям электрической энергии: различного рода населенным пунктам, промышленным и сельскохозяйственным предприятиям, транспортным и строительным комплексам и другим объектам. Передача энергии в этом случае осуществляется переменным током промышленной частоты либо постоянным током.

Линии и каналы связи используются также для передачи информации при помощи электрических сигналов различных частот, в том числе сигналов сверхвысокой частоты.

Длинные линии, используемые в качестве линий связи, фидеры и элементы радиотехнических устройств могут иметь различные конструкции. Поперечные сечения основных типов линий приведены на рисунке 2.1.

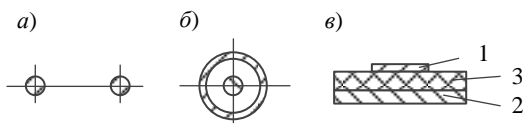


Рисунок 2.1

Воздушная двухпроводная линия (см. рисунок 2.1, а) образована двумя параллельными цилиндрическими проводами, материалом которых служит, как правило, медь. Коаксиальная линия (см. рисунок 2.1, б) состоит из

сплошного цилиндрического медного проводника и внешнего экрана, выполненного также из меди. Пространство между проводниками заполнено диэлектриком, в качестве которого используют полиэтилен или фторопласт. Коаксиальные кабели используются при частотах, превышающих 60 кГц. Микрополосковая линия (см. рисунок 2.1, в) образована двумя металлическими полосками 1 и 2, разделенными слоем диэлектрика 3. Диэлектриком чаще всего служит двуокись алюминия. Такие линии применяются для передачи сигналов сверхвысоких частот.

В цепях с распределенными параметрами при гармонических или импульсных воздействиях имеют место электромагнитные волновые процессы, поэтому напряжения и токи в них изменяются как во времени, так и в пространстве. Электромагнитные волны распространяются по линиям с определенной скоростью и характеризуются длиной волны λ , которая зависит от частоты. Поэтому при анализе электрических цепей необходимо сопоставлять геометрические размеры исследуемых электротехнических устройств с длиной электромагнитных волн, проходящих по ним.

Для энергетических линий электропередачи промышленной частоты длина электромагнитной волны λ несоизмеримо велика по сравнению с размерами используемых в системах электроснабжения электротехнических устройств. Поэтому в таких случаях электрические цепи можно рассматривать как цепи с сосредоточенными параметрами.

В линиях связи, фидерах, коаксиальных кабелях, волноводах, предназначенных для передачи высокочастотных сигналов, и радиотехнических цепях размеры некоторых устройств могут превышать длину электромагнитных волн. В этих случаях цепи будут представлять собой цепи с распределенными параметрами.

Рассматривая какой-либо участок некоторой длины такой линии, можно констатировать, что ток на входе участка будет отличаться от тока на его выходе. Это связано с токами смещения, которые обусловлены емкостью между проводниками линии, и токами утечки через изоляцию из-за ее несовершенства. При протекании тока по проводам линии в них имеют место тепловые потери, которые обуславливают продольную составляющую активного сопротивления, а несовершенство изоляции – поперечную активную проводимость цепи.

Прохождение тока по участку создает магнитный поток, который сцепляется с контуром тока и определяет индуктивность цепи. Следует также учитывать емкость между проводами самой линии и проводами других линий, расположенных вблизи, а также емкость проводов относительно земли.

Таким образом, линию можно представить как цепь с распределенными по ее длине элементами, каждый из которых отражает разные стороны электромагнитных процессов, происходящих в ней. Распределенный характер элементов приводит к тому, что напряжения и токи в различных точках ли-

нии будут зависеть как от времени, так и от одной пространственной координаты. Если полагать, что активное сопротивление, активная проводимость, индуктивность и емкость равномерно распределены вдоль всей длины линии, то такую линию называют *однородной*. Электрические параметры, отнесенные к единице длины линии, называют *первичными параметрами* и обозначают r_0 , g_0 , L_0 и C_0 . Первичные параметры зависят от конструкции линии и от частоты.

2.2 Уравнения однородной двухпроводной линии

На рисунке 2.2 представлена однородная линия длиной l . Начало линии обозначено первичными зажимами 1 – 1', а конец – вторичными зажимами 2 – 2'. Линия имеет два провода: верхний (*прямой*) и нижний (*обратный*).

Положение отдельных точек на линии будем характеризовать пространственной координатой x , отсчитываемой от начала линии. К первичным зажимам подключается источник $e(t)$, а к вторичным – нагрузка Z_2 .

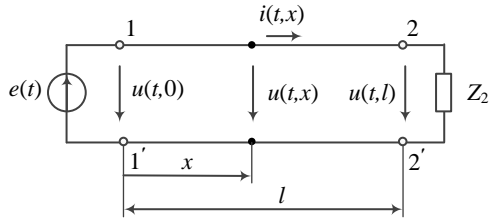


Рисунок 2.2

На рисунке 2.2 обозначены следующие величины:

- $u(t,0)$ – мгновенное напряжение в начале линии;
- $u(t,l)$ – мгновенное напряжение в конце линии;
- $u(t,x)$ – мгновенное напряжение в точке с координатой x ;
- $i(t,x)$ – мгновенный ток в точке с координатой x .

Мгновенные напряжение и ток в любой точке линии являются функциями двух независимых переменных, времени t и пространственной координаты x . На рисунке 2.3 выделен элемент линии бесконечно малой длины dx , расположенный на расстоянии x от начала линии, и имеющий следующие параметры: $r_0 dx$, $L_0 dx$, $g_0 dx$, $C_0 dx$. Таким образом, длинную линию можно представить в виде каскадного соединения бесконечного множества одинаковых Г-образных четырехполюсников. Выделенный элемент длиной линии представляется в виде схемы с сосредоточенными параметрами, а для анализа схемы можно применить законы Кирхгофа.

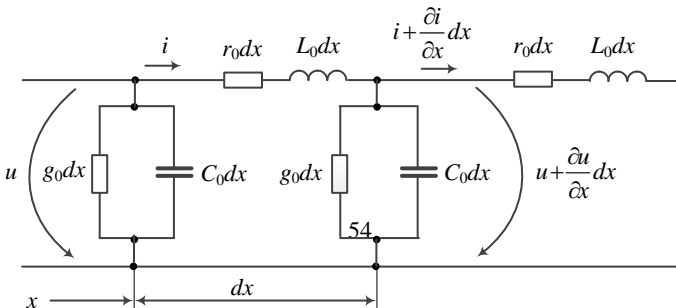


Рисунок 2.3

Мгновенные значения тока и напряжения в начале выбранного элемента обозначим через i и u , а в начале следующего – соответственно через

$$i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \quad \text{и} \quad u + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Составим уравнения в соответствии с законами Кирхгофа:

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = r_0 i dx + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} dx;$$

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = g_0 dx \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right).$$

Сокращая левые и правые части уравнений на dx и пренебрегая величинами второго порядка малости, получаем дифференциальные уравнения:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \tag{2.1}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Эти уравнения были получены английским ученым В. Томсоном, который изучал электромагнитные процессы в трансконтинентальных кабельных линиях телеграфной связи, и их называют *телеграфными уравнениями*.

2.3 Установившийся режим в однородной линии

Рассмотрим однородную двухпроводную линию, к входным зажимам которой подключен источник синусоидального напряжения. В установившемся режиме в любой точке линии ток и напряжение будут изменяться синусоидально. Для анализа режима линии применим метод комплексных амплитуд. Комплексные действующие значения напряжения и тока на расстоянии x от начала линии обозначим $\underline{U}(x)$ и $\underline{I}(x)$. Запишем телеграфные уравнения (2.1) и (2.2), заменив в них мгновенные значения напряжения и тока их изображениями в комплексной форме.

Пусть $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, тогда комплекс мгновенного напряжения

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j\psi u} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t},$$

где $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi u}$ – комплексная амплитуда напряжения, которая не зависит от времени t .

Производная комплекса мгновенного напряжения

$$\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \underline{U}_m \frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) = j\omega \underline{U}_m e^{j\omega t}.$$

Аналогичные соотношения получим для мгновенного синусоидального тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$:

$$i(t) = I_m e^{j\psi i} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t};$$

$$\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}.$$

Следовательно, действующие комплексные значения напряжения и тока, а также их производные по x , для любого фиксированного момента времени не зависят от переменной t .

С учетом того, что комплексы напряжения и тока зависят только от переменной x , частные производные заменим простыми, и телеграфные уравнения примут вид:

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = r_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} = (r_0 + j\omega L_0) \underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I}; \quad (2.3)$$

$$-\frac{d\underline{I}}{dx} = g_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} = (g_0 + j\omega C_0) \underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U}. \quad (2.4)$$

Следует иметь в виду, что величины

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0 \quad (2.5)$$

и

$$\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0, \quad (2.6)$$

соответственно *комплексное сопротивление* и *комплексная проводимость* единицы длины линии, не зависят друг от друга, а определяются только конструктивными особенностями линии.

Решим полученную систему уравнений (2.3) и (2.4). Продифференцировав по x уравнение (2.3) и подставив в него значение $\frac{d\underline{I}}{dx}$ из уравнения (2.4), получим:

$$-\frac{d\underline{U}^2}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{d\underline{I}}{dx} = -\underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{U},$$

откуда
$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{U} = 0.$$

Обозначим $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta.$ (2.7)

Получим однородное дифференциальное уравнение относительно комплексного напряжения \underline{U} :

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U} = 0, \quad (2.8)$$

которое называют уравнением Гельмгольца.

Комплексный параметр $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ называется *коэффициентом распространения волны*;

α – коэффициент ослабления, учитывающий потери в отрезке линии единичной длины;

β – коэффициент фазы, определяющий фазовый сдвиг на единице длины линии.

Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка запишем в виде суммы двух экспоненциальных функций:

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}, \quad (2.9)$$

где $\underline{U}(x)$ – комплексное напряжение в линии на расстоянии x от ее начала;

$p_1 = -\underline{\gamma}$ и $p_2 = \underline{\gamma}$ – корни характеристического уравнения $p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$;

\underline{A}_1 и \underline{A}_2 – постоянные интегрирования.

Ток $\underline{I}(x)$ найдем из уравнения (2.3):

$$\begin{aligned} \underline{I}(x) &= -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\underline{U}}{dx} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \underline{A}_1 (-\underline{\gamma}) e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{1}{\underline{Z}_0} \underline{A}_2 \underline{\gamma} e^{\underline{\gamma}x} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} = \\ &= \frac{1}{\underline{Z}_B} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где
$$\underline{Z}_B = \frac{\underline{Z}_0}{\underline{\gamma}} = \frac{\underline{Z}_0}{\sqrt{\underline{Y}_0 \underline{Z}_0}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \underline{Z}_B e^{j\theta}. \quad (2.11)$$

Величину \underline{Z}_B , имеющую размерность сопротивления, называют *волновым сопротивлением* линии.

Однородную линию между входными и выходными зажимами можно рассматривать как симметричный четырехполюсник, следовательно, волно-

вое сопротивление Z_B линии аналогично характеристическому сопротивлению четырехполосника.

Постоянную распространения γ и волновое сопротивление Z_B называют *вторичными* или *волновыми параметрами* однородной линии.

Итак, получена система уравнений:

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}; \quad (2.12)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{Z_B} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}), \quad (2.13)$$

где постоянные $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$ и $\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$ имеют размерность напряжения.

2.3.1 Бегущие волны

На основании соотношений (2.12) и (2.13) запишем выражения для мгновенных значений напряжения и тока в точке с координатой x :

$$u(x, t) = \text{Im}[\sqrt{2}\underline{U}e^{j\omega t}]; \quad i(x, t) = \text{Im}[\sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t}];$$

$$u(x, t) = \text{Im}\left[\sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{j\psi_1} e^{j\omega t} + \sqrt{2}A_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x} e^{j\psi_2} e^{j\omega t}\right] =$$

$$= \sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x) + \sqrt{2}A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x); \quad (2.14)$$

$$i(x, t) = \text{Im}\left[\sqrt{2} \frac{A_1}{Z_B} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{j\psi_1} e^{-j\theta} e^{j\omega t} - \sqrt{2} \frac{A_2}{Z_B} e^{\alpha x} e^{j\beta x} e^{j\psi_2} e^{-j\theta} e^{j\omega t}\right] =$$

$$= \sqrt{2} \frac{A_1}{Z_B} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \theta - \beta x) - \sqrt{2} \frac{A_2}{Z_B} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 - \theta + \beta x). \quad (2.15)$$

Полученные выражения (2.14) и (2.15) для мгновенных значений напряжения и тока в линии представляют собой алгебраические суммы двух слагаемых. Каждое из этих слагаемых можно рассматривать в виде *бегущей волны*, движущейся в направлении возрастания или убывания координаты x .

Проанализируем выражение (2.14).

Первое слагаемое напряжения $\sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x)$ является гармонической функцией с постоянной амплитудой $\sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x}$ для заданной линейной координаты x . Если же рассмат-

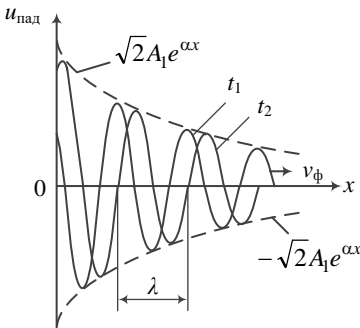


Рисунок 2.4

ривать это выражение для какого-либо фиксированного момента времени t , то мгновенное напряжение будет представлять собой затухающую гармоническую функцию координаты x , амплитуда которой $\sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x}$ убывает по мере удаления от начала линии к концу, т. е. с ростом x . На рисунке 2.4 показано распределение мгновенных значений напряжения вдоль линии для двух следующих друг за другом фиксированных моментов времени: t_1 и $t_2 > t_1$. Фактически на рисунке изображается волна напряжения, которая перемещается с определенной скоростью от начала к концу линии. Ее называют *падающей* или *прямой волной*. Амплитуда волны убывает по мере удаления от начала линии. Убывание амплитуды волны обусловлено потерями в линии. Волновой процесс в линии характеризуется *длиной волны* и *скоростью* распространения. Длина волны λ равна расстоянию между двумя точками линии, в которых фазы падающей волны различаются на 2π .

Следовательно,

$$(\omega t + \psi_1 - \beta x) - [\omega t + \psi_1 - \beta(x + \lambda)] = 2\pi,$$

откуда
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (2.16)$$

Найдем скорость, с которой перемещается в линии падающая волна. Под ней будем понимать скорость перемещения точки, фаза колебаний которой остается постоянной. Для падающей волны

$$\omega t + \psi_1 - \beta x = \text{const.}$$

Продифференцируем обе части равенства по переменной t :

$$\frac{d}{dt}(\omega t + \psi_1 - \beta x) = 0.$$

Искомая скорость, которую называют *фазовой*, определяется соотношением

$$v = \frac{\omega}{\beta}. \quad (2.17)$$

Длину волны можно еще определить как расстояние, которое проходит волна за период T изменения напряжения или тока:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega} v = \frac{2\pi}{2\pi f} v = vT. \quad (2.18)$$

Обратившись ко второму слагаемому соотношения (2.14), можно констатировать, что оно описывает волну точно такого же характера, как и падающую, но распространяющуюся в обратном направлении, т. е. от конца к началу линии, со скоростью v (рисунок 2.5). Эту волну называют *отраженной* или *обратной*. Амплитуда отраженной волны напряжения убывает в направлении от конца линии к ее началу. Фазовая скорость отраженной волны получается равной $v = -\frac{\omega}{\beta}$.

Знак минус говорит о том, что обратная волна движется в направлении, противоположном прямой волне.

Таким образом, приходим к выводу, что распределение мгновенного напряжения вдоль линии в любой момент времени можно рассматривать как результат наложения напряжений двух волн, движущихся в противоположных направлениях с одинаковой фазовой скоростью и затухающих в направлении движения.

Аналогичные выводы могут быть получены при исследовании волн тока, определяемых соотношением (2.15).

С учетом введенных выше понятий о падающих и отраженных волнах систему уравнений (2.12) и (2.13) представим в виде:

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \underline{U}_{\text{пад}} + \underline{U}_{\text{отр}}; \quad (2.19)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_B} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}) = \frac{\underline{U}_{\text{пад}}}{\underline{Z}_B} - \frac{\underline{U}_{\text{отр}}}{\underline{Z}_B} = \underline{I}_{\text{пад}} - \underline{I}_{\text{отр}}. \quad (2.20)$$

Из полученных соотношений вытекает, что токи и напряжения как падающей, так и отраженной волны связаны между собой законом Ома:

$$\underline{I}_{\text{пад}} = \frac{\underline{U}_{\text{пад}}}{\underline{Z}_B}; \quad \underline{I}_{\text{отр}} = \frac{\underline{U}_{\text{отр}}}{\underline{Z}_B}.$$

Необходимо отметить, что введенные понятия о прямых и обратных волнах в линии являются математической абстракцией. Физически существуют в линии только результирующие ток i и напряжение u .

Рассмотренные представления о падающих и отраженных волнах, постоянной распространения и волновом сопротивлении применимы и к

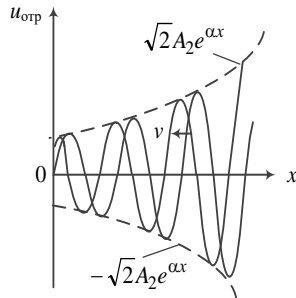


Рисунок 2.5

симметричным трехфазным линиям. В этом случае первичные параметры должны быть рассчитаны на одну фазу, а под напряжениями и токами волн надо понимать фазные напряжения и токи.

2.3.2 Уравнения длинной линии с гиперболическими функциями

Найдем постоянные интегрирования системы уравнений (2.12) и (2.13). Они могут быть определены из граничных условий, т. е. значений напряжения и тока в начале и конце линии.

В начале линии, т. е. при $x = 0$,

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad (2.21)$$

$$\underline{I}(0) = \underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_B}(\underline{A}_1 - \underline{A}_2), \quad (2.22)$$

откуда
$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_B \underline{I}_1}{2}; \quad \underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_B \underline{I}_1}{2}. \quad (2.23)$$

Подставим выражения для постоянных \underline{A}_1 и \underline{A}_2 в уравнения (2.12) и (2.13).

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_B \underline{I}_1}{2} e^{-\gamma x} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_B \underline{I}_1}{2} e^{\gamma x} = \\ &= \underline{U}_1 \frac{e^{-\gamma x} + e^{\gamma x}}{2} + \underline{Z}_B \underline{I}_1 \frac{e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}}{2} = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_B \underline{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}(x) &= \frac{1}{\underline{Z}_B}(\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{\underline{Z}_B} \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_B \underline{I}_1}{2} e^{-\gamma x} - \frac{1}{\underline{Z}_B} \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_B \underline{I}_1}{2} e^{\gamma x} = \\ &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \frac{e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}}{2} + \underline{I}_1 \frac{e^{-\gamma x} + e^{\gamma x}}{2} = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \gamma x + \underline{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x. \end{aligned}$$

В итоге получили систему уравнений с гиперболическими функциями:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_B \underline{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x; \quad (2.24)$$

$$\underline{I}(x) = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \gamma x + \underline{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x. \quad (2.25)$$

При заданных граничных условиях в конце линии, т. е. при $x = l$, имеем

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 = \underline{A}_1 e^{-\gamma l} + \underline{A}_2 e^{\gamma l}; \quad (2.26)$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_B} (\underline{A}_1 e^{-\gamma l} - \underline{A}_2 e^{\gamma l}). \quad (2.27)$$

Решая полученную систему уравнений, найдем постоянные интегрирования:

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} e^{\gamma l}; \quad \underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} e^{-\gamma l}. \quad (2.28)$$

Тогда уравнения (2.12) и (2.13) примут вид:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} e^{\gamma l} e^{-\gamma x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} e^{-\gamma l} e^{\gamma x} = \frac{\underline{U}_2}{2} \left[e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)} \right] + \\ &+ \frac{\underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} \left[e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)} \right] = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma(l-x) + \underline{Z}_B \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma(l-x); \\ \underline{I}(x) &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_B \underline{I}_2}{2 \underline{Z}_B} e^{\gamma l} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_B \underline{I}_2}{2 \underline{Z}_B} e^{-\gamma l} e^{\gamma x} = \frac{\underline{U}_2}{2 \underline{Z}_B} \left[e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)} \right] + \\ &+ \frac{\underline{Z}_B \underline{I}_2}{2 \underline{Z}_B} \left[e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)} \right] = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \gamma(l-x) + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma(l-x). \end{aligned}$$

Если расстояние до рассматриваемой точки на линии отсчитывать не от начала линии, а от ее конца, то в системе уравнений вместо переменной $l-x$ удобно использовать переменную y :

$$\underline{U}(y) = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \underline{Z}_B \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma y; \quad (2.29)$$

$$\underline{I}(y) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \gamma y + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y. \quad (2.30)$$

Положив в уравнениях (2.29) и (2.30) $y = l$, получим уравнения длинной линии, аналогичные уравнениям в форме A симметричного четырехполюсника:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{Z}_B \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l; \quad (2.31)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \gamma l + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l. \quad (2.32)$$

2.3.3 Коэффициент отражения

Введем понятие *коэффициента отражения*, который представляет собой отношение напряжения отраженной волны к напряжению падающей

волны. Отношение отраженной волны напряжения к падающей в начале линии ($x = 0$) называется *коэффициентом отражения волны в начале линии*.

Для численного определения коэффициента отражения воспользуемся соотношениями (2.19), (2.21) и (2.23):

$$n_1 = \frac{U_{\text{отр}}(0)}{U_{\text{пад}}(0)} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{U_1 - Z_B I_1}{U_1 + Z_B I_1} = \frac{Z_1 I_1 - Z_B I_1}{Z_1 I_1 + Z_B I_1} = \frac{Z_1 - Z_B}{Z_1 + Z_B}, \quad (2.33)$$

где $Z_1 = U_1/I_1$ – входное сопротивление линии.

Коэффициент отражения волны напряжения в конце линии находим как отношение отраженной волны к падающей при $x = l$ с учетом формул (2.26) и (2.28):

$$n_2 = \frac{U_{\text{отр}}(l)}{U_{\text{пад}}(l)} = \frac{U_2 - Z_B I_2}{U_2 + Z_B I_2} = \frac{Z_2 I_2 - Z_B I_2}{Z_2 I_2 + Z_B I_2} = \frac{Z_2 - Z_B}{Z_2 + Z_B}, \quad (2.34)$$

где Z_2 – сопротивление нагрузки на выходных зажимах линии.

В общем случае коэффициент отражения является комплексной величиной; его модуль не превышает 1, а аргумент определяет фазу отраженной волны относительно падающей.

Из последнего соотношения видно, что если сопротивление нагрузки равно волновому сопротивлению линии ($Z_2 = Z_B$), то коэффициент отражения $n_2 = 0$. В этом случае имеет место *согласованный режим*, при котором отраженная волна отсутствует, а в линии имеется только одна прямая волна.

2.3.4 Распределение напряжения и тока вдоль линии

Используя зависимости (2.12) и (2.13), выведем формулы для определения значений напряжения и тока в любой точке линии в зависимости от напряжения в начале линии или в ее конце.

Пусть комплексное напряжение гармонического источника, подключенного в начале линии ($x = 0$), равно U_1 . Тогда согласно уравнению (2.12) запишем:

$$U(0) = U_1 = A_1 + A_2 = U_{\text{пад}}(0) + U_{\text{отр}}(0). \quad (2.35)$$

Выразим из формулы для коэффициента отражения

$$n_1 = \frac{U_{\text{отр}}(0)}{U_{\text{пад}}(0)} = \frac{A_2}{A_1}$$

постоянную $A_2 = n_1 A_1$ и подставим ее значение в уравнение (2.35):

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_1 = \underline{A}_1(1 + \underline{n}_1),$$

откуда находим $\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1}{1 + \underline{n}_1}$ и, соответственно, $\underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 \underline{n}_1}{1 + \underline{n}_1}$.

После подстановки значений \underline{A}_1 и \underline{A}_2 в уравнения (2.12) и (2.13) получим формулы распределения напряжения и тока вдоль линии в функции координаты x при заданном напряжении источника \underline{U}_1 :

$$\underline{U}(x) = \frac{\underline{U}_1}{1 + \underline{n}_1} e^{-\gamma x} + \underline{n}_1 \frac{\underline{U}_1}{1 + \underline{n}_1} e^{\gamma x} = \frac{\underline{U}_1}{1 + \underline{n}_1} e^{-\gamma x} (1 + \underline{n}_1 e^{2\gamma x}). \quad (2.36)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B(1 + \underline{n}_1)} e^{-\gamma x} (1 - \underline{n}_1 e^{2\gamma x}). \quad (2.37)$$

Если задано напряжение \underline{U}_2 на нагрузке, то записав уравнение (2.12) для $x = l$, получим:

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 = \underline{A}_1 e^{-\gamma l} + \underline{A}_2 e^{\gamma l} = \underline{U}_{\text{пад}}(l) + \underline{U}_{\text{отр}}(l). \quad (2.38)$$

Из формулы (2.34) для коэффициента отражения

$$\underline{n}_2 = \frac{\underline{U}_{\text{отр}}(l)}{\underline{U}_{\text{пад}}(l)} = \frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} e^{2\gamma l}$$

выразим постоянную $\underline{A}_2 = \underline{n}_2 \underline{A}_1 e^{-2\gamma l}$ и подставив ее в уравнение (2.38)

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 = \underline{A}_1 e^{-\gamma l} (1 + \underline{n}_2),$$

найдем значение $\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_2}{1 + \underline{n}_2} e^{\gamma l}$, а затем $\underline{A}_2 = \frac{\underline{n}_2 \underline{U}_2}{1 + \underline{n}_2} e^{-\gamma l}$.

Подставим коэффициенты \underline{A}_1 и \underline{A}_2 в уравнение (2.12):

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \frac{\underline{U}_2}{1 + \underline{n}_2} e^{\gamma l} e^{-\gamma x} + \frac{\underline{n}_2 \underline{U}_2}{1 + \underline{n}_2} e^{-\gamma l} e^{\gamma x} = \\ &= \frac{\underline{U}_2}{1 + \underline{n}_2} e^{\gamma(l-x)} \left[1 + \underline{n}_2 e^{-2\gamma(l-x)} \right]. \end{aligned}$$

Произведем замену переменной $(l - x)$ на переменную y и запишем выражения для напряжения и тока в любой точке линии в функции координаты y при заданном напряжении \underline{U}_2 на нагрузке:

$$\underline{U}(y) = \frac{\underline{U}_2}{1 + \underline{n}_2} e^{\gamma y} (1 + \underline{n}_2 e^{-2\gamma y}); \quad (2.39)$$

$$\underline{I}(y) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B (1 + \underline{n}_2)} e^{\gamma y} (1 - \underline{n}_2 e^{-2\gamma y}). \quad (2.40)$$

2.3.5 Электрически длинная линия

Линию, протяженность которой соизмерима с длиной волны, называют *длинной линией*. Длина волны зависит от частоты тока, следовательно, одна и та же линия в зависимости от частоты или от длины волны в одних случаях может рассматриваться как длинная, а в других – короткая.

В технике электропроводной связи принято другое определение длинной линии. Линию называют *электрически длинной*, если выполняется условие $|\underline{\gamma}l| \geq 2,3$ и $|e^{-2\gamma l}| \leq 0,01$. Физически это означает, что амплитуда напряжения отраженной волны в начале линии по меньшей мере в 100 раз меньше амплитуды напряжения падающей волны.

Пренебрегая в выражениях (2.39) и (2.40) слагаемым $\underline{n}_2 e^{-2\gamma y}$, получим:

$$\underline{U}(y) = \frac{\underline{U}_2}{1 + \underline{n}_2} e^{\gamma y}; \quad (2.41)$$

$$\underline{I}(y) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B (1 + \underline{n}_2)} e^{\gamma y}. \quad (2.42)$$

2.3.6 Электрически короткая линия

Электрически короткой называют линию с малым затуханием и малым фазовым сдвигом. Признаком такой линии является такая малость величины $\underline{\gamma}l$, при которой выполняется соотношение

$$\frac{|\underline{\gamma}l|^3}{3!} \ll |\underline{\gamma}l|$$

Ограничившись тремя первыми слагаемыми ряда Маклорена, получим значения множителей

$$e^{\underline{\gamma}l} = 1 + \underline{\gamma}l + \frac{(\underline{\gamma}l)^2}{2} \quad \text{и} \quad e^{-\underline{\gamma}l} = 1 - \underline{\gamma}l + \frac{(\underline{\gamma}l)^2}{2}. \quad (2.43)$$

Исследуем уравнения (2.39) и (2.40) для случая, когда $y = l$.

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_2}{1 + \underline{n}_2} e^{\underline{\gamma}l} + \frac{\underline{n}_2 \underline{U}_2}{1 + \underline{n}_2} e^{-\underline{\gamma}l}; \quad (2.44)$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B(1 + \underline{n}_2)} e^{\underline{\gamma}l} - \frac{\underline{n}_2 \underline{U}_2}{\underline{Z}_B(1 + \underline{n}_2)} e^{-\underline{\gamma}l}. \quad (2.45)$$

Запишем значения коэффициентов, которые входят в уравнения:

$$\underline{n}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_B}; \quad \frac{1}{1 + \underline{n}_2} = \frac{1}{2} + \frac{\underline{Z}_B}{2\underline{Z}_2}; \quad \frac{\underline{n}_2}{1 + \underline{n}_2} = \frac{1}{2} - \frac{\underline{Z}_B}{2\underline{Z}_2}. \quad (2.46)$$

После подстановки соотношений (2.43) и (2.46) в уравнения (2.44) и (2.45), несложных преобразований и учитывая, что $\underline{U}_2 / \underline{Z}_2 = \underline{I}_2$, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{\underline{Z}_B}{2\underline{Z}_2} \right) \left[1 + \underline{\gamma}l + \frac{(\underline{\gamma}l)^2}{2} \right] \right\} + \underline{U}_2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\underline{Z}_B}{2\underline{Z}_2} \right) \left[1 - \underline{\gamma}l + \frac{(\underline{\gamma}l)^2}{2} \right] \right\} = \\ = \left[1 + \frac{1}{2} (\underline{\gamma}l)^2 \right] \underline{U}_2 + \underline{Z}_B \underline{\gamma}l \underline{I}_2; \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{\underline{Z}_B}{2\underline{Z}_2} \right) \left[1 + \underline{\gamma}l + \frac{(\underline{\gamma}l)^2}{2} \right] \right\} - \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\underline{Z}_B}{2\underline{Z}_2} \right) \left[1 - \underline{\gamma}l + \frac{(\underline{\gamma}l)^2}{2} \right] \right\} = \\ = \frac{\underline{\gamma}l}{\underline{Z}_B} \underline{U}_2 + \left[1 + \frac{1}{2} (\underline{\gamma}l)^2 \right] \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Воспользуемся соотношениями (2.7) и (2.11) для вторичных (волновых) параметров линии. Из них следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\underline{\gamma}l)^2 &= \frac{1}{2} \underline{Z}_0 l \underline{Y}_0 l = \frac{1}{2} \underline{Z}_l \underline{Y}_l; \\ \underline{Z}_B \underline{\gamma}l &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} \cdot \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} l = \underline{Z}_0 l = \underline{Z}_l; \\ \frac{\underline{\gamma}l}{\underline{Z}_B} &= \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} \cdot \sqrt{\frac{\underline{Y}_0}{\underline{Z}_0}} l = \underline{Y}_0 l = \underline{Y}_l, \end{aligned}$$

где \underline{Z}_l – комплексное продольное сопротивление линии;

\underline{Y}_l – комплексная поперечная проводимость линии.

Подставив эти значения в уравнения (2.46) и (2.47), получим:

$$\underline{U}_1 = \left(1 + \frac{1}{2} \underline{Z}_л \underline{Y}_л\right) \underline{U}_2 + \underline{Z}_л \underline{I}_2; \quad (2.49)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_л \underline{U}_2 + \left(1 + \frac{1}{2} \underline{Z}_л \underline{Y}_л\right) \underline{I}_2. \quad (2.50)$$

Полученные уравнения не содержат волновых параметров, а используют только первичные параметры линии. Уравнения (2.49) и (2.50), устанавливающие соотношения между

напряжениями и токами на входе и выходе линии, представляют собой уравнения симметричного четырехполюсника в форме *A*. Этим уравнениям соответствуют *T*- и *Π*-образные схемы четырехполюсника, приведенные на рисунке 2.6.

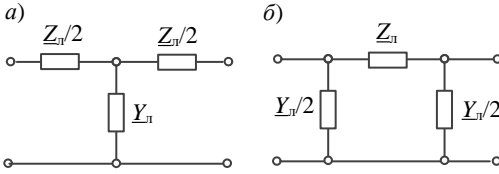


Рисунок 2.6

ные на рисунке 2.6.

2.3.7 Входное сопротивление длинной линии

Входное сопротивление линии $\underline{Z}_{вх}$ представляет собой сопротивление двухполюсника, которым можно заменить линию вместе с нагрузкой на ее выходных зажимах, чтобы исследовать режим линии относительно ее входных зажимов. Для получения необходимой формулы воспользуемся уравнениями (2.31) и (2.32) и соотношением $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$:

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{Z}_в \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_в} \operatorname{sh} \gamma l + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l} = \underline{Z}_в \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_в \operatorname{th} \gamma l}{\underline{Z}_в + \underline{Z}_2 \operatorname{th} \gamma l}. \quad (2.51)$$

Формулу для входного сопротивления длинной линии можно получить, если воспользоваться уравнениями (2.39) и (2.40), приняв в них $x = l$:

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_2}{1 + \underline{n}_2} e^{\gamma l} (1 + \underline{n}_2 e^{-2\gamma l});$$

$$\underline{I}(y) = \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_в (1 + \underline{n}_2)} e^{\gamma l} (1 - \underline{n}_2 e^{-2\gamma l}).$$

Таким образом,

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \underline{Z}_B \frac{1 + n_2 e^{-2\gamma l}}{1 - n_2 e^{-2\gamma l}}. \quad (2.52)$$

Выразим входное сопротивление линии $\underline{Z}_{\text{вх}}$ через сопротивления линии при холостом ходе \underline{Z}_x и коротком замыкании \underline{Z}_k . Из уравнений (2.31) и (2.32) находим:

$$\text{при холостом ходе } (I_2 = 0) \quad \underline{Z}_x = \frac{U_{1x}}{I_{1x}} = \frac{U_2 \text{ch} \gamma l}{\frac{U_2}{\underline{Z}_B} \text{sh} \gamma l} = \frac{\underline{Z}_B}{\text{th} \gamma l};$$

$$\text{при коротком замыкании } (U_2 = 0) \quad \underline{Z}_k = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = \frac{\underline{Z}_B I_2 \text{sh} \gamma l}{I_2 \text{ch} \gamma l} = \underline{Z}_B \text{th} \gamma l.$$

Из полученных соотношений имеем:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_k}; \quad (2.53)$$

$$\text{th} \gamma l = \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}. \quad (2.54)$$

Формула (2.51) с учетом выражений (2.53) и (2.54) принимает вид:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_x \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_k}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_x}. \quad (2.55)$$

2.3.8 Определение параметров линии

В практике часто возникает необходимость экспериментального определения первичных и вторичных параметров линии. Как отмечено выше, любая однородная линия характеризуется двумя вторичными (волновыми) параметрами \underline{Z}_B и $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$. Для их экспериментального определения достаточно измерить входные сопротивления линии при некоторой выбранной частоте в двух граничных режимах *холостого хода* и *короткого замыкания*.

Волновое сопротивление линии \underline{Z}_B определяется соотношением (2.53). Выразим через сопротивления \underline{Z}_x и \underline{Z}_k постоянную распространения $\underline{\gamma}$ из формулы (2.54):

$$\text{th} \gamma l = \frac{\text{sh} \gamma l}{\text{ch} \gamma l} = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}.$$

После выполнения простейших преобразований

$$\frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1} = \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}; \quad e^{2\gamma l} - 1 = (e^{2\gamma l} + 1)\sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x};$$

$$e^{2\gamma l} (1 - \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}) = 1 + \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x};$$

получим
$$\underline{\gamma} = \frac{1}{2l} \ln \frac{1 + \text{th}\underline{\gamma}l}{1 - \text{th}\underline{\gamma}l} = \frac{1}{2l} \ln \frac{1 + \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}}{1 - \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}} = \alpha + j\beta, \quad (2.56)$$

где коэффициент ослабления линии

$$\alpha = \frac{1}{2l} \ln \left| \frac{1 + \text{th}\underline{\gamma}l}{1 - \text{th}\underline{\gamma}l} \right| = \frac{1}{2l} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}}{1 - \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}} \right|, \quad (2.57)$$

и коэффициент фазы

$$\beta = \frac{1}{2l} \left(\arg \frac{1 + \text{th}\underline{\gamma}l}{1 - \text{th}\underline{\gamma}l} + 2k\pi \right) = \frac{1}{2l} \left(\arg \frac{1 + \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}}{1 - \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}} + 2k\pi \right). \quad (2.58)$$

В последней формуле коэффициент k соответствует целому числу волн, укладываемых по длине исследуемой линии.

По найденным вторичным параметрам линии легко найти ее первичные параметры r_0 , L_0 , g_0 и C_0 . С этой целью воспользуемся соотношениями (2.7) и (2.11) и выразим \underline{Z}_0 и \underline{Y}_0 через вторичные параметры линии $\underline{\gamma}$ и \underline{Z}_B , решая полученную систему уравнений:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)};$$

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}};$$

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0 = \underline{\gamma} \underline{Z}_B; \quad \underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0 = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_B}.$$

Подобный метод определения параметров целесообразно применять для линий, собственное ослабление которых не превышает 8–10 дБ.

2.4 Линия без искажений

Линии используются как для передачи электрической энергии на расстояние, так и для передачи информации. Сигналы, которые передаются по ли-

нии связи, являются непериодическими функциями времени, т. е. представляют собой спектр частот, непрерывный или дискретный. Как было установлено, волновое сопротивление $\underline{Z}_в$, коэффициент ослабления α , коэффициент фазы β и фазовая скорость v являются функциями частоты, т. е. различны для отдельных гармоник, что создает искажение передаваемых сигналов. Неодинаковое ослабление на разных частотах создает амплитудные искажения, а неодинаковая скорость волн вызывает фазовые искажения.

Неискажающей передачей сигнала называется такая передача, при которой форма сигнала в начале и в конце линии одинакова.

Для того, чтобы передаваемые по линии сигналы не искажались, необходимо, чтобы волновое сопротивление и коэффициент ослабления не зависели от частоты, причем коэффициент ослабления должен быть по возможности малым. Чтобы исключить фазовые искажения сигнала, необходимо иметь коэффициент фазы, пропорциональный частоте. В этом случае фазовая скорость $v = \omega/\beta$ не будет зависеть от частоты. При согласованной нагрузке будут отсутствовать отраженные волны. В воздушных и кабельных линиях передачи информации обычных конструкций возникают и амплитудные, и фазовые искажения. Найдем условия, которым должны удовлетворять параметры однородной линии передачи, чтобы считать ее *неискажающей*. Они вытекают из совместного рассмотрения полученных ранее выражений для волнового сопротивления $\underline{Z}_в$ и постоянной распространения $\underline{\gamma}$.

Выполним некоторые преобразования в формуле (2.11) для волнового сопротивления:

$$\underline{Z}_в = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \cdot \sqrt{\frac{r_0 + j\omega}{\frac{g_0}{C_0} + j\omega}}.$$

Если принять, что $\frac{r_0}{L_0} + j\omega = \frac{g_0}{C_0} + j\omega$, то получим условие

$$\frac{r_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0}, \quad (2.59)$$

при выполнении которого

$$\underline{Z}_в = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (2.60)$$

Волновое сопротивление такой линии чисто активное и не зависит от частоты, а напряжение и ток в любой точке линии совпадают по фазе. Все гармоники, представляющие собой спектр частот тока или напряжения, будут распространяться вдоль линии с одинаковой скоростью.

Условие (2.59) было получено Хевисайдом в 1893 г.

Выполним преобразования в формуле (2.7) для постоянной распространения линии с учетом соотношения (2.59):

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{r_0 g_0} \cdot \sqrt{\left(1 + j\omega \frac{L_0}{r_0}\right) \left(1 + j\omega \frac{C_0}{g_0}\right)} = \\ &= \sqrt{r_0 g_0} \cdot \left(1 + j\omega \frac{L_0}{r_0}\right) = \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{r_0 g_0} \cdot \frac{L_0}{r_0} = \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{\frac{g_0}{r_0}} L_0^2 = \\ &= \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} L_0^2 = \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{C_0 L_0} = \alpha + j\beta.\end{aligned}$$

Таким образом, получим коэффициент ослабления

$$\alpha = \sqrt{r_0 g_0}; \quad (2.61)$$

и коэффициент фазы

$$\beta = \omega \sqrt{C_0 L_0}. \quad (2.62)$$

Если полагать, что первичные параметры линии не зависят от частоты, то коэффициент ослабления α будет постоянен, а коэффициент фазы β – прямо пропорционален частоте.

Фазовая скорость неискажающей линии

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \quad (2.63)$$

длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f \sqrt{L_0 C_0}}. \quad (2.64)$$

Линии передачи информации, как правило, не обладают свойствами неискажающих линий. У воздушных линий связи отношение r_0/L_0 в несколько раз больше отношения g_0/C_0 . В кабельных линиях связи расстояние между проводниками меньше, чем у воздушных. Поэтому индуктивность L_0 на единицу длины кабельной линии меньше, чем у воздушной, а емкость C_0 , наоборот, больше. Активная проводимость g_0 между проводниками кабеля значительно меньше, чем у воздушной линии. В результате у кабельных линий условие (2.59) еще более далеко от выполнения, чем у воздушных линий.

Для устранения искажения сигналов применяют дополнительные устройства: электрические фильтры, корректирующие контуры, трансформаторы, усилители и другие устройства, специально включаемые в линии

передачи сигналов.

2.5 Линия без потерь

При работе линий связи в диапазоне сверхвысоких частот значениями ее первичных параметров r_0 и g_0 часто можно пренебречь, поскольку они несоизмеримо малы по сравнению с соответствующими значениями ωL_0 и ωC_0 . Линию, у которой $r_0 = 0$ и $g_0 = 0$, называют *линией без потерь*. Волновые параметры такой линии определяются следующими соотношениями:

волновое сопротивление

$$\underline{Z}_B = Z_B e^{j\theta} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad \theta = 0;$$

коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta,$$

где

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}.$$

Фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

В линии без потерь коэффициент ослабления $\alpha = 0$, т. е. отсутствует затухание волн при их движении по линии, а волновое сопротивление Z_B не зависит от частоты.

Как видно из полученных формул, величины β , Z_B , v_ϕ для линии без потерь такие же, как и для неискажающей линии.

Уравнения длинной линии с гиперболическими функциями (2.24) и (2.25) от комплексного аргумента

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \text{ch} \underline{\gamma} x - Z_B \underline{I}_1 \text{sh} \underline{\gamma} x;$$

$$\underline{I}(y) = -\frac{\underline{U}_1}{Z_B} \text{sh} \underline{\gamma} x + \underline{I}_1 \text{ch} \underline{\gamma} x$$

при $\underline{\gamma} = j\beta$ превращаются в уравнения с круговыми функциями от действительного аргумента, т. к.

$$\text{ch} j\beta y = \frac{1}{2}(e^{j\beta y} + e^{-j\beta y}) = \cos \beta y;$$

$$\text{sh} j\beta y = \frac{1}{2}(e^{j\beta y} - e^{-j\beta y}) = j \sin \beta y.$$

Таким образом, уравнения (2.24) и (2.25) принимают вид:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cos \beta x - j Z_B \underline{I}_1 \sin \beta x; \quad (2.65)$$

$$\underline{I}(x) = -j \frac{\underline{U}_1}{Z_B} \sin \beta x + \underline{I}_1 \cos \beta x. \quad (2.66)$$

Если заданы напряжение \underline{U}_2 и ток \underline{I}_2 в конце линии, то получим следующую систему уравнений длинной линии без потерь:

$$\underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos \beta y + j Z_B \underline{I}_2 \sin \beta y; \quad (2.67)$$

$$\underline{I}(y) = j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta y + \underline{I}_2 \cos \beta y. \quad (2.68)$$

Если положить начальную фазу напряжения u_2 равной нулю ($\underline{U}_2 = U_2$), то получим

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{U_2}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = I_2 e^{-j\varphi_2}.$$

Тогда
$$\underline{U}(y) = U_2 \cos \beta y + j Z_B I_2 e^{-j\varphi_2} \sin \beta y; \quad (2.69)$$

$$\underline{I}(y) = j \frac{U_2}{Z_B} \sin \beta y + I_2 e^{-j\varphi_2} \cos \beta y. \quad (2.70)$$

Переходя к мгновенным значениям напряжения и тока, получим:

$$u(t, y) = U_{2m} \sin \omega t \cos \beta y + Z_B I_{2m} \sin(\omega t + 90^\circ - \varphi_2) \sin \beta y;$$

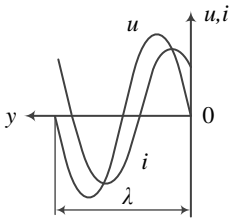


Рисунок 2.7

$$i(t, y) = \frac{U_{2m}}{Z_B} \cos \omega t \sin \beta y + I_{2m} \sin(\omega t - \varphi_2) \cos \beta y.$$

На рисунке 2.7 изображены кривые распределения мгновенных напряжений и токов в функции координаты y вдоль линии на участке, равном длине волны, для активно-индуктивного характера нагрузки ($\varphi_2 > 0$).

Для фиксированного момента времени кривые распределения напряжения и тока вдоль линии являются синусоидами.

2.5.1 Стоячие волны

При несогласованном режиме линии без потерь, т. е. когда сопротивление приемника не равно волновому сопротивлению линии, в нагрузку потребляется только часть энергии, которая переносится падающей волной. Оставшаяся часть энергии возвращается к источнику в виде отраженной

волны. Рассмотрим случаи, когда активная мощность, потребляемая приемником в конце линии без потерь, равна нулю. Это может быть при холостом ходе, коротком замыкании и реактивной нагрузке.

2.5.2 Линия без потерь в режиме холостого хода

В рассматриваемом случае, когда линия на конце разомкнута, сопротивление приемника $Z_2 = \infty$, а ток $I_2 = 0$. Коэффициент отражения в конце линии $n_2 = 1$ согласно соотношению (34). Напряжение на разомкнутом конце линии удваивается и возникает отраженная волна того же знака, что и падающая. При нулевом значении тока энергия магнитного поля переходит в энергию электрического поля. Уравнения (2.69) и (2.70) упрощаются до

$$\underline{U}(y) = U_2 \cos \beta y; \quad (2.71)$$

$$\underline{I}(y) = j \frac{U_2}{Z_B} \sin \beta y, \quad (2.72)$$

и получаем выражения для мгновенных значений напряжения и тока:

$$u(t, y) = U_{2m} \sin \omega t \cos \beta y; \quad (2.73)$$

$$i(t, y) = \frac{U_{2m}}{Z_B} \sin(\omega t + 90^\circ) \sin \beta y = \frac{U_{2m}}{Z_B} \cos \omega t \sin \beta y. \quad (2.74)$$

Уравнения (2.73) и (2.74) описывают специфический режим линии без потерь, называемый *режимом стоячих волн*. Математически такие волны описываются произведением двух периодических функций, аргумент одной из которых зависит только от времени, а другой – только от координаты.

Как следует из формулы (2.71), в любой момент времени напряжение распределяется вдоль линии по синусоидальному закону с амплитудой, равной $U_{2m} \sin \omega t$. Максимальная амплитуда волны напряжения достигает значение U_{2m} .

Изменение тока также представляет собой волнообразную кривую, смещенную относительно кривой напряжения на четверть длины волны. На рисунке 2.8 приведены графики изменения напряжения и тока в функции координаты y для разных моментов времени. Цифрами 1, 2, 3 и 4 отмечены графики, которым соответствуют аргументы: $\omega t_1 = 0$; $\omega t_2 = \pi / 2$; $\omega t_3 = \pi$ и $\omega t_4 = 3\pi / 2$.

Точки линии, в которых значения напряжений (токов) равны нулю, называются *узлами* напряжения (тока). Максимальные значения напряжения (тока) в точках линии называются *пучностями* напряжения (тока). Пуч-

ности и узлы для одной и той же величины (напряжения или тока) смещены вдоль линии на четверть длины волны.

Сопоставление этих графиков показывает, что узлы (пучности) напряжения совпадают с пучностями (узлами) тока.

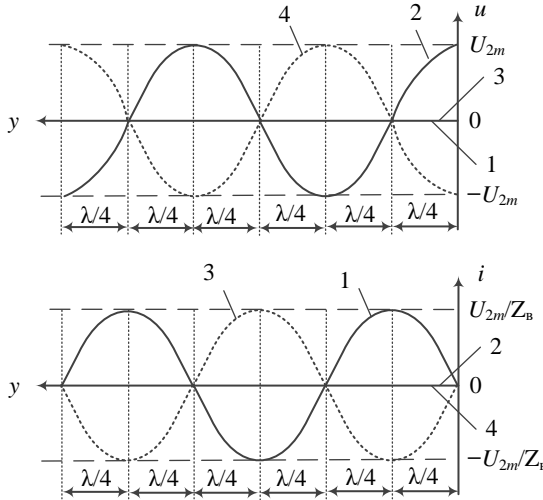


Рисунок 2.8

Распределение мгновенных значений напряжения вдоль линии подчиняется косинусоидальному закону, а тока – синусоидальному. При этом следует отметить, что при изменении времени координаты точек, имеющих одинаковую фазу, остаются неизменными.

Создается впечатление, что волны напряжения и тока не движутся в пространстве, а как бы «стоят на месте» (пульсируют), в силу чего такой режим работы линии получил название *режима стоячих волн*.

Стоячую волну напряжения (тока) можно представить в виде совокупности двух волн, падающей и отраженной, при этом амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей волны, т. к. в режиме холостого хода линии коэффициент отражения $n_2 = 1$.

Выражения для напряжения $u(t, y)$ можно получить в виде суммы (а для тока $i(t, y)$ в виде разности) прямой и обратной волн с одинаковыми амплитудами.

$$u(t, y) = \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta y) + \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t - \beta y) = \frac{U_{2m}}{2} (\sin \omega t \cos \beta y +$$

$$+ \cos \omega t \sin \beta y + \sin \omega t \cos \beta y - \cos \omega t \sin \beta y) = U_{2m} \sin \omega t \cos \beta y;$$

$$i(t, y) = \frac{U_{2m}}{2Z_B} \sin(\omega t + \beta y) - \frac{U_{2m}}{2Z_B} \sin(\omega t - \beta y) = \frac{U_{2m}}{Z_B} \cos \omega t \sin \beta y.$$

Наличие в линии стоячих волн приводит к тому, что вдоль линии активная мощность не передается, т. к. в узлах напряжения и тока $p = ui = 0$.

На каждом участке линии длиной $\lambda/4$ между узлами напряжения и тока происходит только обмен запасенной энергией между электрическим и магнитным полями. Этот процесс аналогичен процессу, происходящему в контуре, состоящем из индуктивности и емкости.

2.5.3 Линия без потерь в режиме короткого замыкания

При коротком замыкании линии ($U_2 = 0$) уравнения (2.67) и (2.68) запишем в следующем виде:

$$\underline{U}(y) = jZ_B \underline{I}_2 \sin \beta y; \quad (2.75)$$

$$\underline{I}(y) = \underline{I}_2 \cos \beta y. \quad (2.76)$$

Запишем уравнения для мгновенных значений напряжения и тока, приняв $\underline{I}_2 = I_2$:

$$u(t, y) = Z_B I_{2m} \cos \omega t \sin \beta y;$$

$$i(t, y) = I_{2m} \sin \omega t \cos \beta y.$$

Таким образом, в режиме короткого замыкания линии без потерь напряжение и ток образуют стоячие волны, обладающие такими же свойствами, как и стоячие волны в режиме холостого хода.

Однако в отличие от предыдущего случая напряжение в любой момент времени t распределяется вдоль линии по синусоидальному закону, а ток – по косинусоидальному (рисунок 2.9).

На рисунке 2.9 построены графики изменения напряжения и тока от координаты y для тех же значений аргумента, что и на рисунке 2.8, т. е. для $\omega t_1 = 0$; $\omega t_2 = \pi / 2$; $\omega t_3 = \pi$ и $\omega t_4 = 3\pi / 2$.

Коэффициент отражения в конце линии для данного случая $n_2 = -1$.

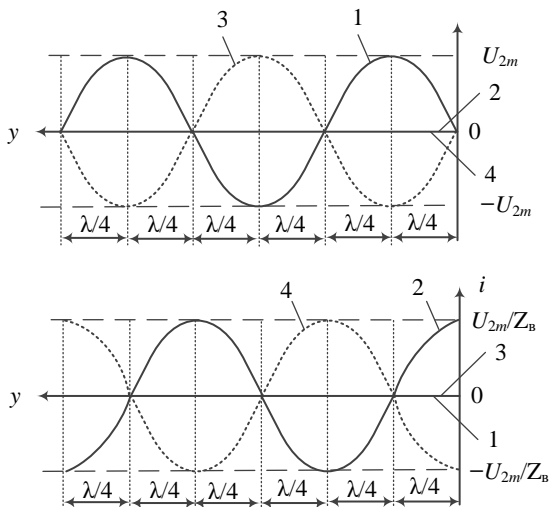


Рисунок 2.9

2.5.4 Входное сопротивление линии без потерь

Линия без потерь длиной l на основании формулы (2.51) имеет входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = Z_{\text{в}} \frac{Z_2 + jZ_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta l}{Z_{\text{в}} + jZ_2 \operatorname{tg} \beta l}.$$

Входное сопротивление разомкнутой на конце линии без потерь, как следует из формул (2.71) и (2.72),

$$\underline{Z}_{\text{x}} = \frac{U(y)}{I(y)} = -jZ_{\text{в}} \operatorname{ctg} \beta y, \quad (2.77)$$

а сопротивление короткозамкнутой линии согласно формулам (2.75), (2.79)

$$\underline{Z}_{\text{к}} = \frac{U(y)}{I(y)} = jZ_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta y. \quad (2.78)$$

На основании полученных формул построены графики изменения входного сопротивления линии без потерь в зависимости от координаты y для режимов холостого хода (рисунок 2.10) и короткого замыкания (рисунок 2.11) соответственно. В обоих случаях входное сопротивление линии чисто реактивное. Его значение и характер при заданном волновом сопротивлении и частоте зависит от длины линии.

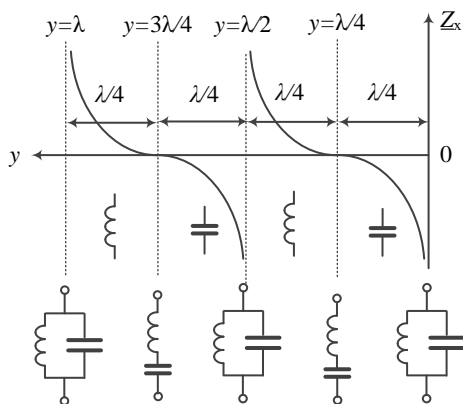


Рисунок 2.10

Разомкнутая линия при изменении y в интервале от $y = 0$ до $y = \lambda / 4$, от $y = \lambda / 2$ до $y = 3\lambda / 4$ и т. д. представляет собой емкостное сопротивление, а в интервале от $y = \lambda / 4$ до $y = \lambda / 2$, от $y = 3\lambda / 4$ до $y = \lambda$ и т. д. – индуктивное сопротивление. При $y = 0; \lambda / 2; \lambda$ и т. д. сопротивление линии стремится к бесконечности, и линия может быть представлена параллельным резонансным контуром. Когда координата $y = \lambda / 4; y = 3\lambda / 4$ и т. д. Z_x принимает нулевые значения, линия ведет себя аналогично последовательному резонансному контуру.

Для короткозамкнутой на конце линии входное сопротивление Z_k имеет индуктивный характер при изменении y от 0 до $\lambda / 4$, бесконечно велико при $y = \lambda / 4$, равно 0 при $y = 0$, емкостное при $\lambda / 4 < y < \lambda / 2$ и т. д.

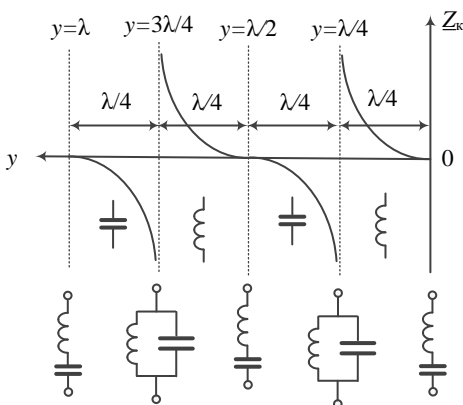


Рисунок 2.11

Итак, линия без потерь в режиме холостого хода или короткого замыкания в зависимости от ее длины может иметь индуктивный или емкостный характер и принимать любые значения от 0 до ∞ .

Сопротивление короткозамкнутого отрезка длиной $\lambda / 4$ бесконечно велико, и его можно использовать в качестве «металлического изолятора» для подвески или крепления основной линии передачи.

Исходя из полученных свойств разомкнутых и короткозамкнутых отрезков линии без потерь, при определенной длине она может обладать свойствами последовательного или параллельного колебательного контура.

В технике сверхвысоких частот для практических целей отрезки линий длиной $0 < l < \lambda / 4$ используют вместо сосредоточенных индуктивностей или емкостей. Короткозамкнутый отрезок имеет индуктивное сопротивление. Изменяя его длину l в пределах от 0 до $\lambda / 4$, можно получить любую заданную индуктивность в соответствии с формулой (2.76):

$$Z_{\kappa} = \omega L = Z_{\text{B}} \operatorname{tg} \beta l = Z_{\text{B}} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right).$$

Длину разомкнутого отрезка линии, обладающего емкостным сопротивлением, можно определить по заданному значению Z_{x} из формулы (2.75):

$$Z_{\text{x}} = \frac{1}{\omega C} = Z_{\text{B}} \operatorname{ctg} \beta l = Z_{\text{B}} \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right).$$

2.5.5 Линия без потерь, нагруженная на реактивное сопротивление

Рассмотрим линию без потерь, сопротивление нагрузки которой имеет чисто реактивный характер: $Z_2 = \pm jx$. Выразим коэффициент отражения в конце линии согласно формуле (2.34) при индуктивной нагрузке:

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{\text{B}}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{\text{B}}} = \frac{jx_2 - Z_{\text{B}}}{jx_2 + Z_{\text{B}}} = -\frac{Z_{\text{B}} - jx_2}{Z_{\text{B}} + jx_2} = -\frac{\sqrt{Z_{\text{B}}^2 + x_2^2} \cdot e^{-j\alpha_2}}{\sqrt{Z_{\text{B}}^2 + x_2^2} \cdot e^{j\alpha_2}} = -e^{-j2\alpha_2} = \\ &= e^{j(\pi - 2\alpha_2)} = e^{j\psi_{n_2}}, \text{ где } \alpha_2 = \arctg \frac{x_2}{Z_{\text{B}}}. \end{aligned}$$

Модуль коэффициента отражения $n_2 = 1$, а аргумент $\psi_{n_2} = \pi - 2\arctg \frac{x_2}{Z_{\text{B}}}$.

Если нагрузка имеет емкостный характер ($Z_2 = -jx_2$), то

$$n_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_B} = \frac{-jx_2 - Z_B}{-jx_2 + Z_B} = -\frac{Z_B + jx_2}{Z_B - jx_2} = -\frac{\sqrt{Z_B^2 + x_2^2} \cdot e^{j\alpha_2}}{\sqrt{Z_B^2 + x_2^2} \cdot e^{-j\alpha_2}} = -e^{j2\alpha_2} = e^{j(\pi+2\alpha_2)} = e^{j\psi_{n_2}}.$$

Модуль коэффициента отражения $n_2 = 1$, а аргумент $\psi_{n_2} = \pi + 2\arctg \frac{x_2}{Z_B}$.

Как следует из приведенных соотношений, в обоих случаях (при индуктивной и емкостной нагрузке), коэффициент отражения в конце линии по модулю равен единице, поэтому амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей. Таким образом, в линии без потерь, нагруженной на реактивное сопротивление, не происходит поглощения энергии и в ней возникают стоячие волны.

Найдем законы изменения напряжения и тока в линии, к которой в качестве нагрузки присоединено индуктивное сопротивление $\underline{Z}_2 = j\omega L = jx_2$.

Используя выражения (2.65) и (2.66), соотношение $\underline{U}_2 = jx_2 \underline{I}_2$ и полагая $\underline{U}_2 = U_2$, найдем комплексные действующие значения напряжения и тока линии:

$$\begin{aligned} \underline{U}(y) &= U_2 \cos \beta y + jZ_B \frac{U_2}{jx_2} \sin \beta y = U_2 \left(\frac{Z_B}{x_2} \sin \beta y + \cos \beta y \right) = \\ &= U_2 \sqrt{1 + \left(\frac{Z_B}{x_2} \right)^2} \sin \left(\beta y + \arctg \frac{x_2}{Z_B} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}(y) &= j \frac{jx_2 \underline{I}_2}{Z_B} \sin \beta y + \underline{I}_2 \cos \beta y = -\underline{I}_2 \left(\frac{x_2}{Z_B} \sin \beta y - \cos \beta y \right) = \\ &= -\underline{I}_2 \sqrt{1 + \left(\frac{x_2}{Z_B} \right)^2} \sin \left(\beta y - \arctg \frac{Z_B}{x_2} \right). \end{aligned}$$

Из рисунка 2.12 следует, что

$$\arctg \frac{x_2}{Z_B} = \psi_1; \arctg \frac{Z_B}{x_2} = \psi_2 = 90^\circ - \psi_1.$$

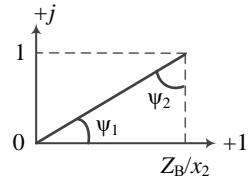


Рисунок 2.12

С учетом этих соотношений запишем выражения для $\underline{U}(y)$ и $\underline{I}(y)$:

Полученные выражения свидетельствуют, что в линии без потерь, нагруженной на индуктивное сопротивление, имеют место стоячие волны, но при этом в конце линии, как следует из графиков, нет ни узлов, ни пучностей.

Подключение в конце линии индуктивности L эквивалентно включению отрезка короткозамкнутой линии длиной

$$l_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{Z_B}. \quad (2.79)$$

Можно также показать, что подключение к разомкнутому концу линии конденсатора C равносильно удлинению линии на значение

$$l_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg}(\omega C Z_B). \quad (2.80)$$

2.5.6 Линия без потерь, нагруженная на активное сопротивление

Рассмотрим режим работы линии без потерь, нагруженной на произвольное активное сопротивление, не равное волновому ($Z_2 = r_2 \neq Z_B$). При такой нагрузке коэффициент отражения в конце линии будет меньше 1, в силу чего в линии будут отраженные волны. При этом амплитуды отраженных волн напряжения и тока не равны амплитудам напряжения и тока падающей волны. Пусть напряжение $\underline{U}_2 = U_2$, тогда ток нагрузки $I_2 = \frac{U_2}{r_2}$ и уравнения (2.69) и (2.70) сможем записать в следующем виде:

$$\underline{U}(y) = U_2 \cos \beta y + j Z_B \frac{U_2}{r_2} \sin \beta y;$$

$$\underline{I}(y) = j \frac{U_2}{Z_B} \sin \beta y + \frac{U_2}{r_2} \cos \beta y.$$

Обозначив $m = \frac{Z_B}{r_2}$ и подставив в записанные выше уравнения, получим:

$$\underline{U}(y) = U_2 (\cos \beta y + m j \sin \beta y); \quad (2.81)$$

$$\underline{I}(y) = \frac{U_2}{Z_B} (m \cos \beta y + j \sin \beta y). \quad (2.82)$$

Воспользовавшись формулой Эйлера $e^{j\beta y} = \cos \beta y + j \sin \beta y$ и выразив из нее $\cos \beta y = e^{j\beta y} - j \sin \beta y$ и $j \sin \beta y = e^{j\beta y} - \cos \beta y$, приведем уравнения к конечному виду:

$$\underline{U}(y) = U_2(\cos \beta y + m e^{j\beta y} - m \cos \beta y) = U_2 [m e^{j\beta y} + (1 - m) \cos \beta y];$$

$$\underline{I}(y) = \frac{U_2}{Z_B}(m e^{j\beta y} - m j \sin \beta y + j \sin \beta y) = \frac{U_2}{Z_B} [m e^{j\beta y} + (1 - m) j \sin \beta y].$$

Запишем выражения для мгновенных значений напряжения и тока в линии

$$u(t, y) = m U_{2m} \sin(\omega t + \beta y) + (1 - m) U_{2m} \sin \omega t \cos \beta y;$$

$$i(t, y) = m \frac{U_{2m}}{Z_B} \sin(\omega t + \beta y) + (1 - m) \frac{U_{2m}}{Z_B} \cos \omega t \sin \beta y.$$

В этих уравнениях напряжение и ток выражены суммами двух слагаемых. Первые слагаемые в уравнениях представляют бегущие волны напряжения и тока соответственно, а вторые слагаемые – стоячие волны напряжения и тока.

При несогласованной нагрузке в линии возникают отраженные волны, которые накладываются на падающие, что приводит к *режиму смешанных волн*. Чем сильнее коэффициент m отличается от единицы в ту или иную сторону, тем резче выявятся стоячие волны.

При $m = 0$ (холостой ход) и $m = \infty$ (короткое замыкание) в линии наблюдаются, как следует из уравнений (2.67) и (2.68), только стоячие волны.

Если $m = 1$, то имеет место согласованный режим, стоячие волны отсутствуют, и в линии есть только бегущие волны.

Выразим зависимости модулей действующих значений напряжения U и тока I в линии в функции координаты y согласно формулам (2.79) и (2.80):

$$U(y) = U_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y}; \quad (2.83)$$

$$I(y) = \frac{U_2}{Z_B} \sqrt{m^2 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y}. \quad (2.84)$$

На рисунке 2.14 показаны графики изменения действующих значений напряжения и тока вдоль линии при работе на несогласованную нагрузку. Как видно из графиков, действующие значения напряжения (тока) в различных точках линии не одинаковы. В отличие от режима стоячих волн действующие значения напряжения и тока распределены не по синусоидальному закону, а их минимальные значения не равны нулю.

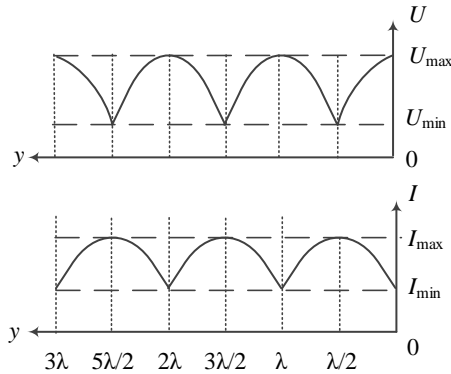


Рисунок 2.14

Для оценки согласованности линии с нагрузкой вводят *коэффициент бегущей волны*, который определяют как отношение минимального напряжения к максимальному:

$$k_{\text{бв}} = \frac{U_{\text{min}}}{U_{\text{max}}} = \frac{U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}} = \frac{1 - n_2}{1 + n_2}. \quad (2.85)$$

Коэффициент бегущей волны можно выразить также и через токи, учитывая, что напряжение и ток в линии связаны между собой законом Ома:

$$U_{\text{max}} = Z_{\text{в}} I_{\text{max}} \quad \text{и} \quad U_{\text{min}} = Z_{\text{в}} I_{\text{min}},$$

откуда

$$k_{\text{бв}} = \frac{I_{\text{min}}}{I_{\text{max}}}.$$

Часто вместо коэффициента бегущей волны используют обратную величину – *коэффициент стоячей волны*:

$$k_{\text{св}} = \frac{1}{k_{\text{бв}}}.$$

Коэффициент бегущей волны в зависимости от согласованности нагрузки может принимать значения от 0 (при холостом ходе, коротком замыкании и чисто реактивной нагрузке) до 1 в режиме согласованной нагрузки. Чем больше $k_{\text{бв}}$, тем ближе режим работы линии к режиму бегущей волны.

В режиме работы линии на согласованную нагрузку ($Z_{\text{л}} = r_2 = Z_{\text{в}}$) при условии, что $\underline{U}_2 = U_2 = Z_{\text{в}} I_2$ уравнения (2.29) и (2.30) принимают вид:

$$\underline{U}(y) = U_2 \cos \beta y + j Z_{\text{в}} I_2 \sin \beta y = U_2 e^{j \beta y};$$

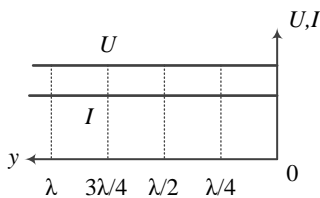


Рисунок 2.15

$$\underline{I}(y) = j \frac{U_2}{Z_B} \sin \beta y + I_2 \cos \beta y = I_2 e^{j\beta y}.$$

Как следует из этих уравнений, при согласованной нагрузке действующие значения напряжения и тока в любой точке линии без потерь постоянны (рисунок 2.15).

Отношение мгновенных напряжений и токов в любой точке линии равно волновому сопротивлению:

му сопротивлению:

$$\frac{u}{i} = Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \text{откуда} \quad \frac{L_0 i^2}{2} = \frac{C_0 u^2}{2}.$$

Следовательно, на любом отрезке линии, нагруженном согласованно, энергия магнитного поля равна энергии электрического поля.

2.5.7 Применение отрезков линии для согласования с нагрузкой

При работе с электротехническими устройствами, которые в качестве приемников подключаются к источникам через линии связи, приходится иметь дело с разными сопротивлениями этих приемников. Сопротивления могут быть чисто резистивными или характеризоваться комплексными величинами. Как отмечалось ранее, при этом предпочтителен режим согласованной нагрузки, при котором сопротивление нагрузки равно волновому сопротивлению линии ($Z_2 = Z_B$). Значение сопротивления нагрузки в большинстве случаев невозможно регулировать. Волновые сопротивления воздушных и кабельных линий без потерь чисто активные и в зависимости от конструкции их значения находятся в относительно узком диапазоне. Высокочастотные кабели выпускаются с несколькими стандартными значениями волновых сопротивлений. Поэтому для получения режима согласованной нагрузки необходимы специальные согласующие устройства. При работе в ультравысоком диапазоне частот в качестве согласующих устройств используют отрезки линий.

Рассмотрим на рисунке 2.16 отрезок линии без потерь длиной $l = \lambda / 4$, нагруженный на чисто резистивное сопротивление r_2 . Пусть $\underline{U}_2 = U_2$, тогда

$\underline{I}_2 = \frac{U_2}{r_2} = I_2$. Применим для схемы уравнения (2.65) и (2.66) с учетом того,

что при $y = \frac{\lambda}{4}$ значение $\beta y = \beta \frac{\lambda}{4} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$$\underline{U}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \underline{U}_2 \cos \frac{\pi}{2} + j Z_B I_2 \sin \frac{\pi}{2} = j Z_B \frac{U_2}{r_2};$$

$$\underline{I}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = j \frac{U_2}{Z_B} \sin \frac{\pi}{2} + I_2 \cos \frac{\pi}{2} = j \frac{U_2}{Z_B}.$$

Найдем входное сопротивление отрезка линии:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U(\lambda/4)}{\underline{I}(\lambda/4)} = \frac{Z_B^2}{r_2}. \quad (2.86)$$

Как следует из формулы, входное сопротивление отрезка линии без потерь длиной $l = \lambda/4$ пропорционально проводимости нагрузки и может изменяться в широких пределах при изменении волнового сопротивления.

Отрезок линии без потерь длиной $l = \lambda/4$ называют *четвертьволновым трансформатором*, который может преобразовывать (трансформировать) большое сопротивление в малое и наоборот. Волновое сопротивление трансформатора будем обозначать $Z_{\text{тр}}$.

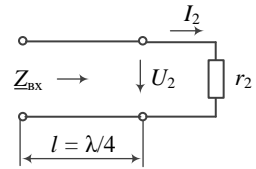


Рисунок 2.16

Таким образом, при чисто активной нагрузке приемника с сопротивлением $Z_2 = r_2$ в целях согласования между приемником и линией передачи с волновым сопротивлением Z_B включают четвертьволновой трансформатор (рисунок 2.17). Волновое сопротивление $Z_{\text{тр}} = \sqrt{Z_{\text{вх}} r_2}$ четвертьволнового трансформатора выбирают так, чтобы входное сопротивление нагруженного трансформатора $Z_{\text{вх}}$ равнялось волновому сопротивлению линии передачи ($Z_{\text{вх}} = Z_B$).

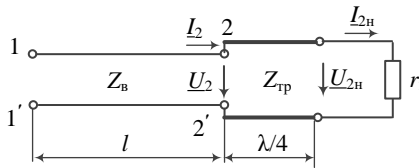


Рисунок 2.17

Таким образом, в режиме согласования вдоль линии передачи длиной l (см. рисунок 2.17) распространяется только бегущая волна, отражение волны в конце линии отсутствует. В линии длиной $\lambda/4$ наряду с падающей есть и отраженная волна. Так как четвертьволновой трансформатор представляет собой линию без потерь, то вся мощность волны в линии передачи поглощается сопротивлением нагрузки.

Если сопротивление нагрузки носит комплексный характер, то необходимо любым способом устранить реактивную часть этой нагрузки.

В общем случае при комплексной нагрузке согласование сопротивления нагрузки линии с ее волновым сопротивлением осуществляют путем подключения к линии *согласующего шлейфа* – короткозамкнутого или разомкнутого отрезка линии.

На рисунке 2.18 к точкам *a* и *b* линии с волновым сопротивлением Z_B на расстоянии l_1 от нагрузки Z_2 подключен короткозамкнутый шлейф длиной l_2 и с волновым сопротивлением Z'_B . Изменяя длину шлейфа l_2 и расстояние l_1 , добиваются согласования, которое в данном случае имеет место при равенстве волнового сопротивления линии Z_B эквивалентному сопротивлению участков относительно зажимов *a* и *b*:

$$\underline{Z}_{ab} = r_{ab} + jx_{ab} = \frac{\underline{Z}_{BX} \underline{Z}'_{BX}}{\underline{Z}_{BX} + \underline{Z}'_{BX}},$$

где $\underline{Z}_{BX} = Z_B \frac{Z_2 + jZ_B \operatorname{tg} \beta l_1}{Z_B + jZ_2 \operatorname{tg} \beta l_1}$ – входное сопротивление основной линии;

$\underline{Z}'_{BX} = jZ'_B \operatorname{tg} \beta l_2$ – входное сопротивление короткозамкнутого согласующего шлейфа.

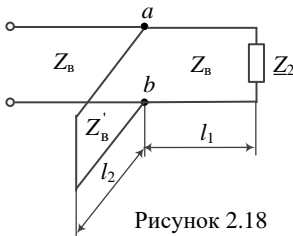


Рисунок 2.18

Если для согласования используют разомкнутый шлейф, следует воспользоваться формулой

$$\underline{Z}'_{BX} = -jZ'_B \operatorname{ctg} \beta l_2.$$

При согласовании сопротивлений с помощью шлейфа имеют место следующие соотношения: $r_{ab} = Z_B$ и $x_{ab} = 0$.

При этих условиях в линии между нагрузкой и местом присоединения шлейфа устанавливаются стоячие волны, а в остальной части линии – бегущие.

2.6 Переходные процессы в длинных линиях

В цепях с распределенными параметрами, системах электроснабжения, линиях связи переходные процессы возникают при коммутациях, связанных с изменением режима цепи (включением и отключением отдельных участков), при передаче по линии непериодических сигналов, возникновении различного рода аварийных режимов. Кроме того, переходные процессы в длинных линиях могут возникать и в случае изменения электромагнитных полей в окружающем пространстве, например, во время грозы. Эти процессы, происходящие в длинных линиях, в значительной степени отличаются от переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами. В линиях они имеют волновой характер. Напряжения и токи во время переходного

процесса, как и в установившемся режиме, зависят от двух переменных: времени t и координаты x . Изменения напряжения и тока, вызванные коммутацией в какой-либо точке линии, распространяются в другие части цепи с конечной скоростью. Будем полагать, что вдоль воздушных линий эти изменения распространяются приблизительно со скоростью света, а кабельных – в два раза меньшей.

2.6.1 Общее решение уравнений переходного процесса

Для исследования переходного процесса в однородной двухпроводной линии будем использовать телеграфные уравнения (2.1) и (2.2), а с целью упрощения анализа будем рассматривать линию без потерь ($r_0 = 0, g_0 = 0$). В этом случае уравнения примут следующий вид:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (2.87)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.88)$$

Преобразуем эту систему уравнений, исключив из первого уравнения ток i , а из второго напряжение u . С этой целью продифференцируем по x уравнение (2.87) и с учетом уравнения (2.88) получим:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right) = L_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right) = L_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Аналогичным образом можно получить уравнение для тока:

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = C_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = C_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = C_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \right) = -L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}.$$

В итоге приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0. \quad (2.90)$$

Полученные дифференциальные уравнения (2.89) и (2.90) известны в математике как *уравнения колебания струны*. Решение этих уравнений было дано французским математиком Даламбером и имеет вид:

$$u(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt); \quad (2.91)$$

$$i(x, t) = \frac{f_1}{Z_B}(x - vt) - \frac{f_2}{Z_B}(x + vt), \quad (2.92)$$

где $Z_B = \sqrt{L_0/C_0}$ – волновое сопротивление линии;

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad \text{– скорость волны, численно равная фазовой.}$$

Первый член в уравнении (2.91) $f_1(x - vt)$ представляет собой одиночную *падающую (прямую)* волну напряжения, которая перемещается со скоростью v от начала линии к ее концу, т. е. в сторону возрастающих значений координаты x . Второй член уравнения $f_2(x + vt)$ соответствует *отраженной (обратной)* волне напряжения, перемещающейся со скоростью v от конца линии к началу. Таким образом, в любой момент времени изменения напряжения и тока во время переходного процесса в однородной линии без потерь можно рассматривать в виде соответствующих алгебраических сумм двух волн, движущихся в противоположных направлениях с одинаковой

скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$:

$$u(x, t) = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}};$$

$$i(x, t) = \frac{u_{\text{пад}}}{Z_B} - \frac{u_{\text{отр}}}{Z_B} = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}}.$$

Форма падающей и отраженной волн зависит от граничных и начальных условий и сохраняется неизменной при движении волн вдоль однородной линии без потерь.

2.6.2 Возникновение волн с прямоугольным фронтом

Исследуем физическую картину явлений, происходящих при подключении однородной двухпроводной линии без потерь длиной l к источнику. На рисунке 2.19, a незаряженная линия, т. е. не имеющая запаса энергии, в момент $t = 0$ подключается к источнику с постоянным напряжением U_0 и внутренним сопротивлением, равным нулю. После замыкания ключа K линия подобно конденсатору начинает заряжаться, и в ней формируется волна с напряжением U_0 , движущаяся от источника вдоль линии со скоростью v . Волна достигает конца линии не мгновенно, а через время $\tau = l/v$.

Будем полагать, что в момент времени t волна напряжения дошла до сечения mn . Тогда слева от mn между проводами устанавливается напряжение

U_0 , и каждая единица длины линии приобретает заряд $q_0 = C_0 U_0$. На поверхности верхнего провода накапливается положительный заряд, а на поверхности нижнего провода – отрицательный заряд. Справа от сечения mn , т. е. в точках линии, до которых волна еще не дошла, напряжение и ток равны нулю. Точка линии, ограничивающая участок, до которого дошло волновое возмущение, называется *фронтом волны*. Таким образом, сечение mn , определяющее некоторую координату x линии, представляет собой *прямоугольный фронт* падающей (прямой) волны напряжения U_0 .

За время dt фронт волны напряжения переместится на расстояние $dx = vdt$, и этот отрезок линии получит заряд $dq = q_0 dx = C_0 U_0 dx$, распространение которого порождает в линии ток $i = \frac{dq}{dt} = C_0 U_0 \frac{dx}{dt} = C_0 U_0 v = I_0$.

Ток i течет от положительного полюса источника по верхнему проводу и возвращается к отрицательному полюсу по нижнему проводу. Замкнутая цепь тока получается за счет тока смещения на фронте волны, обусловленного возникновением электрического поля между заряжаемыми элементами проводов mp и nq . По мере перемещения волны вдоль линии контур, по которому протекает ток, увеличивается, но ток в цепи при этом остается неизменным и равным I_0 . Таким образом, по линии одновременно с волной напряжения перемещается волна тока (рисунок 2.19, б).

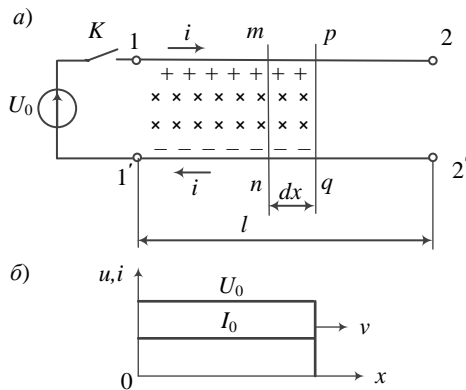


Рисунок 2.19

В контуре, по которому течет ток I_0 , создается магнитный поток Φ , направление которого определяется правилом правого винта. Линии магнитной индукции направлены перпендикулярно осям проводов и обозначены крестиками на рисунке 19, а. При перемещении волны тока на расстояние dx в контуре $mpqn$ за счет приращения магнитного потока на значение $d\Phi = L_0 I_0 dx$ наводится ЭДС самоиндукции

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_0 I_0 \frac{dx}{dt} = -L_0 I_0 v,$$

действующая против направления движения часовой стрелки. Эта ЭДС самоиндукции у фронта волны направлена по линии qp , равна и противоположна напряжению $U_0 = L_0 I_0 v$.

Отношение напряжения к току равно волновому сопротивлению:

$$\frac{U_0}{I_0} = L_0 v = L_0 \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_B.$$

Рассмотрим процесс с энергетической точки зрения. Энергия, генерируемая источником и поступающая в линию в единицу времени, равна $U_0 I_0$. За единицу времени электромагнитная волна распространяется на расстояние v . При этом каждой единице длины линии сообщается энергия $W_3 = \frac{C_0 U_0^2}{2}$ на создание электрического поля и $W_M = \frac{L_0 I_0^2}{2}$ — на образование магнитного поля. В соответствии с законом сохранения энергии запишем уравнение баланса энергии:

$$U_0 I_0 = \left(\frac{C_0 U_0^2}{2} + \frac{L_0 I_0^2}{2} \right) v.$$

Подставив в левую часть уравнения ток $I_0 = C_0 U_0 v$, получим

$$C_0 U_0 v = \left(\frac{C_0 U_0^2}{2} + \frac{L_0 I_0^2}{2} \right) v,$$

откуда следует, что
$$\frac{C_0 U_0^2}{2} = \frac{L_0 I_0^2}{2}.$$

Полученное соотношение показывает, что во время движения по линии падающей электромагнитной волны энергия, получаемая от источника, распределяется поровну между электрическим и магнитным полями.

Когда падающая волна достигает конца линии, к которому присоединяется какая-либо нагрузка или другая линия с другим волновым сопротивлением, то часть падающей волны переходит в нагрузку, а другая часть отражается. При этом появится отраженная (обратная) волна, бегущая к источнику с той же скоростью v . Вид отраженной волны зависит от характера нагрузки линии.

При исследовании переходных процессов в линии без потерь могут наблюдаться неоднократные отражения волн в конце линии от нагрузки и в начале линии – от источника.

2.6.3 Включение линии, разомкнутой на конце

При коммутации разомкнутой линии без потерь на источник постоянного напряжения U_0 с нулевым внутренним сопротивлением по линии в интервале $0 \leq t \leq \tau$ распространяется волна напряжения U_0 с прямоугольным фронтом. Эта волна при своем движении заряжает линию до напряжения U_0

и создает ток $I_0 = \frac{U_0}{Z_{\text{в}}}$. Графики распределения напряжения и тока вдоль

линии для времени $0 < t < \tau$ приведены на рисунке 2.20, а.

В момент $t = \tau$ волны напряжения и тока достигают конца линии и отражаются, при этом коэффициент отражения $n_2 = 1$. Отраженная волна напряжения $u_{\text{отр}} = n_2 U_0 = U_0$ накладывается на падающую волну, в силу чего при движении отраженной волны в направлении источника напряжение в линии увеличивается до значения $2U_0$. При этом увеличивается энергия электрического поля. Отраженная волна тока $-i_{\text{отр}} = -n_2 I_0 = -I_0$, накладывается на падающую волну, уменьшает ток в линии до нуля, что приводит к исчезновению магнитного поля. При достижении отраженными волнами начала линии по всей ее длине устанавливается напряжение, равное $2U_0$, при нулевом значении тока.

В течение всего этого времени линия получала энергию от источника. К моменту времени, равного 2τ , эта энергия оказалась сосредоточенной в

электрическом поле со значением $\frac{C_0(2U_0)^2 l}{2} = 2C_0 U_0 L_0 I_0 v l = U_0 I_0 \frac{2l}{v}$, т. е.

равной энергии, поступившей за это время от источника. Графики распределения напряжения и тока вдоль линии для времени $\tau < t < 2\tau$ представлены на рисунке 2.20, б. Заштрихованные части эпюр соответствуют результирующим распределениям напряжений и токов в линии в результате наложения соответствующих отраженных волн на падающие.

Как только отраженная волна напряжения дойдет до источника, она вторично отражается с изменением знака, так как коэффициент отражения в начале линии $n_1 = -1$. Вторично отраженная от источника волна напряжения распространяется со скоростью v от начала линии к ее концу, снижая напряжение в линии до U_0 . Этот процесс сопровождается уменьшением заряда на единицу длины с $2q_0$ до q_0 , что равносильно появлению в линии тока I_0 , текущего в обратном направлении. Этот ток будет создавать магнитное поле, направление которого также изменится на противоположное по сравнению с исходным.

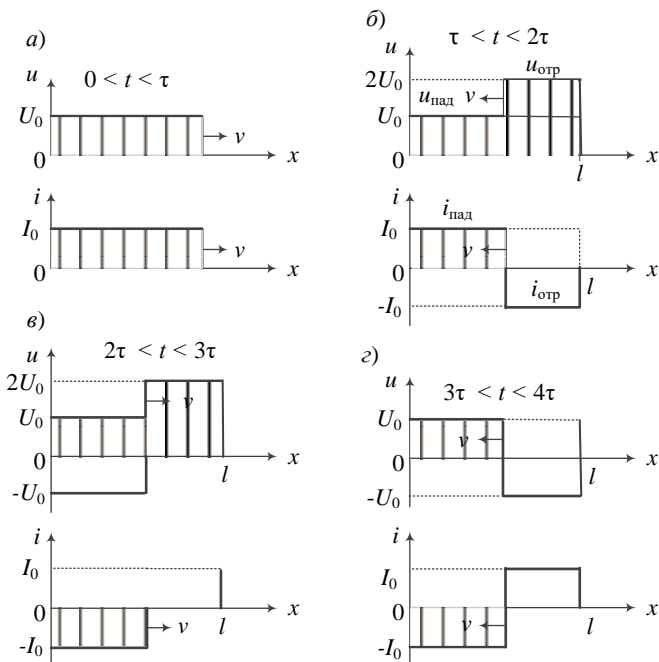


Рисунок 2.20

Таким образом, можно констатировать, что в момент $t = 2\tau$ волны напряжения и тока, отразившись от источника с переменной знака, начинают перемещаться вдоль по линии от начала к концу, накладываясь на волны, ранее созданные в линии. На рисунке 2.20, в показано распределение напряжения и тока при $2\tau < t < 3\tau$.

В момент времени $t = 3\tau$ новые волны напряжения и тока дойдут до разомкнутого конца линии и повторно отразятся от нагрузки без изменения знака, т. е. к источнику пойдет волна напряжения $-U_0$ и волна тока I_0 (рисунок 2.20, г). К моменту времени $t = 4\tau$ линия окажется полностью обесточенной и разряженной, после чего процессы в линии повторяются.

На рисунке 2.21 приведены графики изменения напряжения (а) и тока (б) в середине линии.

Таким образом, при включении на постоянное напряжение линии без потерь, разомкнутой на конце, возникает циклический переходный процесс, с частотой собственных колебаний

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{4l} = \frac{1}{4l\sqrt{L_0C_0}},$$

где $T = 4\tau$ – период собственных колебаний линии.

Рассмотренный переходный процесс аналогичен электромагнитному процессу в параллельном колебательном контуре без потерь, когда при подключении его к источнику постоянного напряжения в нем возникают незатухающие колебания.

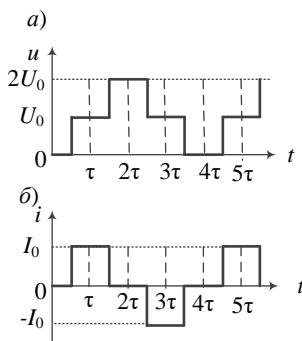


Рисунок 2.21

2.6.4 Включение линии, замкнутой накоротко на конце

Используя аналогичную рассмотренной выше методике, исследуем переходный процесс в короткозамкнутой в конце линии при подключении ее к источнику постоянного напряжения. Переходный процесс после коммутации короткозамкнутой линии на источник постоянного напряжения U_0 на первой стадии, т. е. в интервале времени $0 < t < \tau$, будет таким же, как и в рассмотренном выше случае (рисунок 2.22, а). По линии от начала к ее концу будут распространяться падающие волны напряжения U_0 и тока I_0 с прямоугольным фронтом. При достижении волнами конца линии они отражаются и, перемещаясь в направлении источника, накладываются на соответствующие падающие волны. Коэффициент отражения в конце линии $n_2 = -1$. Поэтому отраженная волна напряжения будет равна $-U_0$, а отраженная волна тока будет иметь значение I_0 . Распределения напряжения и тока вдоль линии в интервале $\tau < t < 2\tau$ приведены на рисунке 2.22, б. К моменту времени $t = 2\tau$ напряжение по всей длине линии уменьшается до нуля, что сопровождается исчезновением электрического поля. Ток в линии удваивается по сравнению с начальным значением, при этом вся энергия, поступившая в линию, сосредоточивается в ее магнитном поле. Следовательно,

$$W_M = \frac{L_0(2I_0)^2}{2} l = \frac{L_0 U_0 I_0}{Z_B} 2l = \frac{L_0 U_0 I_0}{\sqrt{L_0/C_0}} 2l = U_0 I_0 \frac{2l}{v},$$

т. е. энергия магнитного поля равна всей энергии, поступившей в линию от источника за время $t = 2\tau$. Дошедшие до источника волны напряжения и тока вновь отражаются с коэффициентом отражения $n_1 = -1$. От источника вновь пойдет волна напряжения, которая будет заряжать линию до напряжения U_0 , а отраженная волна тока увеличивает его значение в линии до $3I_0$.

Волны напряжения и тока, достигнув конца линии, вновь отражаются от короткозамкнутого конца линии и, распространяясь в направлении источника, накладываются на предыдущие.

В результате ток в линии увеличивается до $4I_0$, в то время как напряжение на всех участках линии падает до нуля. Соответствующие эпюры распределения напряжения и тока вдоль линии даны на рисунках 2.22, в и г.

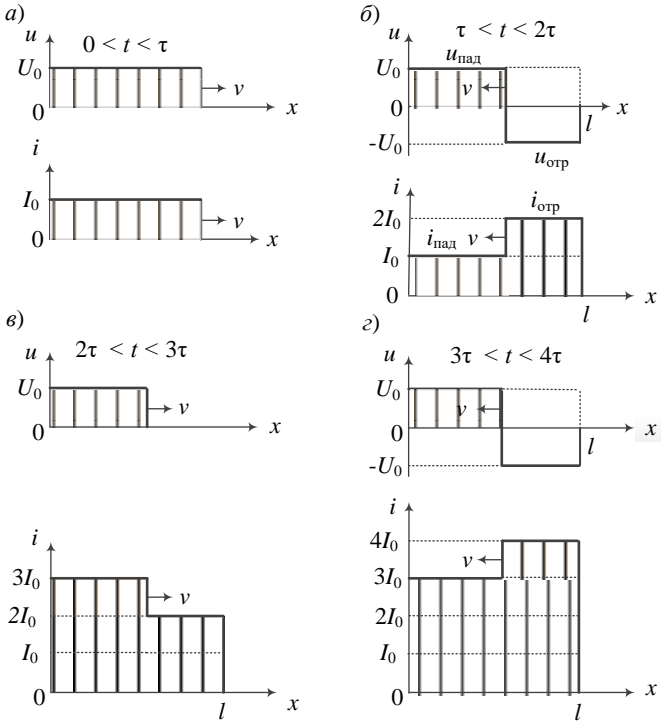


Рисунок 2.22

Как следует из приведенных графиков, за каждый проход электромагнитной волны вдоль линии напряжение во всех сечениях линии, за исключением $x = 0$ и $x = l$, изменяется либо от нуля до U_0 , либо от U_0 до нуля, а ток возрастает на I_0 . В конце линии напряжение все время равно нулю, а ток возрастает скачками, равными $2I_0$.

Итак, при бесконечно большой мощности источника с постоянным напряжением U_0 и при отсутствии потерь в линии ток теоретически может возрастать до бесконечно больших значений. В реальных условиях ток в короткозамкнутой линии не может превышать некоторого предельного значения, определяемого фактическими параметрами линии.

2.6.5 Включение линии, нагруженной на активное сопротивление

Рассмотрим переходный процесс при подключении источника постоянного напряжения U_0 с нулевым внутренним сопротивлением к линии длиной l , нагруженной на активное сопротивление r_2 (рисунок 2.23).

После коммутации при $t = 0$, как и в рассмотренных выше случаях, по линии будут распространяться падающие волны напряжения U_0 и тока $I_0 = U_0/Z_B$ со скоростью v . Коэффициент отражения в конце линии $n_2 = \frac{r_2 - Z_B}{r_2 + Z_B}$

может принимать значения в диапазоне от $+1$ до -1 в зависимости от значения r_2 .

В режиме согласованной нагрузки, т. е. при $r_2 = Z_B$, отраженных волн нет. В цепи, как только падающая волна дойдет до конца линии, наступает установившийся режим, при котором линия заряжается до напряжения источника и по ней протекает постоянный ток I_0 . Вся энергия, поступающая от источника, поглощается в сопротивлении r_2 .

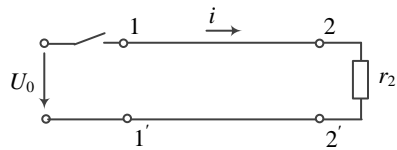


Рисунок 2.23

Если сопротивление нагрузки линии не равно волновому, то после достижения конца линии падающие волны напряжения и тока частично отражаются от нагрузки. Отраженные волны напряжения $u_{отр} = n_2 U_0$ и тока $i_{отр} = n_2 I_0$ движутся по направлению к источнику. Если $r_2 > Z_B$, то $n_2 > 0$, и волны отражаются без изменения знака. При $r_2 < Z_B$ коэффициент n_2 принимает отрицательные значения, и отражение происходит с изменением знака.

Достигнув начала линии, волны напряжения и тока вновь отражаются от короткозамкнутого участка и, распространяясь в направлении источника, накладываются на предыдущие.

Значения напряжения и тока в линии при многократных отражениях волн от конца линии и от ее начала приведены в таблице 2.1. Примем следующие обозначения:

$\tau_x = \frac{x}{v}$ — время распространения падающей волны до точки, отстоящей от начала линии на расстоянии x ;

$\tau - \tau_x$ — время распространения отраженной волны от конца линии до точки наблюдения;

$\tau = \frac{l}{v}$ — время распространения волны вдоль всей линии.

Таблица 2.1

Время	Напряжение	Ток
$0 < t < \tau_x$	0	0
$\tau_x < t < 2\tau - \tau_x$	U_0	I_0
$2\tau - \tau_x < t < 2\tau + \tau_x$	$U_0 - n_2 U_0$	$I_0 + n_2 I_0$
$2\tau + \tau_x < t < 4\tau - \tau_x$	U_0	$I_0 + 2n_2 I_0$
$4\tau - \tau_x < t < 4\tau + \tau_x$	$U_0 - n_2^2 U_0$	$I_0 + 2n_2 I_0 + n_2^2 I_0$
$4\tau + \tau_x < t < 6\tau - \tau_x$	U_0	$I_0 + 2n_2 I_0 + 2n_2^2 I_0$
$6\tau - \tau_x < t < 6\tau + \tau_x$	$U_0 - n_2^3 U_0$	$I_0 + 2n_2 I_0 + 2n_2^2 I_0 + n_2^3 I_0$

На рисунке 2.24 показаны графики изменения во времени напряжения u и тока i для $x = 0,5 l$ и для $n_2 = -0,6$ при $r_2 = 0,25 Z_B$.

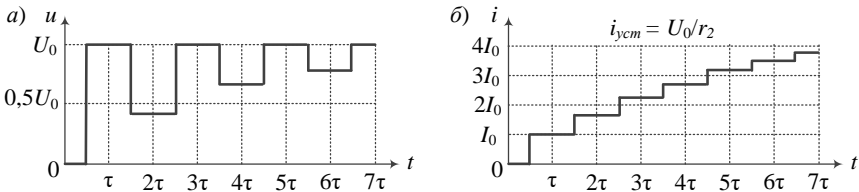


Рисунок 2.24

Как следует из графиков, при $t \rightarrow \infty$ напряжение стремится к U_0 , а ток в линии стремится к установившемуся значению, равному U_0/r_2 .

Переходные процессы, подобные только что рассмотренным, можно наблюдать и в случае перехода волны с прямоугольным фронтом с одной линии на другую, если линии имеют разные значения волновых сопротивлений.

Во всех приведенных выше примерах падающие и отраженные волны имели прямоугольную форму. Однако, если в составе нагрузки, подключенной к линии, будут индуктивные катушки и (или) конденсаторы, то отраженные волны будут иметь форму, отличную от формы падающих волн.

2.6.6 Общие принципы подхода к исследованию переходных процессов в длинных линиях

Рассмотрим общие принципы анализа переходных процессов в длинной линии, когда в какой-либо ее части имеет место нарушение однородности линии. Другими словами, это может происходить, когда, например, при движении падающей волны напряжения U_0 , на ее пути возникают так называемые узлы неоднородности (рисунок 2.25). Под узлами неоднородности в

линии будем понимать точки 2 – 2' линии, в которых, например, сосредоточена нагрузка (см. рисунок 2.25, а), включены отдельные элементы с сосредоточенными параметрами или присоединена линия, имеющая другое волновое сопротивление (см. рисунок 2.25, б). Могут встречаться узлы параллельного включения нескольких линий (см. рисунок 2.25, в) и т. п.

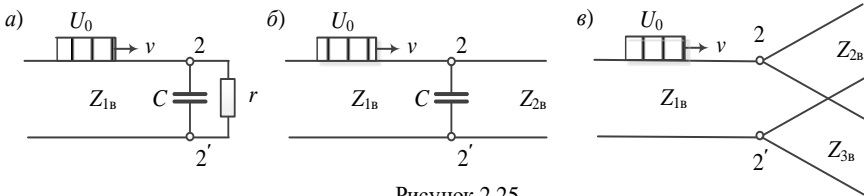


Рисунок 2.25

Пусть вдоль линии без потерь с волновым сопротивлением Z_{1B} движется электромагнитная волна прямоугольной формы с напряжением U_0 и током $I_0 = U_0/Z_{1B}$ (рисунок 2.26, а). В общем случае падающая волна может иметь любую форму фронта.

Во всех случаях часть цепи, следующей непосредственно за узлом неоднородности, можно рассматривать как пассивный двухполюсник, который можно характеризовать некоторым сопротивлением Z_2 .

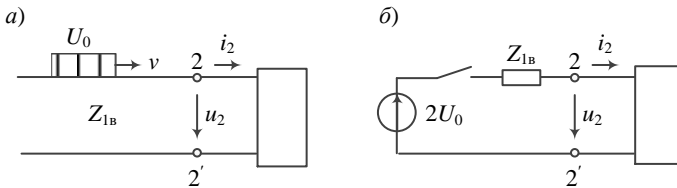


Рисунок 2.26

Примем за начало отсчета исследуемого процесса момент $t = 0$, когда падающая электромагнитная волна, распространяющаяся по линии, достигнув узла неоднородности, частично отражается от него. Напряжение u_2 в конце линии, т. е. на зажимах двухполюсника (см. рисунок 2.26, а), как и напряжение в любой точке линии, независимо от нагрузки можно представить в виде суммы напряжений двух волн, падающей и отраженной:

$$u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}.$$

Это также справедливо в отношении тока в конце линии

$$i_2 = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}} = \frac{u_{\text{пад}}}{Z_{1B}} - \frac{u_{\text{отр}}}{Z_{1B}}.$$

В результате совместного рассмотрения этих уравнений получим:

$$2u_{\text{пад}} = u_2 + Z_{1в}i_2. \quad (2.93)$$

Последнему уравнению соответствует схема с сосредоточенными параметрами на рисунке 2.26, б, где $u_{\text{пад}} = U_0$. Линия на схеме представлена своим волновым сопротивлением $Z_{1в}$. Расчет этой схемы позволяет найти законы изменения напряжения u_2 на нагрузке и тока i_2 .

Таким образом, исследование переходного процесса в длинной линии при падении волны на узел неоднородности $2 - 2'$ можно свести к расчету схемы с сосредоточенными параметрами, который можно выполнить классическим или операторным методом.

Правило расчета, известное под названием правила Петерсена – Пфиффера, гласит:

«При падении на узел волны с напряжением $u_{\text{пад}}$, движущейся по линии с волновым сопротивлением $Z_{в}$, напряжение и ток в этом узле будут такими же, как и при подключении источника с ЭДС, равной напряжению $2u_{\text{пад}}$, и внутренним сопротивлением $Z_{в}$ непосредственно к рассматриваемому узлу».

Это правило применимо только для линии без потерь и для времени с момента прихода падающей волны к узлу $2 - 2'$, который принимают за начало отсчета, до момента прихода волны, отраженной от источника. Таким образом, в рассматриваемый интервал времени в любой точке линии присутствуют только две волны: падающая и отраженная.

Зная напряжение u_2 и ток i_2 , можно определить напряжение и ток в отраженных волнах:

$$u_{\text{отр}} = u_2 - u_{\text{пад}}; \quad i_{\text{отр}} = i_{\text{пад}} - i_2.$$

По найденным значениям напряжений и токов падающей и отраженной волн можно найти распределение напряжения и тока вдоль линии для любого момента времени и построить соответствующие графики.

2.7 Примеры решения задач

Пример 2.1 Воздушная линия связи работает на частоте $f = 1000$ Гц и имеет следующие первичные параметры: $r_0 = 2,4$ Ом/км; $L_0 = 1,8 \cdot 10^{-3}$ Гн/км; $g_0 = 0,8 \cdot 10^{-6}$ См/км; $C_0 = 6,4 \cdot 10^{-9}$ Ф/км.

Найти волновое сопротивление $Z_{в}$, коэффициент распространения $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$, а также длину волны λ и фазовую скорость v .

Решение. Найдем значения величин Z_0 и \underline{Y}_0 по формулам (2.5) и (2.6):

$$Z_0 = r_0 + j2\pi f L_0 = 2,4 + j2\pi \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3} = 2,4 + j11,31 \text{ Ом/км};$$

$$\begin{aligned}\underline{Y}_0 &= g_0 + j2\pi fC_0 = 0,8 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 10^3 \cdot 6,4 \cdot 10^{-9} = \\ &= 0,8 \cdot 10^{-6} + j40,21 \cdot 10^{-6} \text{ См/км.}\end{aligned}$$

Подставив найденные значения \underline{Z}_0 и \underline{Y}_0 в формулы (2.7) и (2.11), вычислим коэффициент распространения

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(2,4 + j11,31)(0,8 \cdot 10^{-6} + j40,21 \cdot 10^{-6})} = \\ &= \sqrt{465 \cdot 10^{-6} e^{j166,9^\circ}} = 21,56 \cdot 10^{-3} e^{j83,45^\circ} = 2,46 \cdot 10^{-3} + j21,42 \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}\end{aligned}$$

и волновое сопротивление линии

$$\underline{Z}_в = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{2,4 + j11,31}{0,8 \cdot 10^{-6} + j40,21 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{0,287 \cdot 10^6 e^{-j10,8^\circ}} = 535,7 e^{-j5,4^\circ} \text{ Ом.}$$

Коэффициент ослабления $\alpha = \text{Re} \underline{\gamma} = 2,46 \cdot 10^{-3}$ Нп/км; коэффициент фазы $\beta = \text{Im} \underline{\gamma} = 21,42 \cdot 10^{-3}$ рад/км.

Длину волны λ и фазовую скорость v определим согласно формулам (2.16) и (2.17):

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{21,42 \cdot 10^{-3}} = 293,3 \text{ м, } v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 10^3}{21,37 \cdot 10^{-3}} = 293333 \text{ км/с.}$$

Пример 2.2 Определить первичные параметры r_0 , L_0 , g_0 и C_0 линии с волновым сопротивлением $\underline{Z}_в = 560 e^{-j8,4^\circ}$ Ом и коэффициентом распространения $\underline{\gamma} = 18,2 \cdot 10^{-3} e^{j78,6^\circ}$ 1/км при частоте $f = 500$ Гц.

Решение. Из соотношений $\underline{Z}_в = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$ и $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}$ находим значения

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_в \underline{\gamma} = 560 e^{-j8,4^\circ} \cdot 18,2 \cdot 10^{-3} e^{j78,6^\circ} = 10,192 e^{j70,2^\circ} = 3,452 + j9,589 \text{ Ом и}$$

$$\underline{Y}_0 = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_в} = \frac{18,2 \cdot 10^{-3} e^{j78,6^\circ}}{560 e^{-j8,4^\circ}} = 32,5 \cdot 10^{-6} e^{j87^\circ} = 1,7 \cdot 10^{-6} + j32,455 \cdot 10^{-6} \text{ См/км.}$$

Принимая во внимание, что $\underline{Z}_0 = r_0 + j2\pi fL_0$ и $\underline{Y}_0 = g_0 + j2\pi fC_0$, определяем первичные параметры линии:

$$r_0 = 3,452 \text{ Ом/км}; \quad L_0 = \frac{9,589}{2\pi f} = 3,052 \text{ мГн/км};$$

$$g_0 = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}; \quad C_0 = \frac{32,455 \cdot 10^{-6}}{2\pi f} = 10,331 \text{ нФ/км}.$$

Пример 2.3 Для определения параметров кабельной линии связи длиной $l = 100$ км были проведены измерения входного сопротивления линии в режимах холостого хода и короткого замыкания на частоте $f = 900$ Гц, которые дали следующие результаты: $Z_x = 940e^{-j52^\circ}$ Ом, $Z_k = 1200e^{-j36^\circ}$ Ом.

Определить первичные параметры линии.

Решение. По заданным значениям сопротивлений линии Z_x при холостом ходе и Z_k при коротком замыкании по формуле (2.53) найдем волновое сопротивление

$$Z_B = \sqrt{Z_x Z_k} = \sqrt{940e^{-j52^\circ} \cdot 1200e^{-j36^\circ}} = 1062,1e^{-j44^\circ} = 764 - j737,8 \text{ Ом},$$

а по формуле (2.54) – значение

$$\text{th}\underline{\gamma}l = \sqrt{\frac{Z_k}{Z_x}} = \sqrt{\frac{1200e^{-j36^\circ}}{940e^{-j52^\circ}}} = 1,13e^{j8^\circ} = 1,12 + j0,157.$$

Для определения коэффициента распространения $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ рассчитаем его составляющие α и β . По формуле (2.57) найдем значение коэффициента ослабления:

$$\alpha = \frac{1}{2l} \ln \left| \frac{1 + \text{th}\underline{\gamma}l}{1 - \text{th}\underline{\gamma}l} \right| = \frac{1}{2l} \ln \left| \frac{2,12 + j0,157}{-0,12 - j0,157} \right| = \frac{1}{2 \cdot 100} \ln 10,76 = 0,012 \text{ Нп/км}.$$

Расчет коэффициента фазы выполним, применив формулу (2.58):

$$\beta = \frac{1}{2l} \left(\arg \frac{2,12 + j0,157}{-0,12 - j0,157} + 2k\pi \right) = \frac{1}{2l} (2,3 + 2k\pi).$$

Для определения значения коэффициента k , который входит в формулу в виде целого числа, примем приближенно для кабельной линии скорость распространения волны $v = 1,5 \cdot 10^5$ км/с, что позволит ориентировочно определить длину волны $\lambda = \frac{v}{f} = 166,7$ км. Длина линии меньше длины электромагнитной волны, следовательно, коэффициент фазы β соответствует глав-

ному аргументу комплексного числа $\underline{\gamma}$ и по абсолютному значению не может превышать $\pi/2$.

Таким образом,
$$\beta = \frac{2,3}{200} = 11,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км.}$$

Найдем значение коэффициента распространения:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = 0,012 + j0,0115 \text{ 1/км.}$$

Определим первичные параметры линии таким же образом, как это было выполнено в примере 2.2.

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_B \underline{\gamma} = (764 - j737,8)(0,012 + j0,0115) = 17,653 + j0,0088 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Y}_0 = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_B} = \frac{0,012 + j0,01155}{767,2 - j734,5} = 0,606 \cdot 10^{-6} + j15,64 \cdot 10^{-6} \text{ См/км.}$$

Из соотношений $\underline{Z}_0 = r_0 + j2\pi f L_0$ и $\underline{Y}_0 = g_0 + j2\pi f C_0$, следует, что

$$r_0 = 17,653 \text{ Ом/км; } L_0 = \frac{0,0676}{2\pi f} = 11,96 \text{ мкГн/км;}$$

$$g_0 = 0,606 \cdot 10^{-6} \text{ См/км; } C_0 = \frac{15,64 \cdot 10^{-6}}{2\pi f} = 2,766 \text{ нФ/км.}$$

Пример 2.4 Линия подключена к источнику синусоидального напряжения $U_1 = 100 \text{ В}$ с угловой частотой $\omega = 2400 \text{ с}^{-1}$ и нагружена на сопротивление $\underline{Z}_2 = 800 + j600 \text{ Ом}$. Вторичные параметры линии: $\underline{Z}_B = 500e^{-j12^\circ} \text{ Ом}$, $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = 0,004 + j0,016 \text{ 1/км}$. Длина линии $l = 180 \text{ км}$. Определить:

- 1) напряжение \underline{U}_2 и ток \underline{I}_2 в конце линии;
- 2) ток \underline{I}_1 источника;
- 3) мощности P_1 на входе и P_2 на выходе линии, а также коэффициент полезного действия η линии;
- 4) входное сопротивление линии в нагруженном состоянии.

Решение. Для нахождения искомым величин воспользуемся уравнениями (2.31) и (2.32):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_B \underline{I}_2 \text{sh} \underline{\gamma} l;$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \text{sh} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \text{ch} \underline{\gamma} l.$$

Вычислим значения величин

$$\operatorname{ch}\underline{\gamma}l = \operatorname{ch}(0,72 + j2,88) = -1,227 + j0,203;$$

$$\operatorname{sh}\underline{\gamma}l = \operatorname{sh}(0,72 + j2,88) = -0,757 + j0,329.$$

Полагая $\underline{U}_1 = U_1$ и принимая во внимание соотношение $\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_2$, найдем напряжение на нагрузке

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \frac{\underline{U}_1}{\operatorname{ch}\underline{\gamma}l + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_2} \operatorname{sh}\underline{\gamma}l} = \frac{100}{-1,227 + j0,203 + \frac{489,07 - j103,96}{800 + j600} (-0,757 + j0,329)} = \\ &= -61,91 - j27,28 = 67,65e^{-j156,2^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

$$\text{Ток нагрузки } \underline{I}_2 = \frac{-61,91 - j27,28}{800 + j600} = -0,066 + j0,015 = 0,068e^{j166,9^\circ} \text{ А.}$$

Ток источника находим по формуле

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh}\underline{\gamma}l + \underline{I}_2 \operatorname{ch}\underline{\gamma}l = \frac{-61,91 - j27,28}{489,07 - j103,96} (-0,757 + j0,329) + \\ &+ (-0,066 + j0,015)(-1,227 + j0,203) = 0,187 - j8,343 \cdot 10^{-3} = 0,187e^{-j2,6^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{100}{0,187e^{-j2,6^\circ}} = 534,76e^{j2,6^\circ} \text{ Ом.}$$

Мощности на входе и выходе линии

$$P_1 = \operatorname{Re}(\underline{U}_1 \underline{I}_1^*) = \operatorname{Re}[100(0,187 + j8,343 \cdot 10^{-3})] = 18,7 \text{ Вт;}$$

$$P_2 = \operatorname{Re}(\underline{U}_2 \underline{I}_2^*) = \operatorname{Re}[(-61,91 - j27,28)(-0,066 - j0,015)] = 3,68 \text{ Вт.}$$

Коэффициент полезного действия $\eta = P_2 / P_1 = 0,197$.

Пример 2.5 Линия длиной $l = 400$ км подключена к источнику синусоидального напряжения $u_1 = U_{1m} \sin \omega t$ ($U_{1m} = 20$ В, $\omega = 1200$ рад/с) и работает в режиме согласованной нагрузки. Вторичные параметры линии: $\underline{Z}_B = Z_B e^{j\theta} = 600e^{-j10^\circ}$ Ом, $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = 0,0035 + j0,012$ 1/км. Определить:

- 1) значение напряжения на нагрузке;
- 2) значения тока в начале и в конце линии;

Записать выражения для мгновенных значений напряжения и тока в точке линии, отстоящей на расстоянии $x_1 = 50$ км от начала линии.

Решение. При работе линии в режиме согласованной нагрузки, т. е. при равенстве сопротивлений нагрузки \underline{Z}_2 и волнового \underline{Z}_B , в линии будет только падающая электромагнитная волна. Уравнения (2.31) и (2.32) приобретают следующий вид:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_B I_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = \underline{U}_2 (\operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \operatorname{sh} \underline{\gamma} l) = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma} l} = \underline{U}_2 e^{\alpha l} e^{j\beta l};$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} (\operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \operatorname{sh} \underline{\gamma} l) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} e^{\underline{\gamma} l} = \underline{I}_2 e^{\alpha l} e^{j\beta l}.$$

Из представленной системы уравнений вытекает, что входное сопротивление линии в согласованном режиме равно волновому:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_B.$$

Найдем длину волны λ линии по формуле (2.16)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 523,6 \text{ м,}$$

откуда следует, что $\lambda > l$ и для коэффициента β будем использовать только главное значение аргумента.

Из первого уравнения находим напряжение \underline{U}_2 на нагрузке

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_{1m}}{\sqrt{2} e^{\alpha l} e^{j\beta l}} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{-0,0035 \cdot 400} e^{-j4,8} = 3,49 e^{j85^\circ} = 0,304 + j3,477 \text{ В,}$$

а затем по закону Ома ток \underline{I}_2 в конце линии:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{3,49 e^{j85^\circ}}{600 e^{-j10^\circ}} = 5,82 e^{j95^\circ} \text{ мА.}$$

$$\text{Ток источника } \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} = \frac{20}{\sqrt{2} \cdot 600 e^{-j10^\circ}} = 23,6 e^{j10^\circ} \text{ мА.}$$

Мгновенное значение напряжения или тока в точке линии, отстоящей на расстоянии x_1 от ее начала, определяются только соответствующей падающей волной:

$$u(t, x_1) = U_{1m} e^{-\alpha x_1} \sin(\omega t - \beta x_1) = 20 e^{-0,0035 \cdot 50} \sin(1200t - 0,012 \cdot 50) =$$

$$= 16,79 \sin(1200t - 0,6) = 16,79 \sin(1200t - 34,4^\circ) \text{ В};$$

$$i(t, x_1) = I_{1m} e^{-\alpha x_1} \sin(\omega t - \beta x_1 - \theta) = \frac{u}{Z_B} = 28 \sin(1200t - 24,4^\circ) \text{ мА}.$$

Пример 2.6 К однородной линии, находящейся под действием гармонического источника частотой $f = 1$ кГц, подключена нагрузка в виде последовательного включенных резистора сопротивлением $r = 400$ Ом и конденсатора емкостью $C = 0,5$ мкФ. Первичные параметры линии: $r_0 = 6,2$ Ом/км; $L_0 = 2,24$ мГн/км; $g_0 = 0,5$ мкСм/км; $C_0 = 5,12$ нФ/км. Найти коэффициент отражения n_2 в конце линии и коэффициент бегущей волны $k_{бв}$.

Решение. Найдем комплексное сопротивление Z_2 нагрузки и волновое сопротивление Z_B :

$$Z_2 = r - j \frac{1}{2\pi f C} = 400 - j318,3 \text{ Ом};$$

$$Z_B = \sqrt{\frac{r_0 + j2\pi f L_0}{g_0 + j2\pi f C_0}} = 667,64 - j137,15 = 691,38^{-j11,4^\circ} \text{ Ом}.$$

Значения коэффициента отражения в конце линии и коэффициента бегущей волны рассчитываем по формулам (2.34) и (2.79):

$$n_2 = \frac{Z_2 - Z_B}{Z_2 + Z_B} = -0,158 - j0,235 = 0,283e^{-j124^\circ};$$

$$k_{бв} = \frac{1 - |n_2|}{1 + |n_2|} = 0,558.$$

Пример 2.7 Приемник с сопротивлением $Z_{2н} = 500$ Ом подключен к источнику синусоидального напряжения $U_1 = 10$ В через линию без потерь, которая состоит из двух участков: двухпроводной воздушной линии длиной $l_1 = 0,8$ км с параметрами $Z_{1в} = 560$ Ом, $\beta_1 = 5,6$ рад/км и кабельной линии длиной $l_2 = 0,6$ км с параметрами $Z_{2в} = 100$ Ом, $\beta_2 = 6,2$ рад/км (рисунок 2.27).

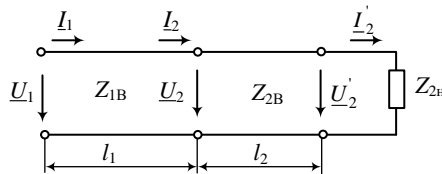


Рисунок 2.27

Определить

1) тока приемника;

значения:

2) мощности источника и приемника.

Решение. Найдем в соответствии с формулой (2.51) входное сопротивление $\underline{Z}_{2\text{вх}}$ кабельной линии, нагруженной на сопротивление $\underline{Z}_{2\text{н}}$. Сопротивление $\underline{Z}_{2\text{вх}}$, в свою очередь, можно рассматривать в качестве нагрузочного сопротивления \underline{Z}_2 воздушной линии:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2\text{вх}} &= \underline{Z}_{2\text{в}} \frac{\underline{Z}_{2\text{н}} + j\underline{Z}_{2\text{в}} \operatorname{tg}\beta_2 l_2}{\underline{Z}_{2\text{в}} + \underline{Z}_{2\text{н}} \operatorname{tg}\beta_2 l_2} = 100 \frac{500 + j100 \operatorname{tg}(6,2 \cdot 0,6)}{100 + j500 \operatorname{tg}(6,2 \cdot 0,6)} = \\ &= 61,19 - j134,44 \text{ Ом.}\end{aligned}$$

На основании уравнений (2.65) и (2.66) запишем выражения для напряжения \underline{U}_1 и тока \underline{I}_1 в начале воздушной линии, т. е. при $y = l_1$:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \cos\beta_1 l_1 + j\underline{Z}_{1\text{в}} \underline{I}_2 \sin\beta_1 l_1; \\ \underline{I}_1 &= j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{1\text{в}}} \sin\beta_1 l_1 + \underline{I}_2 \cos\beta_1 l_1.\end{aligned}$$

Из первого уравнения, полагая $\underline{U}_1 = U_1$ и $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$, найдем напряжение \underline{U}_2 в конце первой линии:

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \frac{\underline{U}_1}{\cos\beta_1 l_1 + j \frac{\underline{Z}_{1\text{в}}}{\underline{Z}_2} \sin\beta_1 l_1} = \frac{10}{\cos(5,6 \cdot 0,8) + j \frac{560}{61,19 - j134,44} \sin(5,6 \cdot 0,8)} = \\ &= 2,58 + j1,26 = 2,87 e^{j26^\circ} \text{ В.}\end{aligned}$$

Ток \underline{I}_1 в начале линии вычислим по второму уравнению:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{1\text{в}}} \sin\beta_1 l_1 + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} \cos\beta_1 l_1 = \left(\frac{\cos\beta_1 l_1}{\underline{Z}_2} + j \frac{\sin\beta_1 l_1}{\underline{Z}_{1\text{в}}} \right) \underline{U}_2 = \\ &= \left(\frac{\cos 4,48}{61,19 - j134,44} + j \frac{\sin 4,48}{560} \right) (2,58 + j1,26) = (2,314 - j8,962) 10^{-3} = \\ &= 9,256 \cdot 10^{-3} e^{-j75,5^\circ} \text{ А.}\end{aligned}$$

Найдем напряжение \underline{U}'_2 приемника, применив формулу (2.66) для кабельной линии:

$$\begin{aligned} \underline{U}'_2 &= \underline{U}_2 \cos \beta_2 l_2 - j Z_{2B} I_2 \sin \beta_2 l_2 = \left(\cos \beta_2 l_2 - j \frac{Z_{2B}}{Z_{2H}} \sin \beta_2 l_2 \right) \underline{U}_2 = \\ &= \left(\cos 3,72 - j \frac{100}{500} \sin 3,72 \right) (2,58 + j1,26) = -2,299 - j0,774 = 2,426 e^{-j161,4^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Ток \underline{I}'_2 в приемнике определяем по закону Ома:

$$\underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}'_2}{Z_{2H}} = \frac{2,426 e^{-j161,4^\circ}}{500} = 4,85 \cdot 10^{-3} e^{-j161,4^\circ} \text{ А.}$$

Мощность источника $P_1 = \operatorname{Re}(\underline{U}_1 \underline{I}'_1^*) = 0,023 \text{ Вт.}$

$$\text{Мощность приемника } P_{2H} = \frac{|\underline{U}'_2|^2}{Z_{2H}} = 0,012 \text{ Вт.}$$

Пример 2.8 Линия без потерь подключена к источнику напряжения с частотой $f = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Гц}$ и нагружена на конденсатор с емкостью $C = 0,25 \text{ нФ}$. Линия имеет первичные параметры: $L_0 = 1,57 \text{ мкГн/км}$, $C_0 = 7,1 \text{ нФ/км}$.

Определить:

- 1) расстояние от конца линии до ближайших пучностей напряжения и тока;
- 2) значения пучностей напряжения и тока, если напряжение на конденсаторе $U_2 = 200 \text{ В}$.

Решение. Линия имеет следующие характеристики:

$$\text{– волновое сопротивление } Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 470,24 \text{ Ом;}$$

$$\text{– коэффициент фазы } \beta = 2\pi f \sqrt{L_0 C_0} = 31,47 \text{ рад/км;}$$

$$\text{– фазовая скорость } v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = 2,995 \cdot 10^5 \text{ км/с;}$$

$$\text{длина волны } \lambda = \frac{v}{f} = 0,2 \text{ км} = 200 \text{ м.}$$

На рисунке 2.28, *a* и *b* приведены стоячие волны напряжения $u(t,y)$ и тока $i(t,y)$ в разомкнутой линии без потерь, построенные в соответствии с уравнениями (2.73) и (2.74):

$$u(t, y) = U_{2m} \sin \omega t \cos \beta y;$$

$$i(t, y) = \frac{U_{2m}}{Z_B} \cos \omega t \sin \beta y.$$

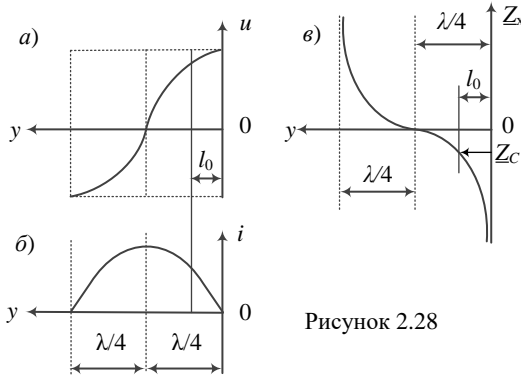


Рисунок 2.28

Входное сопротивление этой линии в режиме холостого хода выражается соотношением (2.77) $Z_x(y) = -jZ_B \operatorname{ctg} \beta y$, соответствующий этой формуле график приведен на рисунке 2.28, *е*.

Так как в линии имеют место стоячие волны, то конденсатор с сопротивлением $Z_C = -jx_C = -j \frac{1}{2\pi f C} = -j424,4 \text{ Ом}$ можно заменить разомкнутым отрезком линии длиной l_0 , входное сопротивление которого определяется соотношением

$$Z_x(l_0) = -jZ_B \operatorname{ctg} \beta l_0.$$

Из равенства $Z_C = Z_x$ или $x_C = Z_B \operatorname{ctg} \beta l_0$ находим значение

$$l_0 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{x_C}{Z_B} = 0,02658 \text{ км} = 26,58 \text{ м}.$$

Таким образом, заменив конденсатор отрезком разомкнутой линии длиной 26,58 м, получим, что в соответствии с рисунком 2.29 в конце этого отрезка будет находиться узел тока и пучность напряжения. Следующая пучность напряжения отстоит от места подключения конденсатора к линии на расстоянии

$$\frac{\lambda}{2} - l_0 = 100 - 26,58 = 73,42 \text{ м},$$

а пучность тока – на расстоянии $\frac{\lambda}{2} - l_0 - \frac{\lambda}{4} = 23,42$ м.

Если линию увеличить на l_0 , то в конце такой линии будет пучность напряжения с максимальным значением U_{\max} , а на расстоянии l_0 от конца напряжение равно $U_2 = U_{\max} \cos(\beta l_0)$, откуда

$$U_{\max} = \frac{U_2}{\cos(\beta l_0)} = 298,5 \text{ В},$$

а пучность тока имеет значение $I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z_B} = 0,635$ А.

Пример 2.9 Воздушная линия без потерь длиной $l = 160$ км с волновым сопротивлением $Z_B = 400$ Ом нагружена на параллельно соединенные резистор с сопротивлением $r = 100$ Ом и катушку индуктивности с параметрами $L = 0,015$ Гн и $r_k = 20$ Ом (рисунок 2.29). Линия подключается к идеальному источнику постоянного напряжения $U_0 = 3$ кВ.

Требуется:

- 1) найти законы изменения напряжения $u_2(t)$ и тока $i_2(t)$ нагрузки;
- 2) построить эпюры распределения напряжения и тока вдоль линии для момента времени, когда волна, отразившись от нагрузки, удалится на расстояние в $3/4$ длины линии.

Решение. При подключении источника к линии по ней начнут распространяться падающие прямоугольные волны напряжения $u_{\text{пад}} = U_0 = 3000$ В и тока $i_{\text{пад}} = U_0 / Z_B = 7,5$ А. При достижении конца линии происходит их отражение.

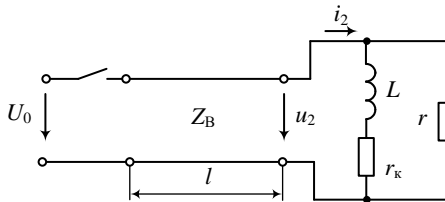


Рисунок 2.29

Отраженные волны движутся в противоположном направлении, и при их наложении на соответствующие падающие волны получим распределение напряжения и тока вдоль линии. Время прохождения отраженной волной $3/4$ длины линии с фазовой скоростью $v = 3 \cdot 10^5$ км/с составляет $t_0 = \frac{3l}{4v} = 0,4$ мс.

Схема для расчета переходного процесса в соответствии с правилом Петерсена – Пфифнера приведена на рисунке 2.30.

Выполним расчет напряжения u_2 и тока i_2 на выходных зажимах линии во время переходного процесса операторным методом. За начало отсчета примем момент прихода электромагнитной волны к концу линии. Учтем, что катушка до прихода падающей волны была обесточена, следовательно, в соответствии с первым законом коммутации схема имеет нулевые начальные условия.

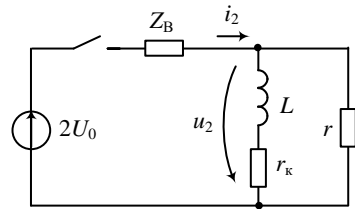


Рисунок 2.30

На рисунке 2.31 приведена расчетная операторная схема цепи. Найдем операторный ток $I_2(p)$ по закону Ома, предварительно определив входное операторное сопротивление схемы,:

$$Z(p) = Z_B + \frac{(Lp + r_k)r}{Lp + r_k + r} = \frac{(Z_B + r)Lp + r_k r + (r_k + r)Z_B}{Lp + r_k + r} = \frac{7,5p + 50000}{0,015p + 120};$$

$$I_2(p) = \frac{2U_0}{pZ(p)} = \frac{2U_0(0,015p + 120)}{p(7,5p + 50000)} = \frac{90p + 720000}{p(7,5p + 50000)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}.$$

Применив теорему разложения, запишем выражение для тока $i_2(t)$ по найденному его изображению:

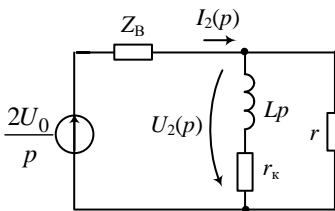


Рисунок 2.31

$$i_2(t) = \frac{F_1(p_0)}{F_3(p_0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3(p_1)} e^{p_1 t},$$

где $p_0 = 0$ и $p_1 = -\frac{20000}{3} = -6666,7 \text{ с}^{-1}$ – корни полинома $F_2(p) = 0$.

Постоянная времени цепи $\tau = \frac{1}{|p_1|} = 0,00015 \text{ с} = 0,15 \text{ мс}$.

После подстановки числовых значений находим закон изменения тока переходного процесса в нагрузке:

$$i_2(t) = \frac{720000}{50000} + \frac{90\left(-\frac{20000}{3}\right) + 720000}{\left(-\frac{20000}{3}\right)7,5} e^{-6666,7t} = 14,4 - 2,4e^{-6666,7t} \text{ А}.$$

Изменение напряжения $u_2(t)$ на нагрузке определим, применив второй закон Кирхгофа для левого контура схемы на рисунке 2.31:

$$u_2(t) = 2U_0 - Z_B i_2 = 6000 - 400(14,4 - 2,4e^{-6666,7t}) = 240 + 960e^{-6666,7t} \text{ В.}$$

Расчет значений напряжения u_2 и тока i_2 в диапазоне изменения времени от 0 до t_0 сведен в таблицу 2.2, а графики изменения величин $u_2(t)$ и $i_2(t)$ приведены на рисунке 2.32.

Таблица 2.2

$t, \text{мс}$	$i_2, \text{А}$	$u_2, \text{В}$
0	12	1200
0,1	13,9	733
0,2	14,14	493
0,3	14,26	370
0,4	14,33	307

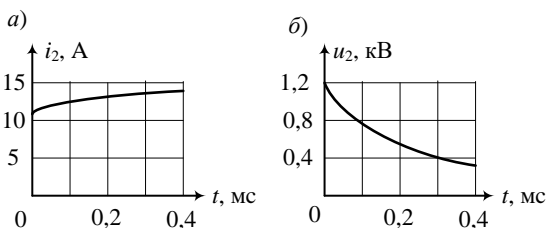


Рисунок 2.32

Распределение напряжения и тока вдоль линии для момента времени $t_0 = 0,4 \text{ мс}$ определяем по формулам:

$$u(t_0, y) = 240 + 960e^{-6666,7(t_0 - y/v)};$$

$$i(t_0, y) = 14,4 - 2,4e^{-6666,7(t_0 - y/v)}.$$

За время t_0 отраженная волна пробегает расстояние $l_0 = vt_0 = 120 \text{ км}$.

Значения напряжений и токов в точках линии с координатой y приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

$y, \text{км}$	$i, \text{А}$	$u, \text{В}$
120	12	1200
80	13,4	634,5
40	14	402,2
0	14,2	306,7

Эпюры распределения тока и напряжения вдоль линии приведены на рисунке 2.33.

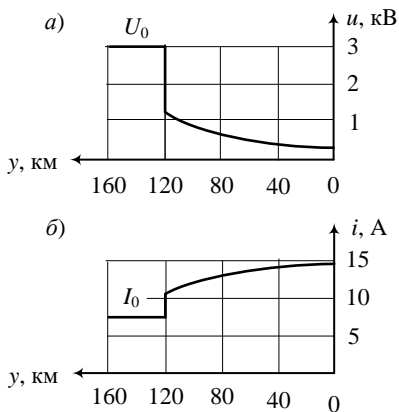


Рисунок 2.33

Пример 2.10 Источник постоянного напряжения $U_0 = 500$ В подключается к двум последовательно соединенным воздушным линиям без потерь длиной $l_1 = 120$ км и $l_2 = 90$ км (рисунок 2.34). Волновые сопротивления линий имеют следующие значения: $Z_{1В} = 200$ Ом и $Z_{2В} = 300$ Ом. В месте сопряжения линий имеется неоднородность в виде конденсатора емкостью $C = 2/3$ мкФ, который включен параллельно линии.

Построить эпюры распределения напряжений и токов вдоль обеих линий для момента времени, когда преломленная волна дойдет до конца второй линии, приняв скорость распространения волны $v = 3 \cdot 10^5$ км/с.

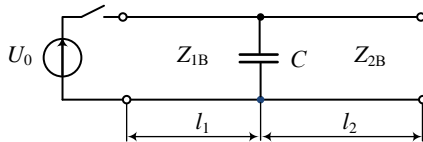


Рисунок 2.34

Решение. До коммутации линии были обесточены и не заряжены. Нагрузкой первой линии являются конденсатор C и вторая линия с волновым сопротивлением $Z_{2В}$. Падающие волны напряжения $u_{пад} = U_0 = 500$ В и

тока $i_{пад} = \frac{U_0}{Z_{1В}} = 2,5$ А, распространяясь по первой линии, достигают конца

линии. В узле неоднородности они частично отражаются, а частично переходят во вторую линию и продолжают распространение в виде преломленных волн.

Схема для расчета переходного процесса приведена на рисунке 2.35.

Произведем преобразование схемы, заменив левую и правую ветви эквивалентной ветвью (рисунок 2.36) с напряжением источника

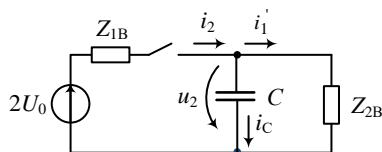


Рисунок 2.35

$$U_{эк} = \frac{2U_0 Z_{2В}}{Z_{1В} + Z_{2В}} = 600 \text{ В}$$

$$\text{и сопротивлением } Z_{эк} = \frac{Z_{1В} Z_{2В}}{Z_{1В} + Z_{2В}} = 120 \text{ Ом.}$$

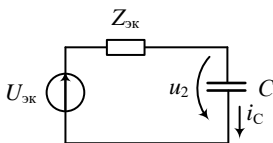


Рисунок 2.36

Дифференциальное уравнение, описывающее переходный процесс, составим относительно напряжения на конденсаторе

$$Z_{\text{эк}} C \frac{du_2}{dt} + u_2 = U_{\text{эк}}$$

и найдем его решение классическим методом:

$$u_2(t) = u_{2\text{пр}} + u_{2\text{св}} = U_{\text{эк}} + Ae^{pt},$$

где корень характеристического уравнения $p = -\frac{1}{Z_{\text{эк}} C} = -12500 \text{ с}^{-1}$.

Постоянную интегрирования A определим, исходя из нулевых начальных условий: при $u_C(0) = 0$ $A = -U_{\text{пр}} = -600 \text{ В}$.

Найдем закон изменения напряжения:

$$u_2(t) = 600(1 - e^{-12500t}) \text{ В}.$$

Закон изменения тока в конденсаторе:

$$i_C(t) = C \frac{du_2}{dt} = \frac{2}{3} 10^{-6} (-600)(-12500) e^{-12500t} = 5e^{-12500t} \text{ А}.$$

Применив второй закон Кирхгофа для схемы на рисунке 2.35, найдем закон изменения тока i_2 в конце первой линии:

$$Z_{1\text{в}} i_2 + u_2 = 2U_0, \text{ откуда } i_2 = \frac{2U_0 - u_2}{Z_{1\text{в}}} = 2 + 3e^{-12500t} \text{ А}.$$

Напряжение преломленной волны в начале второй линии

$$u_1'(t) = u_2(t) = 600(1 - e^{-12500t}) \text{ В}.$$

Ток преломленной волны в начале второй линии

$$i_1'(t) = i_2(t) - i_C(t) = 2 - 2e^{-12500t} \text{ А}.$$

Распределение напряжения и тока вдоль линий для момента времени $t_0 = \frac{l_2}{v} = 0,3 \text{ мс}$, когда преломленная волна достигнет конца второй линии, определяются следующими соотношениями:

– для первой линии: $u(t_0, y) = 600 \left[1 - e^{-12500(t_0 - y/v)} \right] \text{ В};$

$$i(t_0, y) = 2 + 3e^{-12500(t_0 - y/v)} \text{ А};$$

– для второй линии:

$$u'(t_0, x) = 600 \left[1 - e^{-12500(t_0 - x/v)} \right];$$

$$i'(t_0, x) = 2 - 2e^{-12500(t_0 - x/v)}.$$

Расчетные значения соответствующих величин для отдельных точек линий приведены в таблицах 2.4 и 2.5, а эпюры распределения напряжения и тока вдоль линий представлены на рисунке 2.37, а и б.

Таблица 2.4

у, км	u, В	i, А
90	0	5
60	428,1	2,86
30	550,8	2,25
0	585,9	2,07

Таблица 2.5

у, км	u, В	i, А
90	0	0
60	428,1	1,43
30	550,8	1,84
0	585,9	1,95

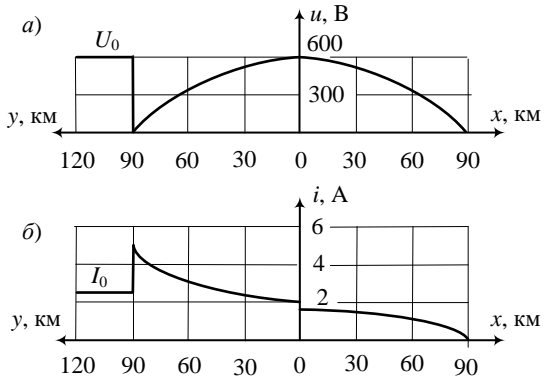


Рисунок 2.37

Пример 2.11 Воздушная линия без потерь соединяет передатчик с антенной, сопротивление которой $r_2 = 800 \text{ Ом}$. Для согласования линии с нагрузкой применяют короткозамкнутый отрезок линии (шлейф) длиной y , установленный на расстоянии x от конца линии (рисунок 2.38). Волновое сопротивление линии и шлейфа равно $Z_B = 600 \text{ Ом}$, длина волны генератора $\lambda = 20 \text{ м}$.

Определить необходимые минимальные длины x и y .

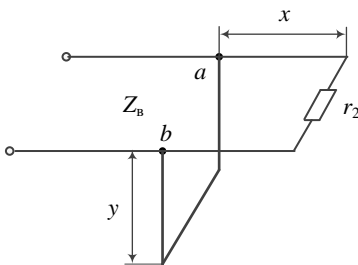


Рисунок 2.38

Решение. Как следует из рисунка 2.38, участок линии длиной x , нагруженный на сопротивление r_2 , и шлейф подключены параллельно к точкам а и б. Их сопротивления $Z_{\text{л}}$ и $Z_{\text{ш}}$ находим в соответствии с формулами (2.51) и (2.78):

$$\underline{Z}_{\text{л}} = Z_B \frac{r_2 + jZ_B \operatorname{tg} \beta x}{Z_B + jr_2 \operatorname{tg} \beta x} = Z_B \frac{1 + jmt \operatorname{tg} \beta x}{m + jt \operatorname{tg} \beta x},$$

где $m = Z_B/r_2$.

$$\underline{Z}_{\text{ш}} = jZ_B \operatorname{tg}\beta y.$$

Коэффициент фазы β в приведенных формулах определяем по формуле:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,1\pi \text{ рад/м.}$$

Входное сопротивление линии без потерь с согласованной нагрузкой равно волновому сопротивлению, которое является вещественным числом. Следовательно, эквивалентное сопротивление параллельно соединенных участков относительно зажимов a и b на рисунке 2.38 должно равняться Z_B :

$$Z_B = \frac{\underline{Z}_{\text{л}}\underline{Z}_{\text{ш}}}{\underline{Z}_{\text{л}} + \underline{Z}_{\text{ш}}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{л}}} + \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ш}}} = \underline{Y}_{\text{л}} + \underline{Y}_{\text{ш}}.$$

Сопротивление $\underline{Z}_{\text{л}}$ представляет собой комплексную величину, а сопротивление $\underline{Z}_{\text{ш}}$ – мнимую. Представим проводимость $\underline{Y}_{\text{л}}$ в виде суммы вещественной и мнимой составляющих:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{\text{л}} &= \frac{1}{Z_B} \cdot \frac{m + jt\operatorname{tg}\beta x}{1 + jmt\operatorname{tg}\beta x} = \frac{1}{Z_B} \cdot \frac{m + jt\operatorname{tg}\beta x}{1 + jmt\operatorname{tg}\beta x} \cdot \frac{1 - jmt\operatorname{tg}\beta x}{1 - jmt\operatorname{tg}\beta x} = \\ &= \frac{1}{Z_B} \cdot \frac{m + mt\operatorname{tg}^2\beta x}{1 + m^2\operatorname{tg}^2\beta x} + j \frac{1}{Z_B} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta x - m^2\operatorname{tg}\beta x}{1 + m^2\operatorname{tg}^2\beta x} = \\ &= \frac{m}{Z_B} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\beta x}{1 + m^2\operatorname{tg}^2\beta x} + j \frac{m}{Z_B} \cdot \frac{\left(\frac{1}{m} - m\right)\operatorname{tg}\beta x}{1 + m^2\operatorname{tg}^2\beta x} = \\ &= \frac{1}{r_2} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\beta x}{1 + m^2\operatorname{tg}^2\beta x} + j \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{m} - m\right)\operatorname{tg}\beta x}{1 + m^2\operatorname{tg}^2\beta x}. \end{aligned}$$

Для расчета длины отрезка линии x воспользуемся равенством

$$\operatorname{Re}\underline{Y}_{\text{л}} = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\beta x}{1 + m^2\operatorname{tg}^2\beta x} = \frac{1}{Z_B},$$

из которого найдем значение x . С этой целью произведем преобразование этого выражения:

$$m + mtg^2\beta x = 1 + m^2tg^2\beta x$$

$$m - 1 = m(m - 1)tg^2\beta x; \quad tg\beta x = \sqrt{\frac{1}{m}} = \sqrt{\frac{r_2}{Z_B}}.$$

Таким образом, длина участка линии, находящегося за точками присоединения шлейфа,

$$x = \frac{1}{\beta} \arctg \sqrt{\frac{r_2}{Z_B}} = 2,728 \text{ м.}$$

Длина шлейфа y может быть определена из условия равенства нулю реактивной составляющей эквивалентной проводимости участков, присоединенных к точкам a и b :

$$\text{Im}Y_{\text{л}} + Y_{\text{ш}} = 0.$$

$$\frac{1}{r_2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{m} - m\right)tg\beta x}{1 + m^2tg^2\beta x} - \frac{1}{Z_B tg\beta y} = 0.$$

Выполнив несложные преобразования и подставив выражение $tg\beta x = \sqrt{\frac{1}{m}}$, получим формулу для расчета длины шлейфа:

$$tg\beta y = \frac{1 + m^2tg^2\beta x}{(1 - m^2)tg\beta x} = \frac{1 + m}{(1 - m^2)\frac{1}{\sqrt{m}}} = \frac{\sqrt{m}}{1 - m} = \frac{\sqrt{Z_B r_2}}{Z_B + r_2}.$$

Длину шлейфа y определяем по формуле

$$y = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\sqrt{Z_B r_2}}{Z_B + r_2} = 4,365 \text{ м.}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники : в 2 т. / Л. А. Бессонов. – М : Юрайт, 2021. – Т.1 : Электрические цепи : учеб. – 725 с.
- 2 Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. В. Зевеке [и др.]. – М. : Энергия, 1989. – 528 с.
- 3 **Нейман, Л. Р.** Теоретические основы электротехники / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – Л. : Энергоиздат, 1981 : Т. 1 – 536 с., Т. 2 – 416 с.
- 4 **Каллер, М. Я.** Теория линейных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи : учеб. для вузов / М. Я. Каллер, Ю. В. Соболев, А. Г. Богданов. – М. : Транспорт, 1987. – 335 с.

5 **Батура, М. П.** Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев. – Минск : Выш. шк., 2007. – 606 с.

6 **Атабеков, Г. И.** Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. И. Атабеков. – 3-е изд. стер. – СПб : Лань, 2009. – 424 с.

7 **Шебес, М. Р.** Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособие для вузов / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Выш. шк., 1990. – 488 с.

8 **Лосев, Ф. К.** Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов / Ф. К. Лосев. – М. : Выш. шк., 1987. – 511 с.

9 **Попов, В. П.** Основы теории цепей : учеб. для вузов / В. П. Попов. – М. : Выш. шк., 1985. – 496 с.

10 **Баскаков С. И.** Лекции по теории цепей : учеб. пособие / С. И. Баскаков. – М. : Едиториал, УРСС, 2002. – 280 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 ДВУХПОЛЮСНИКИ.....	4
1.1 Частотные характеристики двухполосников.....	4
1.2 Операторные характеристики двухполосников.....	6
1.3 Входное сопротивление двухполосника	7
1.4 Канонические схемы пассивных двухполосников.....	10
1.4.1 Канонические схемы Фостера.....	11
1.4.2 Канонические схемы Кауэра.....	16
1.5 Частотные характеристики реактивных двухполосников.....	20
1.5.1 Одноэлементные реактивные двухполосники.....	20
1.5.2 Двухэлементные реактивные двухполосники.....	21
1.5.3 Трехэлементные реактивные двухполосники.....	23
1.5.4 Общие принципы записи выражения для сопротивления канонической схемы реактивного двухполосника.....	29
1.5.5 Четырехэлементные реактивные двухполосники.....	31
1.6 Эквивалентные двухполосники.....	33
1.7 Обратные двухполосники.....	35
1.8 Условия физической реализуемости двухполосников.....	37
1.9 Реализация реактивных двухполосников.....	39
1.10 Примеры решения задач.....	41
2 ДЛИННЫЕ ЛИНИИ.....	51
2.1 Общая характеристика длинных линий.....	51
2.2 Уравнения однородной двухпроводной линии.....	53
2.3 Установившийся режим в однородной линии.....	55
2.3.1 Бегущие волны.....	57
2.3.2 Уравнения длинной линии с гиперболическими функциями.....	60
2.3.3 Коэффициент отражения.....	62
2.3.4 Распределение напряжения и тока вдоль линии.....	62
2.3.5 Электрически длинная линия.....	64
2.3.6 Электрически короткая линия.....	64
2.3.7 Входное сопротивление длинной линии.....	66
2.3.8 Определение параметров линии.....	67
2.4 Линия без искажений.....	69
2.5 Линия без потерь.....	71
2.5.1 Стоячие волны.....	73
2.5.2 Линия без потерь в режиме холостого хода.....	73
2.5.3 Линия без потерь в режиме короткого замыкания.....	75
2.5.4 Входное сопротивление линии без потерь.....	76
2.5.5 Линия без потерь, нагруженная на реактивное сопротивление.....	78
2.5.6 Линия без потерь, нагруженная на активное сопротивление.....	81
2.5.7 Применение отрезков линии для согласования с нагрузкой.....	84

2.6	Переходные процессы в длинных линиях.....	86
2.6.1	Общее решение уравнений переходного процесса.....	87
2.6.2	Возникновение волн с прямоугольным фронтом.....	88
2.6.3	Включение линии, разомкнутой на конце.....	91
2.6.4	Включение линии, замкнутой накоротко на конце.....	93
2.6.5	Включение линии, нагруженной на активное сопротивление.....	95
2.6.6	Общие принципы подхода к исследованию переходных процессов в линиях.....	96
2.7	Примеры решения задач.....	98
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	115

Учебное издание

ВОЛКОВ Николай Петрович

**ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.
ДВУХПОЛЮСНИКИ. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ**

Учебно-методическое пособие

Редактор *Т. М. Маруняк*

Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 23.05.2023 г. Формат 60x84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 5,04. Тираж 100 экз.
Зак. № 1022. Изд. № 23

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653 г. Гомель