

УДК 539.3

С. М. ЮСУБОВА

*Лицей имени Гейдара Алиева, Баку, Азербайджан***ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ
В ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРЫ**

Представлено решение задачи о кручении незамкнутой радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы, которая не содержит ни один из полюсов 0 и π . Модули упругости линейно связаны с радиусом сферы. Боковая поверхность предполагается свободной от напряжений, а для конических сечений задаются напряжения, обеспечивающие равновесие сферы. Учитывая выполнение на боковых поверхностях сферы однородных граничных условий, выведено характеристическое уравнение относительно спектрального параметра. Построены решения, соответствующие двум группам корней этого уравнения. Первой группе соответствует проникающее решение, при котором напряженное состояние соответствует действию крутящих моментов от напряжений, действующих в произвольном сечении, параллельном экватору сферы. Решения, определяемые счетным множеством второй группы корней, имеют характер краевого эффекта, локализованного в конических срезах. В случае существенной анизотропии некоторые такие решения затухают незначительно и могут охватывать всю область, занятую сферой.

Ключевые слова: кручение сферы, радиально-изотропная сфера, трансверсально-изотропная сфера, напряженно-деформированное состояние, краевой эффект.

Введение. Существует целый ряд прикладных теорий оболочек, которые основываются на различных гипотезах, однако их области применимости изучены недостаточно. Для установления области применимости существующих и с целью создания новых уточненных теорий неоднородных оболочек необходим анализ их напряженно-деформированного состояния, основанный на решении уравнений трехмерной теории упругости.

Установление напряжений и деформаций неоднородных тел на основе уравнений теории упругости сопряжено со значительными математическими трудностями. В то же время оно позволяет обнаруживать новые с физической точки зрения качественные и количественные эффекты.

Решение трехмерных задач теории упругости для сферы выполнено в ряде исследований [1]. Одна из первых таких работ опубликована Сен-Венаном [2]. В статье [3] построено общее решение уравнений теории упругости для сферы и выполнен анализ ее напряженно-деформированного состояния. Для толстой изотропной сферы в работе [4] получены однородные решения, которые зависят от корней трансцендентного уравнения. На основе решения трехмерных задач теории упругости в [5] для сферы малой толщины проанализирована точность существующих прикладных теорий. Трехмерная асимптотическая теория сферической оболочки малой толщины изложена в [6].

Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной сферы с мягким наполнителем представлено в статье [7]. В работе [8] решена задача о кручении радиально-слоистой сферы, имеющей произвольное число чередующихся жестких и мягких слоев. Температурные напряжения в электромагнитоупругих полых шарах из функционально-градиентного материала исследованы в [9]. В публикациях [10, 11] изучены термические и механические напряжения в полый толстой радиально-неоднородной сфере для случая изменения характеристик материала по радиусу в соответствии со степенным законом. Деформирование радиально-неоднородного полого шара исследовано в [12] с помощью методов конечных элементов и сплайн-коллокации, выполнено сравнение результатов, полученных разными методами. В статье [13] путем асимптотического интегрирования уравнений теории упругости выполнено решение осесимметричной задачи для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины, и определены особенности ее напряженно-деформированного состояния. Метод однородных решений применен в работе [14] к осесимметричной задаче, в которой получены асимптотические формулы, позволяющие рассчитать напряжения и деформации в радиально-неоднородной сфере малой толщины. Этот же метод использован в статье [15] для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины при решении осесимметричной задачи теории упругости. На основе проведенного асимптотического анализа проведена классификация решений.

Целью представленной работы стало построение аналитического решения уравнений, описывающих кручение радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы.

Нахождение решения. Рассмотрим задачу о кручении радиально-неоднородной трансверсально-изотропной незамкнутой полый сферы малой толщины, предполагая, что сфера не содержит ни один из полюсов 0 и π (рисунок 1). В сферической системе координат область, которая занята сферой, $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \theta \in [\theta_1; \theta_2], \varphi \in [0; 2\pi]\}$.

Предполагаем, что изменение модуля упругости по радиусу происходит по линейному закону:

$$A_{22} = a_{22}^{(0)} r, \quad A_{23} = a_{23}^{(0)} r, \quad A_{44} = a_{44}^{(0)} r, \quad (1)$$

где $a_{22}^{(0)}, a_{23}^{(0)}, a_{44}^{(0)}$ – некоторые постоянные величины.

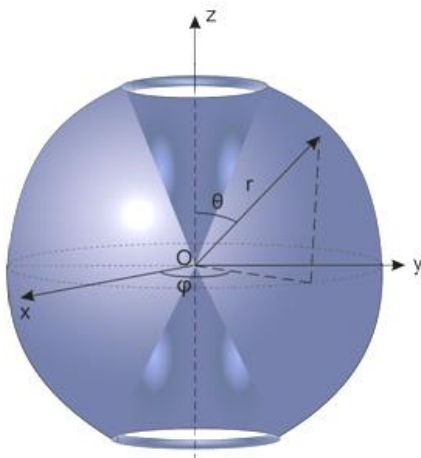


Рисунок 1 – Незамкнутая полый сфера, не содержащая ни один из полюсов 0 и π

Уравнение равновесия в сферической системе координат r, θ, φ для случая отсутствия массовых сил имеет вид [16]

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0, \quad (2)$$

где $\sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\theta}$ – компоненты тензора напряжений, которые выражаются через векторы перемещений $v_\varphi = v_\varphi(r, \theta)$ следующим образом [6]:

$$\sigma_{\varphi\theta} = \frac{(A_{22} - A_{23})}{2} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - v_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right); \quad (3)$$

$$\sigma_{r\varphi} = A_{44} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right). \quad (4)$$

Подставляя выражения (3), (4) в (2), с учетом соотношений (1) получаем уравнение равновесия в перемещениях:

$$a_{44}^{(0)} \left(r \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{3v_\varphi}{r} \right) + \frac{(a_{22}^{(0)} - a_{23}^{(0)})}{2r^2} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} v_\varphi \right) = 0. \quad (5)$$

Введем новую безразмерную переменную ρ , связанную с радиальной координатой r соотношением:

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right), \quad (6)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$ – малый параметр, который характеризует толщину сферы; $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$; $\rho \in [-1; 1]$.

С учетом (6) уравнение равновесия (5) принимает вид:

$$b_{44}^{(0)} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - 3\varepsilon^2 u_\varphi \right) + \frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) \varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} u_\varphi \right) = 0, \quad (7)$$

где $u_\varphi = \frac{v_\varphi}{r_0}$, $b_{ij}^{(0)} = \frac{a_{ij}^{(0)} r_0}{G_0}$ – безразмерные величины; G_0 – некоторый параметр, имеющий размерность модуля упругости.

Если боковая часть границы сферы свободна от напряжений, то

$$\sigma_{\rho\varphi} = \frac{b_{44}^{(0)}}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \varepsilon u_\varphi \right) \Bigg|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (8)$$

где $\sigma_{\rho\varphi} = \sigma_{r\varphi} / G_0$ – безразмерная величина.

Считаем, что на торцах сферы (конических срезах) заданы напряжения

$$\sigma_{\varphi\theta}\Big|_{\theta=\theta_s} = f_s(\rho), \quad (9)$$

где $f_s(\rho)$ ($s = 1; 2$) – достаточно гладкие функции, имеющие относительно ε порядок $O(1)$ и удовлетворяющие условиям равновесия.

Займемся построением однородных решений, к которым будем относить всякое решение уравнения равновесия (7), соответствующее отсутствию напряжений на боковых поверхностях. Такое решение ищем в виде

$$u_{\varphi}(\rho; \theta) = c(\rho)m'(\theta), \quad (10)$$

где функция $m(\theta)$ удовлетворяет уравнению Лежандра [6]:

$$m''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta \cdot m'(\theta) + \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)m(\theta) = 0,$$

причем параметр z определяется исходя из выполнения граничных условий для боковой поверхности.

Подставляя (10) в (7), (8), получаем

$$c''(\rho) + 2\varepsilon c'(\rho) + \left[\frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}{2b_{44}^{(0)}} \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) - 3 \right] \varepsilon^2 c(\rho) = 0, \quad (11)$$

$$b_{44}^{(0)} (c'(\rho) - \varepsilon c(\rho))\Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (12)$$

Решение (11) имеет вид

$$c(\rho) = D_1 e^{\varepsilon(t-1)\rho} + D_2 e^{-\varepsilon(t+1)\rho}, \quad (13)$$

где D_1, D_2 – постоянные интегрирования; $t = \sqrt{4 + \frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}{2b_{44}^{(0)}} \left(z^2 - \frac{9}{4} \right)}$.

С помощью (13), удовлетворяя граничным условиям (12) относительно D_1, D_2 , получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (t-2)e^{-\varepsilon(t-1)} D_1 - (t+2)e^{\varepsilon(t+1)} D_2 = 0, \\ (t-2)e^{\varepsilon(t-1)} D_1 - (t+2)e^{-\varepsilon(t+1)} D_2 = 0. \end{cases}$$

Условие существования ее нетривиальных решений приводит к характеристическому уравнению

$$\Delta(z; \varepsilon) = \left(z^2 - \frac{9}{4} \right) \operatorname{sh} \left(2\varepsilon \sqrt{4 + \frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}{2b_{44}^{(0)}} \left(z^2 - \frac{9}{4} \right)} \right) = 0. \quad (14)$$

Функция $\Delta(z; \varepsilon)$ имеет две группы корней со следующими свойствами:

– первая состоит из нулей $z_0^{\pm} = \pm \frac{3}{2}$;

– вторая включает счетное множество нулей $z_k = \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2b_{44}^{(0)}}{b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}} \left(\frac{\pi^2 k^2}{4\epsilon^2} + 4 \right)}$,

которые при $\epsilon \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности.

Перемещения и напряжения в случае $z_0^\pm = \pm \frac{3}{2}$ имеют вид

$$u_\phi^{(1)}(\rho; \theta) = D_0 e^{\epsilon\rho} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \operatorname{ctg} \theta \right); \quad (15)$$

$$\sigma_{\rho\phi}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{\theta\phi}^{(1)} = -\frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})e^{\epsilon\rho}}{\sin^2 \theta} D_0.$$

Для второй группы нулей получаем

$$u_\phi^{(2)}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\epsilon(\rho+1)} \left[\pi k \cos \left(\frac{\pi k}{2} (1-\rho) \right) - 4\epsilon \sin \left(\frac{\pi k}{2} (1-\rho) \right) \right] m'_k(\theta); \quad (16)$$

$$\sigma_{\rho\phi}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{44}^{(0)} e^{-\epsilon(\rho+1)} \left(\frac{\pi^2 k^2}{4\epsilon} + 4\epsilon \right) \sin \left(\frac{\pi k}{2} (1-\rho) \right) m'_k(\theta); \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\phi}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) e^{-\epsilon(\rho+1)} & \left[-\frac{\pi k}{2} \cos \left(\frac{\pi k}{2} (1-\rho) \right) + 2\epsilon \sin \left(\frac{\pi k}{2} (1-\rho) \right) \right] \times \\ & \times \left[2 \operatorname{ctg} \theta m'_k(\theta) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) m_k(\theta) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где $m_k(\theta) = N_{1k} P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta) + N_{2k} Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta)$; $P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta)$, $Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta)$ – функции Лежандра первого и второго рода соответственно; N_{1k} , N_{2k} – неизвестные постоянные.

Уравнения (11), (12) представим в виде

$$Ac = \lambda c,$$

где $Ac = \left\{ q \left(-c''(\rho) - 2\epsilon c'(\rho) + 3\epsilon^2 c(\rho) \right); b_{44}^{(0)} \left(c'(\rho) - \epsilon c(\rho) \right) \Big|_{\rho=\pm 1} = 0 \right\}$;

$$\lambda = \frac{9}{4} - z^2; \quad q = \frac{2b_{44}^{(0)}}{\epsilon^2 (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}.$$

Введем гильбертово пространство H со скалярным произведением:

$$(c, v) = \int_{-1}^1 c(\rho) v(\rho) e^{2\epsilon\rho} d\rho.$$

Докажем, что A – симметричный оператор в гильбертовом пространстве $H(-1; 1)$ с весом $e^{2\epsilon\rho}$. Для любой функции $c(\rho) \in D_A$, $v(\rho) \in D_A$ имеем

$$\begin{aligned}
(Ac, v) - (c, Av) &= \int_{-1}^1 (vAc - cAv) e^{2\varepsilon\rho} d\rho = \int_{-1}^1 \left[q(-c''(\rho) - 2\varepsilon c'(\rho) + \right. \\
&\quad \left. + 3\varepsilon^2 c(\rho)) v(\rho) - q(-v''(\rho) - 2\varepsilon v'(\rho) + 3\varepsilon^2 v(\rho)) c(\rho) \right] e^{2\varepsilon\rho} d\rho = \\
&= \int_{-1}^1 \left[2\varepsilon(c(\rho)v'(\rho) - c'(\rho)v(\rho)) + c(\rho)v''(\rho) - v(\rho)c''(\rho) \right] e^{2\varepsilon\rho} d\rho. \quad (19)
\end{aligned}$$

С помощью интегрирования по частям и с учетом граничных условий (12) из (19) находим, что:

$$(Ac, v) - (c, Av) = 0, \text{ то есть } (Ac, v) = (c, Av).$$

Все собственные значения $\lambda_k(A)$ вещественны, причем соответствующие им собственные функции являются ортогональными:

$$(c_k, c_n) = 0; \quad (k \neq n), \quad (20)$$

где
$$c_n = \left(\pi n \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) - 4\varepsilon \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \right) e^{-\varepsilon(\rho+1)}.$$

Общее решение задачи (7), (8) будет суперпозицией решений, соответствующих выше найденным группам корней характеристического уравнения (14):

$$\begin{aligned}
u_\varphi(\rho, \theta) &= D_0 e^{\varepsilon\rho} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{ctg} \theta \right) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[\pi k \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - 4\varepsilon \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] m'_k(\theta); \\
\sigma_{\rho\varphi} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{44}^{(0)} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left(\frac{\pi^2 k^2}{4\varepsilon} + 4\varepsilon \right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) m'_k(\theta), \\
\sigma_{\theta\varphi} &= -\frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) e^{\varepsilon\rho}}{\sin^2 \theta} D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[2\varepsilon \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\pi k}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] \left[2 \operatorname{ctg} \theta m'_k(\theta) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) m_k(\theta) \right]. \quad (21)
\end{aligned}$$

Докажем, что постоянная D_0 при отсутствии внешних усилий на боковых поверхностях пропорциональна крутящему моменту M , создаваемому напряжениями, действующими в сечении $\theta = \operatorname{const}$. Его величина [6]

$$M = 2\pi \sin^2 \theta \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta\varphi} r^2 dr,$$

или
$$M = 2\pi\varepsilon \sin^2 \theta \int_{-1}^1 \sigma_{\theta\varphi} e^{3\varepsilon\rho} d\rho. \quad (22)$$

Подставляя (21) в (22), интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned}
 M &= 2\pi\varepsilon \sin^2 \theta \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}{\sin^2 \theta} e^{\varepsilon\rho} D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[2\varepsilon \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\pi k}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] \left[2 \operatorname{ctg} \theta m'_k(\theta) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) m_k(\theta) \right] \right\} e^{3\varepsilon\rho} d\rho = \\
 &= 2\pi\varepsilon \sin^2 \theta \left\{ -\frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}{\sin^2 \theta} D_0 \int_{-1}^1 e^{4\varepsilon\rho} d\rho + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) (2 \operatorname{ctg} \theta m'_k(\theta) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) m_k(\theta) \right) \left[2\varepsilon \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) e^{\varepsilon(2\rho-1)} d\rho - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\pi k}{2} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) e^{\varepsilon(2\rho-1)} d\rho \right] \right\} = \pi(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) \operatorname{sh}(4\varepsilon) D_0.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$D_0 = \frac{M}{\pi(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) \operatorname{sh}(4\varepsilon)}. \quad (23)$$

Обсуждение результатов. Уравнение (15) является проникающим решением и характеризует внутреннее напряженно-деформированное состояние сферы. Напряженное состояние, соответствующее решению (16), является самоуравновешенным в каждом сечении $\theta = \text{const}$ и играет роль краевого эффекта, локализованного у торцов.

Для второй группы корней уравнения (14) главный член асимптотического решения уравнения (11) имеет следующий вид [13]:

$$m_k(\theta) = \begin{cases} (\mu\pi^2 k^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \exp\left(-\frac{\pi k}{\varepsilon} \sqrt{\mu}(\theta - \theta_1)\right) (1 + O(\varepsilon)) & \text{в окрестности } \theta = \theta_1; \\ (\mu\pi^2 k^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \exp\left(\frac{\pi k}{\varepsilon} \sqrt{\mu}(\theta - \theta_2)\right) (1 + O(\varepsilon)) & \text{в окрестности } \theta = \theta_2. \end{cases} \quad (24)$$

где
$$\mu = \frac{b_{44}^{(0)}}{2(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}.$$

При увеличении расстояния от конических сечений $\theta = \theta_j$ ($j = 1, 2$), решения (16)–(18) экспоненциально убывают. Из (24) видно, что при фиксированных значениях « k » и при малых значениях μ некоторые решения, связанные с краевым эффектом, не затухают и могут в значительной степени менять картину напряженно-деформированного состояния вдали от торцов. Таким образом, в этом случае имеется качественное отличие в напряженно-деформированном состоянии радиально-неоднородных трансверсально-

изотропной и изотропной сфер [13], что подтверждает результаты, которые получены ранее в работе [17] для задачи, близкой к рассмотренной.

Подставляем (21) в (9) и учитываем (23):

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[2\varepsilon \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - \frac{\pi k}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] \times \\ \times \left[2 \operatorname{ctg} \theta_s m'_k(\theta_s) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) m_k(\theta_s) \right] = f_s^*(\rho), \quad (25)$$

где
$$f_s^*(\rho) = f_s(\rho) - \frac{M e^{\varepsilon \rho}}{\pi(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) \operatorname{sh}(4\varepsilon) \sin^2 \theta_s}.$$

Умножая (25) на $c_n(\rho)e^{2\varepsilon\rho}$ и интегрируя в пределах $[-1; 1]$, с учетом (20) имеем

$$\left[2 \operatorname{ctg} \theta m'_k(\theta) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) m_k(\theta) \right] \Big|_{\theta=\theta_s} = h_{sk}, \quad (s=1; 2), \quad (26)$$

где
$$h_{sk} = -\frac{1}{16\varepsilon^2 + \pi^2 k^2} \int_{-1}^1 \left[4\varepsilon \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - \pi k \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] e^{\varepsilon(\rho-1)} f_{3s}^*(\rho) d\rho.$$

После решения системы (26) определяем неизвестные постоянные N_{1k} , N_{2k} в следующем виде:

$$N_{1k} = \frac{W_{1k}}{W_k}; \quad N_{2k} = \frac{W_{2k}}{W_k},$$

где
$$W_k = 4 \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{ctg} \theta_2 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1;1)}(\theta_1; \theta_2) + 2 \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) \left[\operatorname{ctg} \theta_1 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1;0)}(\theta_1; \theta_2) + \right. \\ \left. + \operatorname{ctg} \theta_2 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(0;1)}(\theta_1; \theta_2) \right] + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right)^2 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(0;0)}(\theta_1; \theta_2);$$

$$W_{1k} = h_{1k} \left[2 \operatorname{ctg} \theta_2 Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_2) \right] - \\ - h_{2k} \left[2 \operatorname{ctg} \theta_1 Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_1) \right];$$

$$W_{2k} = h_{2k} \left[2 \operatorname{ctg} \theta_1 P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_1) \right] - \\ - h_{1k} \left[2 \operatorname{ctg} \theta_2 P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_2) \right];$$

$$L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n_1, n_2)}(\theta_1; \theta_2) = P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n_1)}(\cos \theta_1) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n_2)}(\cos \theta_2) - \\ - P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n_2)}(\cos \theta_2) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n_1)}(\cos \theta_1) \quad (n_1, n_2 = 0, 1).$$

Выводы. Получены выражения, позволяющие рассчитать напряжения и деформации в точках радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины при ее кручении. На основе проведенного анализа получены проникающее решение и решение, связанное с наличием краевого эффекта. Напряженное состояние, определяемое проникающим решением, эквивалентно крутящему моменту от напряжений, действующих в произвольном сечении сферы $\theta = \text{const}$. Вторая группа решений локализована в конических срезам и при удалении от конических сечений экспоненциально убывает. В отличие от изотропной радиально-неоднородной сферы некоторые решения для трансверсально-изотропной сферы демонстрируют распространение краевого эффекта на достаточно большое расстояние от мест расположения конических сечений, что может оказывать существенное влияние на картину напряженно-деформированного состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Tokovyy, Y. Elastic analysis of inhomogeneous solids : history and development in brief / Y. Tokovyy, C. C. Ma // *Journal of Mechanics*. – 2019. – Vol. 35, is. 5. – P. 613–626.
- 2 Love, A. E. A treatise on the mathematical theory of elasticity / A. E. Love // Cambridge : University Press, 1927. – 643 p.
- 3 Галеркин, Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки / Б. Г. Галеркин // *Прикладная математика и механика*. – 1942. – Т. 6, № 6. – С. 487–496.
- 4 Лурье, А. И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки / А. И. Лурье // *Прикладная математика и механика*. – 1943. – Т. 7, № 6. – С. 393–404.
- 5 Виленская, Т. В. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины / Т. В. Виленская, И. И. Ворович // *Прикладная математика и механика*. – 1966. – Т. 30, № 2. – С. 278–295.
- 6 Mekhtiev, M. F. Asymptotic analysis of spatial problems in elasticity / M. F. Mekhtiev. – Singapore : Springer, 2019. – 241 p.
- 7 Боев, Н. В. Пространственное напряженно-деформированное состояние трехслойной сферической оболочки / Н. В. Боев, Ю. А. Устинов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1985. – № 3. – С. 136–143.
- 8 Ахмедов, Н. К. Анализ структуры пограничного слоя в задаче кручения слоистой сферической оболочки / Н. К. Ахмедов, Ю. А. Устинов // *Прикладная математика и механика*. – 2009. – Т. 73, № 3. – С. 416–426.
- 9 Ootao, Y. Transient thermal stress problem of a functionally graded magneto-electrothermoelastic hollow sphere / Y. Ootao, M. Ishihara // *Materials*. – 2011. – Vol. 4, no. 12. – P. 2136–2150.

10 **Poultangari, R.** Functionally graded hollow spheres under non-axisymmetric thermo-mechanical loads / R. Poultangari, M. Jabbari, R. Eslami // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2008. – Vol. 85, is. 5. – P. 295–305.

11 **Eslami, M. R.** Thermal and mechanical stresses in a functionally graded thick sphere / M. R. Eslami, M. H. Babaei, R. Poultangari // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82, is. 7. – P. 522–527.

12 **Grigorenko, A. Y.** Analysis of the axisymmetric stress-strain state of a continuously inhomogeneous hollow sphere / A. Y. Grigorenko, N. P. Yaremchenko, S. N. Yaremchenko // International Applied Mechanics. – 2018. – Vol. 54, is. 5. – P. 577–583.

13 **Akhmedov, N. K.** Asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for radially inhomogeneous transversally-isotropic thin hollow spheres / N. K. Akhmedov, A. H. Sofiyev // Thin-Walled Structures. – 2019. – Vol. 139. – P. 232–241.

14 **Akhmedov, N. K.** Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric problem of elasticity theory for a sphere with variable elasticity modulus / N. K. Akhmedov, N. S. Gasanova // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2020. – Vol. 25, is. 12. – P. 2231–2251.

15 **Akhmedov, N. K.** Investigation of elasticity problem for the radially inhomogeneous transversely isotropic sphere / N. K. Akhmedov, S. M. Yusubova // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2022. – Vol. 45, is. 16. – P. 10162–10186.

16 **Lurie, A. I.** Theory of Elasticity / A. I. Lurie. – Berlin : Springer, 2005. – 1050 p.

17 **Ахмедов, Н. К.** Асимптотическое поведение решения задачи кручения радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки / Н. К. Ахмедов, Т. Б. Мамедова // Вестник Донского государственного технического университета. – 2011. – Т. 11, № 4. – С. 455–461.

S. M. YUSUBOVA

Lyceum named after Heydar Aliyev, Baku, Azerbaijan

HOMOGENEOUS SOLUTIONS CONSTRUCTION FOR THE PROBLEM OF A RADially INHOMOGENEOUS TRANSVERSALLY ISOTROPIC SPHERE TORSION

A solution to the problem of torsion of a non-closed radially inhomogeneous transversally isotropic sphere with not any poles of 0 and π is presented. The elastic moduli are linearly related to the sphere radius. The lateral surface is assumed to be stress-free, and for conic sections, stresses are specified to ensure the equilibrium of the sphere. Taking into account the fulfillment of homogeneous boundary conditions on the sphere side surfaces, a characteristic equation is derived with respect to the spectral parameter. Solutions are constructed corresponding to two groups of roots of this equation. A penetrating solution corresponds to the first group, when the stress state corresponds to the action of torques from stresses acting in an arbitrary section parallel to the sphere equator. The solutions determined by the countable set of the second group of roots have the character of a boundary effect localized in conic slices. In the case of significant anisotropy, some of these solutions decay insignificantly and can cover the entire region of the sphere.

Keywords: sphere torsion, radially isotropic sphere, transversely isotropic sphere, stress-strain state, boundary effect.

Получено 31.10.2022