

УДК 691-419:539.371

А. В. ЧЕРНЯК

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ИЗГИБ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ С ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ,
ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПО ТОЛЩИНЕ**

Рассмотрен осесимметричный изгиб круговой трехслойной сэндвич-пластины с внешними несущими слоями, линейно изменяющимися по толщине. Предполагается, что деформирование внешних слоев описывается кинематическими гипотезами Кирхгофа. Для относительно толстого заполнителя используется гипотеза Тимошенко. Получены уравнения равновесия, которые при учете приведенных граничных условий позволяют установить напряженно-деформированное состояние пластины.

Ключевые слова: изгиб, сэндвич-пластина, переменная толщина несущих слоев.

Введение. Широкое распространение трехслойных элементов конструкций в строительстве и машиностроении обуславливает актуальность создания новых математических моделей для их расчета. Методики построения подобных моделей изложены в книгах [1–4].

Колебания трехслойных пластин со слоями постоянной толщины рассматривались в статьях [5–7], а при переменной толщине слоев – в работах [8, 9]. Квазистатическому деформированию слоистых пластин со слоями постоянной толщины посвящены работы [10, 11], в том числе, связанных с упругим основанием – статьи [12, 13]. В публикациях [14, 15] представлены уравнения, позволяющие описать деформирование трехслойных оболочек со слоями переменной толщины. Цель представленной работы состоит в получении уравнений, позволяющих описать деформирование трехслойной пластины, в которой несущие слои изменяются по толщине в соответствии с заданным законом.

Вывод уравнений равновесия в усилиях. Объектом исследования является упругая трехслойная сэндвич-пластина круговой формы с жестким заполнителем и переменными по толщине внешними несущими слоями. Деформирование пластины рассматривается в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя. Для тонких жестких несущих слоев (1, 2) (рисунок 1) принимаются гипотезы Кирхгофа: нормаль прямолинейна, несжимаема и перпендикулярна к деформированной срединной плоскости своего слоя. Для относительно толстого несжимаемого по толщине заполнителя (3) учитывается работа тангенциальных напряжений. Нормаль к срединной плоскости несжимаема, остается прямолинейной и сдвигается на некоторый дополнительный угол $\psi(r, t)$ – относительный сдвиг. Через $w(r)$ обозначен прогиб пластины. Внешняя распределенная нагрузка $q = q(r)$ перпендикулярна первому слою. Благодаря наличию жесткой диафрагмы на контуре пластины сдвиговая деформация отсутствует.

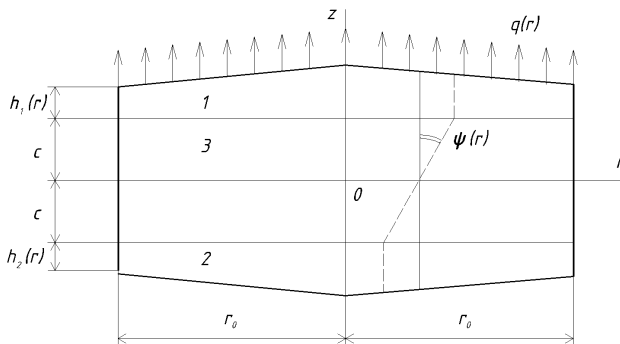


Рисунок 1 – Расчетная схема сэндвич-пластины

Принимается, что толщина несущих слоев изменяется линейно вдоль радиуса сэндвич-пластины

$$h_1(r) = h_2(r) = h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right). \quad (1)$$

Согласно принятой гипотезе нормаль заполнителя прямолинейна, а сдвиговая деформация в нем

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi$$

(запятая в индексе здесь и далее свидетельствует о дифференцировании по соответствующей координате). Используя результаты интегрирования этого выражения, получим радиальные перемещения $u_r^{(k)}$ (k – номер слоя) в виде

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= c\psi - zw_{,r}, \quad c \leq z \leq c + h_1; \\ u_r^{(3)} &= z\psi - zw_{,r}, \quad -c \leq z \leq c; \\ u_r^{(2)} &= c\psi - zw_{,r}, \quad -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (2)$$

где z – координата волокна.

Здесь принято во внимание, что у сэндвич-пластины при осесимметричной изгибной нагрузке отсутствует радиальное деформирование срединной поверхности. Деформации в слоях пластины получим из (2), воспользовавшись соотношениями Коши [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= c\psi_{,r} - zw_{,rr}; \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(c\psi - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0; \\ \varepsilon_r^{(3)} &= z\psi_{,r} - zw_{,rr}; \quad \varepsilon_\phi^{(3)} = \frac{1}{r}(z\psi - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = \frac{1}{2}\psi; \\ \varepsilon_r^{(2)} &= c\psi_{,r} - zw_{,rr}; \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(c\psi - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

С использованием напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$) вводятся внутренние обобщенные усилия и моменты:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz; \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz; \quad (4)$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c \left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(1)} \right); \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz.$$

Виртуальная работа внешней нагрузки

$$\delta A = \iint_S (q \delta w) r dr d\varphi, \quad (5)$$

внутренних упругих сил –

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz + \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} \delta \psi dz \right] r dr d\varphi. \quad (6)$$

Здесь интеграл берется по площади S срединной плоскости заполнителя.

Виртуальные перемещения следуют из (2), деформации представлены в (3). После подстановки их в (6) имеем

$$\delta W = \iint_{r \varphi} \left[r(T_r \delta u_{,r} + H_r \delta \psi_{,r} - M_r \delta w_{,rr} + Q \delta \psi) + T_\varphi \delta u + H_\varphi \delta \psi - M_\varphi \delta w_{,r} \right] r dr d\varphi,$$

откуда

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^{2\pi} \left\{ r T_r \delta u + r H_r \delta \psi - r M_r \delta w_{,r} + \left[(r M_r)_{,r} - M_\varphi \right] \delta w \right\} d\varphi - \\ & - \int_{r \varphi} \left\{ \left[(r T_r)_{,r} - T_\varphi \right] \delta u + \left[(r H_r)_{,r} - H_\varphi - r Q \right] \delta \psi + \left[(r M_r)_{,rr} - M_{\varphi,r} \right] \delta w \right\} d\varphi dr. \end{aligned}$$

Приравниваем полученные выражения виртуальных работ внутренних сил и внешних нагрузок (5). Полученное равенство справедливо при любых варьируемых перемещениях, если коэффициенты при независимых вариациях равны нулю. Отсюда имеем систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях

$$\begin{cases} H_{r,r} + \frac{1}{r} (H_r - H_\varphi) - Q = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q. \end{cases} \quad (7)$$

Постановка краевой задачи в перемещениях. Чтобы связать напряжения с деформациями слоев, воспользуемся законом Гука в девiatorно-сферовой форме:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = 3K_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad s_\alpha^{(k)} = 2G_k \vartheta_\alpha^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)},$$

где $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; K_k , G_k – модули объемной деформации и сдвига материала k -го слоя, причем $K_1 = K_2$, $G_1 = G_2$; $s_\alpha^{(k)}$, $\vartheta_\alpha^{(k)}$ – девиаторы; $s_{rz}^{(3)}$, $\vartheta_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и деформация в заполнителе.

Подставив в формулы (4) деформации (3), с учетом (1) получим выражения внутренних силовых факторов через две искомые функции $\psi(r)$, $w(r)$:

$$\begin{aligned}
 T_r &= \left[2K_0^+ h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) + K_3^+ h_3 \right] u_{,r} + \left[2K_0^- h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) + K_3^- h_3 \right] \frac{u}{r}; \\
 H_r &= c^2 \left[2K_0^+ h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) + K_3^+ \frac{2}{3} c \right] \psi_{,r} + c^2 \left[2K_0^- h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) + K_3^- \frac{2}{3} c \right] \frac{\psi}{r} - \\
 &\quad - c \left[2K_0^+ h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left(c + \frac{1}{2} h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^+ \frac{2}{3} c^2 \right] w_{,rr} - \\
 &\quad - c \left[2K_0^- h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left(c + \frac{1}{2} h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^- \frac{2}{3} c^2 \right] \frac{w_{,r}}{r}; \\
 M_r &= c \left[2K_0^+ h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left(c + \frac{1}{2} h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^+ \frac{2}{3} c^2 \right] \psi_{,r} - \\
 &\quad - c \left[2K_0^- h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left(c + \frac{1}{2} h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^- \frac{2}{3} c^2 \right] \frac{\psi}{r} - \\
 &\quad - \left[2K_0^+ h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left(c^2 + c h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) + \frac{1}{3} h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^+ \frac{2}{3} c^3 \right] w_{,rr} - \\
 &\quad - \left[2K_0^- h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left(c^2 + c h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) + \frac{1}{3} h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^- \frac{2}{3} c^3 \right] \frac{w_{,r}}{r}.
 \end{aligned}$$

Соотношения для T_φ , H_φ и M_φ следуют из приведенных, если в них поменять местами коэффициенты K_k^+ и K_k^- .

После подстановки выражений внутренних силовых факторов в систему (7), получим уравнения равновесия сэндвич-пластины в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 a_4^+ \psi_{,rr} + \left[\frac{a_4^+}{r} - \frac{c^2 K_0^+ h_0}{r_0} \right] \psi_{,r} - \left[\frac{a_4^+}{r} + \frac{c^2 K_0^- h_0}{r_0} \right] \frac{\psi}{r} - a_5^+ w_{,rrr} - \left[\frac{a_5^+}{r} + \frac{ch_0^2 K_0^+ r}{2r_0^2} - \frac{(ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] w_{,rr} + \\
 + \left[\frac{a_5^+}{r} - \frac{ch_0^2 K_0^- r}{2r_0^2} + \frac{(ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^-}{r_0} \right] \frac{w_{,r}}{r} - 2cG_3 \psi = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_5^+ \Psi_{,rrr} + \left[\frac{2a_5^+}{r} + \frac{ch_0^2 K_0^+ r}{r_0^2} - \frac{(2ch_0^2 + 2c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] \Psi_{,rr} - \\
& - \left[\frac{a_5^+}{r^2} - \frac{ch_0^2}{2r_0^2} (3K_0^+ + K_0^-) + \left(\frac{2ch_0^2 + 2c^2 h_0}{r_0 r} \right) \left(K_0^+ + \frac{K_0^-}{2} \right) \right] \Psi_{,r} + \\
& + \left[\frac{a_5^+}{r^2} - \frac{ch_0^2}{2r_0^2} (3K_0^+ - K_0^-) + \frac{3(2ch_0^2 + 2c^2 h_0) K_0^+}{2r_0 r} \right] \frac{\Psi}{r} - a_6^+ w_{,rrr} - \\
& - \left[\frac{2a_6^+}{r} - \frac{2h_0^3 K_0^+ r^2}{r_0^3} + \frac{(h_0^3 + ch_0^2) K_0^+ r}{r_0^2} - \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] w_{,rr} + \\
& + \left[\frac{a_6^+}{r} + \frac{h_0^3 r}{r_0^3} \left(\frac{5}{2} K_0^+ + K_0^- \right) - \left(\frac{h_0^3 + ch_0^2}{r_0^2} \right) (2K_0^+ + K_0^-) + \left(\frac{h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0}{r_0 r} \right) (K_0^+ + K_0^-) \right] w_{,r} - \\
& - \left[\frac{a_6^+}{r^2} + \frac{h_0^3 r}{r_0^3} \left(3K_0^+ - \frac{K_0^-}{2} \right) - \left(\frac{h_0^3 + ch_0^2}{r_0^2} \right) (K_0^+ - K_0^-) + \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0 r} \right] \frac{w_{,r}}{r} = -q, \quad (8)
\end{aligned}$$

где $a_4^\pm = c^2 \left(K_1^\pm h_1 + K_2^\pm h_2 + \frac{2}{3} K_3^\pm c \right)$; $a_5^\pm = c \left(K_1^\pm h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^\pm h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^2 \right)$;

$$a_6^\pm = K_1^\pm h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^\pm h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^3;$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+; \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-.$$

Граничные условия на контуре $r = r_0$ предполагаются следующими:

- при заделке $\Psi = w = w_{,r} = 0$;
- при шарнирном закреплении $\Psi = w = M_r = 0$.

Выводы. Представленная постановка краевой задачи (8), (9) является основой для дальнейшего изучения напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин с линейно изменяющимися по толщине несущими слоями.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 **Aghalovyan, L.** Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
- 3 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
- 4 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

5 **Vakhneev, S.** Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // *Journal of Applied Engineering Science*. – 2020. – Vol. 18, no. 4. – P. 699–704.

6 **Маркова, М. В.** Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // *Механика. Исследования и инновации*. – 2021. – Вып. 14. – С. 147–158.

7 **Кракова, И. Е.** Свободные колебания транспортных пакетов из сэндвич-панелей / И. Е. Кракова, О. И. Якубович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 150–154.

8 **Awrejcewicz, J.** Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, T. Shmatko // *Composite Structures*. – 2015. – Vol. 125. – P. 575–585.

9 Vibration and nonlinear dynamic analysis of variable thickness sandwich laminated composite panel in thermal environment / D. D. Nguyen [et al.] // *Journal of Sandwich Structures & Materials*. – 2021. – Vol. 23, is. 5. – P. 1541–1570.

10 **Захарчук, Ю. В.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 80–87.

11 **Нестерович, А. В.** Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2020. – Вып. 13. – С. 116–121.

12 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

13 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование упругопластической круговой трехслойной пластины на основании Винклера при термосиловом нагружении / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // *Проблемы прочности*. – 2007. – № 5. – С. 68–80.

14 **Муштари, Х. М.** Теория пологих трехслойных оболочек с наполнителем и слоями переменной толщины / Х. М. Муштари // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. – 1962. – № 4. – С. 162–168.

15 **Андреев, С. В.** Соотношения нелинейной теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины / С. В. Андреев, В. Н. Паймушин // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1993. – № 3. – С. 120–128.

A. V. **CHERNYAK**

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

BENDING OF A SANDWICH PLATE WITH OUTER LAYERS OF LINEARLY VARYING THICKNESS

An axisymmetric bending of a circular three-layer sandwich plate with external bearing layers linearly varying in thickness is considered. It is assumed that the outer layers deformation is described by Kirchhoff's kinematic hypotheses. For a relatively thick filler, the hypothesis of Timoshenko is used. The equilibrium equations are obtained, they make it possible to establish the plate stress-strain state, taking into account the given boundary conditions.

Keywords: bending, sandwich plate, variable thickness of bearing layers.

Получено 19.09.2022