УДК 534.113:517.95

Е. В. РОЖКОВА
Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ В ОБОБЩЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассмотрено полное уравнение второго порядка колебаний стержней, учитывающее внутреннее сопротивление, возникающее вследствие диссипации внутренней энергии, и внешнее сопротивление упругой среды, ведущее к появлению сил трения. Решение выполнено с применением нового рекуррентно-операторного метода, позволяющего решать дифференциальные уравнения любых типов, имеющие произвольную длину и произвольный порядок. Вместо корней характеристических уравнений решение сводится к получению рекуррентного соотношения. Представлены примеры получаемых выражений для общего и некоторых частных случаев.

Ключевые слова: рекуррентно-операторный метод, диссипация, внешнее сопротивление, упругое основание, уравнение Лапласа, обобщенное уравнение.

В литературе с целью учета особенностей внешних воздействий и механических характеристик материала при анализе колебаний стержней в уравнения вводятся дополнительные члены, учитывающие влияние таких факторов, как диссипация внутренней энергии, внешнее сопротивление среды, демпфирование, инерция поворота и сдвига, упругое основание и др. Однако комплексный учет всех факторов еще не проводился в связи со сложностью решения такой задачи. В монографии [1] приводится оценка относительного веса отдельных членов уравнения колебаний и показана необходимость аккуратного подхода к упрощениям при анализе динамического поведения стержневых систем. В связи с этим проблема получения решений полных уравнений колебаний стержней остается актуальной.

Обычно при решении усложненных дифференциальных уравнений колебаний стержней используются такие классические методы, как операционное исчисление, косинус-преобразование Фурье, вариационные методы [2]. Проведенные исследования показали, что в таком случае оказывается эффективным сравнительно новый рекуррентно-операторный метод решения произвольных линейных дифференциальных уравнений, основанный на забытом и не до конца разработанном методе неопределенных коэффициентов, который расширен на уравнения в частных производных [3–5]. В настоящее время с применением рекуррентно-операторного метода получены решения ряда задач гидромеханики и колебаний упругих тел [6–9]. В данной статье обобщаются результаты, полученные ранее в работах [5, 10–12].

Рассмотрим уравнение продольных колебаний стержня постоянного поперечного сечения в обобщенной сопротивляющейся среде:

$$(\partial_x^2 + a_{21}\partial_x^2\partial_t + a_{02}\partial_t^2 + a_{10}\partial_x + a_{01}\partial_t + a_{00})u(x,t) = 0\,, \tag{1}$$

где $\partial_s^k = \partial^k / \partial s^k$, a_{ij} – постоянные коэффициенты, у которых первый индекс показывает порядок производной по переменной x, второй – по переменной t.

Здесь полагается, что все слагаемые уравнения разделены на коэффициент при старшей производной a_{20}. В представленной форме оно включает в себя все классические и обобщенные уравнения теплопроводности, диффузии, Лапласа и волновые уравнения.

Обычно для получения решения дифференциальных уравнений вначале предлагается предполагаемый вид решения, в котором содержатся элементарные аналитические (представимые в виде степенных рядов) функции и содержатся неизвестные параметры, определяемые из условия удовлетворения уравнению и свободные элементы, предназначенные для обеспечения граничных условий. В этом случае очень важно предугадать, в каком виде следует искать решение, которое способно удовлетворить данному уравнению. В рекуррентно-операторном методе для решения линейных дифференциальных уравнений также предлагается искать решение сразу в виде рядов особого вида. Например, для уравнения (1) имеем

$$u_r(g_r(t)) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} Q_{i,j} x^{i+r,!}\partial_t^j(g_r(t)), \quad r = 0,1\,, \tag{2}$$

где $Q_{i,j}$ – постоянные коэффициенты, определяемые из уравнения (1); $g_r(t)$ – аналитические функции, выбираемые по виду задаваемых граничных условий; r – параметр, связанный с количеством частных решений, совпадающим с порядком уравнения. Здесь и далее используется обозначение $x^{k,!} = x^k / k!$, называемое «факториальной степенью».

Выражение (2) можно считать дифференциальным оператором бесконечно высокого порядка, действующим на функцию $g_r(t)$ и преобразующим ее в решение уравнения. Подстановка (2) в (1) приводит к рекуррентному соотношению для определения постоянных коэффициентов $Q(i, j)$:

$$Q_{i,j} = -a_{21}Q_{i,j-1} - a_{02}Q_{i-2,j-2} - a_{10}Q_{i-1,j} - a_{01}Q_{i-2,j-1} - a_{00}Q_{i-2,j}$$

при начальных условиях $Q_{00} = 1$, $Q_{i,j} = 0$ при $i < 0$ или при $j < 0$.

Общее решение этого рекуррентного соотношения, полученное методом полной математической индукции, принимает вид

$$Q_{i,j} = \sum_{l_{22}=0}^{\alpha_{22}}\sum_{l_{21}=0}^{\alpha_{21}}\sum_{l_{20}=0}^{\alpha_{20}} (-1)^{\beta}\beta!\frac{a_{02}^{l_{22}}}{l_{22}!}\frac{a_{01}^{l_{21}}}{l_{21}!}\frac{a_{00}^{l_{20}}}{l_{20}!}\frac{a_{10}^{i-\gamma_{10}}}{(i-\gamma_{10})!}\frac{a_{21}^{j-\gamma_{01}}}{(j-\gamma_{01})!}\,;$$

$$\beta = i + j - (3l_{22} + 2l_{21} + l_{20})\,;\ \gamma_{10} = 2(l_{22} + l_{21} + l_{20})\,;\ \gamma_{01} = 2l_{22} + l_{21}\,;$$

$$\alpha_{22} = \min\left(\left[\frac{i}{2}\right], \left[\frac{j}{2}\right]\right); \ \alpha_{21} = \min\left(\left[\frac{i-2l_{22}}{2}\right], \left[\frac{j-2l_{22}}{1}\right]\right); \ \alpha_{20} = \left[\frac{i-2(l_{22}+l_{21})}{2}\right].$$

Подставляя $Q_{i,j}$ в (1), получим

$$\begin{gathered}
u(g_r) = x^{r,!}\left[g_r - a_{21}g_r' + a_{21}^2 g_r'' - a_{21}^3 g_r''' + a_{21}^4 g_r^{IV} - \ldots\right] + \\
+x^{1+r,!}a_{10}\left[-g_r + 2a_{21}g_r' - 3a_{21}^2 g_r'' + 4a_{21}^3 g_r''' - \ldots\right] + \\
+x^{2+r}\left[(a_{10}^2 - a_{00})g_r + (-3a_{21}a_{10}^2 + 2a_{21}a_{00} - a_{01})g_r' + (6a_{21}^2 a_{10}^2 - 3a_{21}^2 a_{00} + 2a_{21}a_{01} - \right. \\
- a_{02})g_r'' + (-10a_{21}^3 a_{10}^2 + 4a_{21}^3 a_{00} - 3a_{21}^2 a_{01} + 2a_{21}a_{02})g_r''' + (15a_{21}^4 a_{10}^2 - 5a_{21}^4 a_{00} + \\
\left. + 4a_{21}^3 a_{01} - 3a_{21}^2 a_{02})g_r^{IV} + (-21a_{21}^5 a_{10}^2 + 6a_{21}^5 a_{00} - 5a_{21}^4 a_{01} + 4a_{21}^3 a_{02})g_r^{V} + \ldots\right] + \\
+x^{3+r}\left[(-a_{10}^3 + 2a_{10}a_{00})g_r + (4a_{21}a_{10}^3 - 6a_{21}a_{10}a_{00} + 2a_{10}a_{01})g_r' + \right. \\
\left. +(12a_{21}^2 a_{10}a_{00} - 10a_{21}^2 a_{10}^3 - 6a_{21}a_{10}a_{01} + 2a_{10}a_{02})g_r'' + \ldots\right] + \\
+x^{4+r}\left[(a_{10}^4 - 3a_{10}^2 a_{00} + a_{00}^2)g_r + \ldots\right] + \ldots
\end{gathered} \tag{3}$$

Для частного случая, полагая $a_{10} = a_{00} = 0$, получаем

$$\begin{gathered}
u(g_r) = x^{r,!}\left[g_r - a_{21}g_r' + a_{21}^2 g_r'' - a_{21}^3 g_r''' + a_{21}^4 g_r^{IV} - a_{21}^5 g_r^5 + \ldots\right] + \\
+x^{2+r,!}\left[-a_{01}g_r' + (2a_{21}a_{01} - a_{02})g_r'' + (-3a_{21}^2 a_{01} + 2a_{21}a_{02})g_r''' + \right. \\
\left. +(4a_{21}^3 a_{01} - 3a_{21}^2 a_{02})g_r^{IV} + \ldots\right] + \\
+x^{4+r,!}\left[a_{01}^2 g_r'' + (-3a_{21}a_{01}^2 + 2a_{02}a_{01})g_r''' + (6a_{21}^2 a_{01}^2 - 6a_{21}a_{02}a_{01} + a_{02}^2)g^{IV} + \ldots\right] + \\
+x^{6+r,!}\left[-a_{01}^3 g_r''' + (4a_{21}a_{01}^3 - 3a_{02}a_{01}^2)g_r^{IV} + \ldots\right] + \\
+x^{8+r,!}\left[a_{01}^4 g_r^{IV} + \ldots\right] + \ldots, \quad r = 0,1
\end{gathered}$$

Если формально вместо функций $g_r(t)$ принять $g_r = t^s / s!$, $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$, то ряд будет обрываться на $(s+1)$-й производной от функции $g_r(t)$, и получим точные полиномиальные решения однородного уравнения (1).

В частном случае однородного уравнения

$$(\partial_x^2 + a_{21}\partial_x^2\partial_t + a_{02}\partial_t^2)u(x,t) = 0 \quad (\ a_{21} = h = \alpha / EF\ ;\ a_{02} = -\mu = -\rho / E\ ),$$

где α – коэффициент, характеризующий внутреннее трение в материале; E, ρ – модуль упругости и плотность материала; F – площадь поперечного сечения стержня, решение удобно искать в виде

$$u_r(g_r) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} Q_{i,j} x^{2i+r,!}\partial_t^{i+j} g_r(t), \quad r = 0,1;$$

$$Q_{i,j} = -hQ_{i,j-1} + \mu Q_{i-1,j-1} = (-1)^{i+j}\binom{j}{i} h^{j-i}\mu^i.$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$u_r(g_r) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \sum_{i=0}^{j}(-1)^i \frac{j}{i!(j-i)!} h^{j-i}\mu^i x^{2i+r,!}\partial_t^{i+j} g_r(t), \quad r = 0,\ 1.$$

Так, при $g_r(t) = t^{4,!}$ имеем полиномиальное решение

$$u_r(x,t^{4,!}) = x^{r,!}(t^{4,!} - ht^{3,!} + h^2 t^{2,!} - h^3 t + h^4) +$$
$$+ x^{2+r,!}(-\mu t^{2,!} - 2h\mu t + 3h^2\mu) + x^{4+r,!}(\mu^2).$$

Рассмотрим простейшие уравнения, решения которых могут быть представлены в виде одной суммы. Так, в случае волнового уравнения

$$(\partial_x^2 - a_{02}\partial_t^2)u(x,t) = -f(x,t), \tag{4}$$

где $a_{02} = 1/\overset{*}{a}_{20}$, решение однородного уравнения (4)

$$u_r(x,g_r) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{2i} x^{2i+r,!}\partial_t^{2i}(g_r); \quad r = 0, 1,$$

где $Q_{2i} = a_{02}Q_{2i-2} = a_{02}^i$.

Если положить $g_0(t) = \cos\omega t$; $g_1(t) = \sin\omega t$, то получим решение с разделяющимися переменными:

$$u_0(x,g_0) = g_0(t)\cos(\omega\sqrt{a_{02}}x), \quad u_1(x,g_1) = g_1(t)\sin(\omega\sqrt{a_{02}}x).$$

Линейными комбинациями этих стоячих волн получаем бегущие волны:

$$u_0(x,g_0) \pm u_1(x,g_1) = \cos\omega(t \pm \sqrt{a_{02}}x), \quad u_1(x,g_0) \pm u_0(x,g_1) = \sin\omega(t \pm \sqrt{a_{02}}x).$$

Частным решением уравнения (1) будет

$$\tilde{u}(-f) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{2i}\partial_x^{-(2i+2)}\partial_t^{2i}(-f).$$

Например, при $f = x^{2,!}t^{5,!}$ получаем

$$\tilde{u}(-f) = -\left[Q_0 \int_0^x\int_0^x f(x,t)dx^2 + Q_2 \int_0^x \ldots \int_0^x \partial t_t^2(f(x,t))dx^4 + \ldots\right] =$$
$$= -\left[x^{4,!}t^{5,!} + a_{02}x^{6,!}t^{3,!} + a_{02}^2 x^{8,!}t\right].$$

Рассмотрим классическое уравнение диффузии и теплопроводности:

$$(a\partial_x^2 - \partial_t)T(x,t) = 0,$$

где a – коэффициент температуропроводности.

Его решение ищем в виде

$$T_r(x,g_r(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \frac{t^{i+r}}{(i+r)!}\partial_x^{2i} g(x), \quad r = 0,1. \tag{5}$$

Здесь коэффициенты Q_i определяются из рекуррентного соотношения

$$Q_i = aQ_{i-1} = a^i .$$

Полагая в (5) $g_1 = \sin bx$; $g_2 = \cos bx$, находим

$$T_0(g_1) = \exp(-ab^2 t)\sin bx; \qquad T_0(g_2) = \exp(-ab^2 t)\cos bx;$$

$$T_1(g_1) = (1-\exp(-ab^2 t))\cos bx; \qquad T_1(g_2) = (1-\exp(-ab^2 t))\sin bx.$$

Принимая далее $g_3 = e^{-at}$, $g_4 = e^{at}$, получим

$$T_0(g_3) = e^{at-bx}\ , \ \ T_1(g_4) = e^{at+bx}$$

(бегущие тепловые волны в прямом и обратном направлении). А если принять $g(x) = x^4 / 4!$, то найдем полиномиальное решение

$$T = \frac{x^4}{4!} + a\frac{t\,x^2}{2!} + a^2\frac{t^2}{2!}$$

уравнения теплопроводности.

Заключение. Представлены решения обобщенного уравнения продольных колебаний стержня с учетом большого количества факторов. Полученные выражения включают только коэффициенты уравнения и не требуют определения корней характеристического уравнения, что очень важно для исследования влияния каждого слагаемого уравнения колебаний.

Общие решения, полученные рекуррентно-операторным методом, выражаются через произвольные функции, число которых совпадает с числом граничных и начальных условий, из которых они определяются. Выбор произвольных функций из различных классов элементарных и специальных функций позволяет получить полный набор частных решений в тех же классах функций. Коэффициенты в выражениях, полученных линейной комбинацией частных решений, определяются из системы алгебраических уравнений, которая записывается на основе граничных условий.

Частные решения неоднородных уравнений строятся на основе нулевых начальных условий по выделенной переменной и не влияют на определение названных выше произвольных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Филиппов, А. П.** Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. – М. : Машиностроение, 1970. – 734 с.

2 **Xu, D.** An accurate and efficient series solution for the longitudinal vibration of elastically restrained rods with arbitrarily variable cross sections / D. Xu, J. Du, Z. Liu // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. – 2019. – Vol. 38, no. 2. – P. 403–414.

3 **Фролов, В. Н.** Специальные классы функций в анизотропной теории упругости / В. Н. Фролов. – Ташкент : Фан, 1981. – 221 с.

4 **Спиваков, Ю. Л.** Специальные классы решений линейных дифференциальных уравнений и их приложения к анизотропной теории упругости / Ю. Л. Спиваков. – Ташкент : Фан, 1986. – 186 с.

5 **Рожкова, Е. В.** Рекуррентно-операторный метод в задачах о колебании стержневых систем / Е. В. Рожкова // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 6. – С. 124–138.

6 **Pirniyazova, P. M.** Analytical solution of diffusion problems in the simulation of impurity diffusion and obtaining an exact solution / P. M. Pirniyazova // Austrian Journal of Technical and Natural Sciences. – 2018. – No. 1–2. – P. 32–36.

7 **Окбоева, Н. У.** О решении уравнений температурно-стратифицированных течений рекуррентно операторным методом / Н. У. Окбоева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Международ. конф. им. А. Ф. Терпугова. Ч. 1. – Томск : Изд-во науч.-техн. литературы, 2019. – С. 295–300.

8 **Pirniyazova, P. M.** Modelling of a three-dimensional problem of distribution of harmful impurity in the river a recurrently-operational method / P. M. Pirniyazova // Евразийский союз ученых. – 2020. – № 6–1 (75). – С. 8–12.

9 **Abjalilov, S. X.** On modeling of mechanical vibrations of orthotropic boards in electronic devices / S. X. Abjalilov, D. N. Ashurova, O. A. Begmurodov // Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal. – 2021. – Vol. 11, is. 4. – P. 1263–1270.

10 **Рожкова, Е. В.** Решение обобщённого уравнения колебания стержней рекуррентно-операторным методом / Е. В. Рожкова // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2018. – № 5. – С. 90–105.

11 **Рожкова, Е. В.** Расчет колебаний вязкоупругих балок рекуррентно-операторным методом / Е. В. Рожкова // Узбекский журнал «Проблемы механики», 2013. – № 3–4. – С. 20–23.

12 **Рожкова, Е. В.** Решение уравнений поперечных и продольных колебаний стержня с учетом диссипации внутренней энергии рекуррентно-операторным методом / Е. В. Рожкова, Н. Б. Рузиева // Austria Science. – 2018. – № 13. – С. 33–35.

E. V. ROJKOVA
Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

ROD LONGITUDINAL OSCILLATIONS IN THE GENERALIZED ELASTIC MEDIUM

The complete equation of the second order of the rods oscillations is considered, it takes into account the internal resistance arising due to the internal energy dissipation and the elastic medium external resistance, leading to the appearance of friction forces. The solution is performed using a new recurrent-operator method, it allows to solve differential equations of any type with arbitrary length and order. Instead of the roots of the characteristic equations, the solution is reduced to a recurrent relation obtaining. Examples of obtained expressions for the general and some particular cases are presented.

Keywords: recurrent operator method, dissipation, external resistance, elastic foundation, Laplace equation, generalized equation.

Получено 15.11.2022