

УДК 691-419:539.377

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ИЗГИБ СТУПЕНЧАТОЙ КРУГОВОЙ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ ПРИ ТЕПЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрен изгиб круглой ступенчатой сэндвич-пластины под действием термосиловых нагрузок. Принято, что для несжимаемого срединного слоя справедлива гипотеза Тимошенко, для наружных слоев – гипотезы Кирхгофа. Уравнения равновесия выведены на основе вариационного принципа с учетом соотношений термоупругости. Приведен пример численного расчета на основе полученного аналитического решения.

Ключевые слова: круговая сэндвич-пластина, ступенчато-переменная толщина, термоупругость.

Введение. Учет температуры при проектировании конструктивных элементов требует создания новых и уточнения существующих методов расчета. Механика многослойных конструкций рассмотрена в работе [1]. Монография [2] посвящена статическому и динамическому деформированию слоистых оболочек и пластин при различных моделях материалов слоев. В работе [3] рассмотрены типовые задачи термоупругости в квазистатической постановке для тонкостенных конструкций. В монографии [4] исследован изгиб трехслойного стержня при действии термосиловых нагрузок. Деформирование трехслойной балки со ступенчато-переменной границей в температурном поле представлено в работе [5]. Ряд статей [6–8] посвящен исследованию поведения круговых однослойных пластин при действии температурного поля. Целью представленной работы стало решение задачи об изгибе круговой сэндвич-пластины, имеющей ступенчато-переменную толщину, при совместном действии силовой и температурной нагрузок.

Постановка задачи. Круговая пластина включает три слоя. Обозначим через h_1 толщины на участке l ($h_1 \neq h_2$) внешних слоев (рисунок 1). Для них справедливы гипотезы Кирхгофа. Деформирование срединного внутреннего слоя (заполнителя) толщиной $2c$ соответствует гипотезе Тимошенко. Перемещения на границах слоев неразрывны.

Для решения задачи вводим цилиндрическую систему координат r, φ, z , связанную со срединной плоскостью симметричной по толщине пластины.

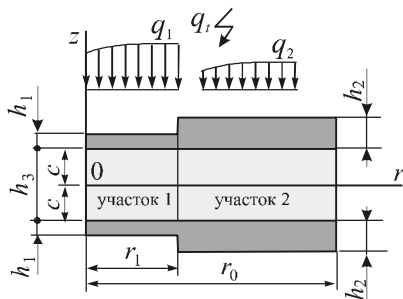


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины под термосиловой нагрузкой

По нормали к наружной поверхности верхнего слоя приложены осесимметричные распределенные нагрузки $q_1(r)$, $q_2(r)$, а также подводится тепловой поток q_r . Распределение температуры в слоях считаем известным [2]. В качестве искоемых величин принимаются прогиб пластины $w_l(r)$ и относительный сдвиг $\psi_l(r)$ в срединном слое на каждом участке l .

Для получения уравнений равновесия в перемещениях воспользуемся соотношениями закона Гука для термоупругих деформаций в девиаторно-сферовой форме [2]

$$s_{\alpha}^{(ex,f)} = 2G_{ex,f}(T_{ex,f})\vartheta_{\alpha}^{(ex,f)}, \quad \sigma^{(ex,f)} = 3K_{ex,f}(T_{ex,f})(\varepsilon^{(ex,f)} - \alpha_{0(ex,f)}T_{ex,f}),$$

$$s_{rz}^{(f)} = 2G_f(T_f)\vartheta_{rz}^{(f)} \quad (\alpha = r, \varphi),$$

где $s_{\alpha}^{(ex,f)}$, $\vartheta_{\alpha}^{(ex,f)}$ – девиаторы напряжений и деформаций, индекс ex здесь и далее соответствует внешним, f – внутреннему слою; $\sigma^{(ex,f)}$, $\varepsilon^{(ex,f)}$ – шаровые тензоры напряжений и деформаций; $G_{ex,f}$, $K_{ex,f}$ – зависящие от температуры модули сдвига и объемной деформации материала слоев; $T_{ex,f}$ – известные температуры в слоях; $\alpha_{0(ex,f)}$ – коэффициент линейного температурного расширения материала.

В работе [9] представлено решение задачи об изотермическом деформировании круговой ступенчатой пластины:

$$\psi(r) = \psi_1(r) + (\psi_2(r) - \psi_1(r))H_0(r - r_1),$$

$$w(r) = w_1(r) + (w_2(r) - w_1(r))H_0(r - r_1),$$

где $H_0(r)$ – функция Хевисайда [10].

Система уравнений равновесия пластины на каждом участке не будет отличаться от аналогичной при изотермическом нагружении

$$L_2(b_{1l}\psi_l - b_{2l}w_{l,r}) = 0;$$

$$L_3(b_{2l}\psi_l - b_{3l}w_{l,r}) = -q_l. \quad (1)$$

где L_2 , L_3 – дифференциальные операторы второго и третьего порядков соответственно [2].

Коэффициенты b_{il} в (1) зависят от температуры и характеристик жесткости слоев пластины:

$$b_{1l} = K_{f2}^l + 2c^2 K_{ex0}^l, \quad b_{2l} = K_{f2}^l + 2c K_{ex1}^l, \quad b_{3l} = 2K_{ex2}^l + K_{f2}^l,$$

$$K_{(ex,f)m}^l = \int_{h_{(ex,f)l}} \left[K_{ex,f}(T_{ex,f}) + \frac{4}{3}G_{ex,f}(T_{ex,f}) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2).$$

Решение системы (1) примем в виде [11]:

$$\Psi_l = \frac{b_{2l}}{b_{1l}} w_{l,r} + C_{1l} r + \frac{C_{2l}}{r};$$

$$w_l = C_{3l} + C_{4l} r^2 + C_{5l} \ln(r) + C_{6l} r^2 \ln(r) + w_l^*; \quad (2)$$

$$w_l^* = \frac{1}{D_l} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int q_l r dr dr dr dr, \quad D_l = b_{3l} - \frac{b_{2l}^2}{b_{1l}},$$

где C_{il} – постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий на торцах участка l пластины ($i = 1, \dots, 6$).

Кроме этого необходимо учесть условия конечности перемещений (w_l , Ψ_l , Q_r^l) в центре пластины (при $r = 0$) и условия на границе областей с разными толщинами при $r = r_1$:

– кинематические условия

$$w_1(r_1) = w_2(r_1), \quad w_{1,r}(r_1) = w_{2,r}(r_1), \quad \Psi_1(r_1) = \Psi_2(r_1); \quad (3)$$

– силовые граничные условия

$$M_r^1 = M_r^2, \quad H_r^1 = H_r^2, \quad Q_r^1 = Q_r^2. \quad (4)$$

Здесь обобщенные силы и моменты:

$$\begin{aligned} H_r^l &= b_{1l} \Psi_{l,r} + b_{1l}^- \frac{\Psi_l}{r} - b_{2l} w_{l,rr} - b_{2l}^- \frac{w_{l,r}}{r} - H_r^{lt}, \\ Q_r^l &= b_{2l} \left(\Psi_{l,rr} + \frac{\Psi_{l,r}}{r} - \frac{\Psi_l}{r^2} \right) - b_{3l} \left(w_{l,rrr} + \frac{w_{l,rr}}{r} - \frac{w_{l,r}}{r^2} \right), \\ M_r^l &= b_{2l} \Psi_{l,r} + b_{2l}^- \frac{\Psi_l}{r} - b_{3l} w_{l,rr} - b_{3l}^- \frac{w_{l,r}}{r} - M_r^{lt}, \end{aligned}$$

где H_r^{lt} , M_r^{lt} – «температурные» составляющие моментов,

$$b_{1l}^- = K_{f2}^{l-} + 2c^2 K_{ex0}^{l-}, \quad b_{2l}^- = K_{f2}^{l-} + 2c K_{ex1}^{l-}, \quad b_{3l}^- = 2K_{ex2}^{l-} + K_{f2}^{l-},$$

$$K_{(ex,f)m}^{l-} = \int_{h_{(ex,f)l}} \left[K_{ex,f}(T_{ex,f}) - \frac{2}{3} G_{ex,f}(T_{ex,f}) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2).$$

Дополнительно предполагаем, что на торцевом контуре пластины расположена жесткая диафрагма. В случае шарнирного закрепления вдоль него должны выполняться следующие условия:

$$\Psi_2 = 0, \quad w_2 = 0, \quad M_r^2 = 0. \quad (5)$$

Последнее выражение (4) можно записать через перемещения:

$$\left(b_{22} \Psi_{2,r} + b_{22}^- \frac{\Psi_2}{r} - b_{32} w_{2,rr} - b_{32}^- \frac{w_{2,r}}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = 6\alpha_{0ex} \int_{h_b} K_{ex} T_{ex} z dz + 3\alpha_{0f} \int_{h_f} K_f T_f z dz. \quad (6)$$

Выражения (3)–(6) образуют систему двенадцати линейных алгебраических уравнений, из которой определяются константы интегрирования $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{26}$.

Таким образом, решение (2) описывает термоупругие перемещения в круговой ступенчатой трехслойной пластине в случае шарнирного закрепления контура.

Результаты расчета. Для численной апробации решения была выбрана сэндвич-пластина с внешними слоями из сплава Д16Т и наполнителем из фторопласта-4, значения упругих констант для которых взяты из [2]. Толщины слоев пластины приведены к ее радиусу r_0 : $h_1 = 0,02, h_2 = 0,04, c = 0,15$; интенсивность нагрузки принята $q_0 = 100$ кПа.

На рисунке 2 приведен график изменения напряжения σ_r по толщине в центре пластины ($r = 0$) при различных температурах: 1 – $T = 293$ К, 2 – $T = 323$ К, 3 – $T = 353$ К. Для удобства восприятия масштаб напряжений в срединном слое увеличен в 100 раз. При стандартной температуре 293 К (кривые 1) нижний слой сжат, верхний растянут, а в срединном слое возникают напряжения разных знаков. Увеличение температуры на 30 К (кривые 2) приводит к сжатию всех слоев. С увеличением температуры еще на 30 К происходит перераспределение напряжений в слоях пакета пластины. Напряжения на верхней стороне пластины растут медленнее, чем на нижней.

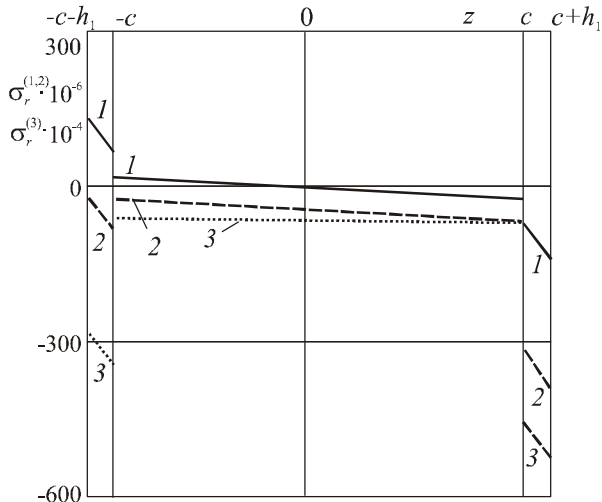


Рисунок 2 – Изменение напряжения σ_r по толщине в центре пластины

Заключение. Таким образом, в работе получены аналитические и числовые решения краевой задачи термосилового изгиба упругих круговых пластин ступенчато-переменной толщины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект T22УЗБ-015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 343 с.

3 **Коваленко, А. Д.** Термоупругость / А. Д. Коваленко. – Киев : Вища школа, 1975. – 216 с.

4 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 183 с.

5 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.

6 **Iatan, R. I.** Thermal states of loading in the annular plates. Variable temperature along the radius. Outer edge fixed and inner edge free / R. I. Iatan, C. T. Popa, R. Mengher // Journal of Engineering Studies and Research. – 2012. – Vol. 18, is. 4. – P. 53–60.

7 **Ahire, Y. M.** Analysis of thermal stresses in thin circular plate due to moving heat source / Y. M. Ahire, A. A. Hamoud, K. P. Ghadle // International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development. – 2019. – Vol. 9, is. 3. – P. 1285–1292.

8 **Kaur, I.** Transversely isotropic thermoelastic thin circular plate with constant and periodically varying load and heat source / I. Kaur, P. Lata // International Journal of Mechanical and Materials Engineering. – 2019. – Vol. 14. – Article 10. – 13 p.

9 **Леоненко, Д. В.** Локальное нагружение ступенчатой круговой сэндвич-пластины / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 126–130.

10 **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

11 **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1976. – 576 с.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

BENDING OF A STEPED CIRCULAR SANDWICH PLATE UNDER THERMAL LOADING

Bending of a round stepped sandwich plate under the action of thermal-force loads is considered. It is accepted that the hypothesis of Timoshenko is valid for the incompressible middle layer, and the hypothesis of Kirchhoff is valid for the outer layers. The equilibrium equations are derived on the basis of the variational principle, taking into account the thermoelasticity relations. An example of a numerical calculation based on the obtained analytical solution is given.

Keywords: circular sandwich plate, step-variable thickness, thermoelasticity.

Получено 19.10.2022