

УДК 691-419:539.374

А. Г. КОЗЕЛ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

Приведена постановка краевой задачи о термосиловом изгибе упругопластической трехслойной круговой пластины, связанной с двухпараметрическим основанием Пастернака. Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Учтено влияние температуры на напряженно-деформированное состояние пластины. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине легком заполнителе – гипотеза Тимошенко. Наличие жесткой диафрагмы на контуре пластины препятствует относительному сдвигу слоев. Система дифференциальных уравнений равновесия выведена вариационным методом. Получено аналитическое решение краевой задачи методом упругих решений.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, изгиб, температура, пластичность, основание Пастернака.

Введение. В настоящее время при создании современных элементов конструкций стремятся добиться не только заданных показателей прочности и жесткости, но и обеспечить сопротивляемость тепловым, радиационным или некоторым другим негативным воздействиям. С этой точки зрения хорошо зарекомендовали себя многослойные элементы. Использование материалов слоев с разными физико-механическими свойствами позволяет достичь желаемых результатов.

Основы термоупругости и её основные уравнения, постановки и методы решения ряда задач квазистатики и динамики слоистых элементов конструкций изложены в монографиях [1–4]. Учтены реономные и физически нелинейные свойства материалов слоев при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях. Динамическое деформирование круговых трехслойных сплошных и ступенчатых пластин, в том числе на упругом основании, исследовалось в статьях [5, 6]. Точные решения для изгибных колебаний функционально градиентных многослойных пластин, связанных с двухпараметрическим основанием, при различных граничных условиях получены в [7]. Нелинейные колебания многослойных цилиндрических оболочек, усиленных спиральными ребрами жесткости, окруженными демпфирующим и упругим основанием в термической среде исследованы в работе [8].

Сжимаемость заполнителя при изгибе сэндвич-пластин, в том числе с учетом температуры, изучена в публикациях [9, 10]. В работе [11] рассмотрено деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием неосесимметричных термосиловых нагрузок. Термосиловое деформирование прямоугольных функционально-градиентных пластин на двухпара-

метрическом основании исследовано в статье [12]. Термоупругое и термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин, скрепленных с упругим однопараметрическим основанием Винклера рассматривалось в статьях [13, 14]. Сравнение моделей основания Пастернака и Винклера при расчете напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин проведено в статье [15]. Показано, что при использовании двухпараметрической модели, учет сдвиговых свойств приводит к уменьшению значений параметров напряженно-деформированного состояния. Это позволяет прогнозировать увеличение ресурса конструкций. Изотермический изгиб физически линейных и нелинейных круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, изучен в работах [16, 17], термоупругий изгиб – в статье [18].

В предлагаемой работе, в отличие от исследований, рассмотренных ранее, анализируется физически нелинейный изгиб круговой трехслойной пластины, связанной с двухпараметрическим упругим основанием Пастернака, вызванный термосиловым воздействием.

Постановка краевой задачи в усилиях. Постановка задачи и ее решение выполнены в цилиндрической системе координат r, φ, z (рисунок 1). В изотропных несущих слоях толщиной h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа. В лёгком несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ , радиальные перемещения линейно распределены по толщине, не учитывается работа касательных напряжений σ_{rz} (3).

На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. За искомые функции приняты: прогиб пластины $w(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$, радиальное перемещение координатной плоскости $u(r)$.

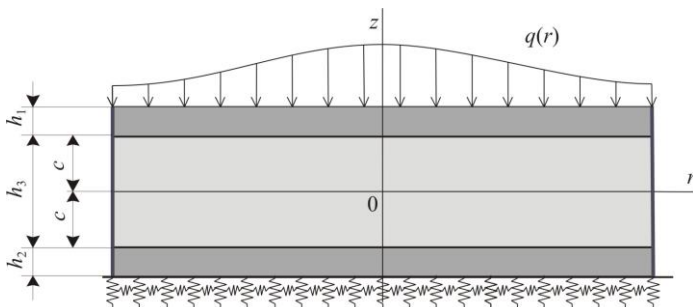


Рисунок 1 – Расчетная схема круговой трехслойной пластины на упругом основании

На нижнюю поверхность несущего слоя 2 пластины действует распределенная по ее площади реакция основания q_R согласно модели Пастернака [19]:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия основания, Па/м; t_f – коэффициент сдвига основания, Па·м; $w(r)$ – осадка (прогиб) поверхности основания, м; Δ – оператор Лапласа

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \equiv w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r},$$

запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, поэтому

$$u_{\varphi}^{(k)} = 0,$$

где $k = 1, 2, 3$ – номер слоя.

Слои несжимаемы по толщине, поэтому в направлении оси z перемещения точек пластины равны прогибу срединной плоскости заполнителя

$$u_z^{(k)} = w(r).$$

Используем гипотезу прямолинейности нормали заполнителя

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ – сдвиговые деформации в заполнителе.

Радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$ получим, проинтегрировав выражение (2):

$$\begin{aligned} & \text{– в первом слое } (c \leq z \leq c + h_1) \quad u_r^{(1)} = u + c\psi - zw_{,r}; \\ & \text{– во втором слое } (-c - h_2 \leq z \leq -c) \quad u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r}; \\ & \text{– в третьем слое } (-c \leq z \leq c) \quad u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $(u + c\psi)$ – величина смещения первого несущего слоя за счет деформации заполнителя; $(u - c\psi)$ – смещение для второго несущего слоя; z – координата рассматриваемого волокна.

Малые деформации в слоях следуют из (3) и соотношений Коши.

Пусть в процессе силового деформирования в температурном поле материалы несущих слоев пластины проявляют упругопластические свойства. Связь напряжений и деформаций в них принимается согласно теории малых упругопластических деформаций с учетом температуры:

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k(T_k)(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k))\varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2), \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T_k), \end{aligned} \quad (4)$$

где $s_{\alpha}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая часть тензора напряжений k -го слоя, Па; $\varepsilon_{\alpha}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая часть тензора деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули сдвиговой и объёмной деформации материалов слоев, Па; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – функции пластичности материалов несущих слоев,

которые зависят от интенсивности деформаций $\varepsilon_u^{(k)}$ и температуры T_k ; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения; ΔT_k – приращение температуры в k -м слое, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0 , К.

В заполнителе проявляются нелинейно упругие свойства. В нем дополнительно учитывается влияние вида напряженного состояния:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3) s_{\alpha\beta}^{(3)} &= 2G_3(T_3)(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3)) \vartheta_{\alpha\beta}^{(3)}, \quad (\alpha, \beta = r, \varphi), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(T_3)(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3)) \vartheta_{rz}^{(3)}, \\ \varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3) \sigma^{(3)} &= 3K_3(T_3)(\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03}\Delta T_3),\end{aligned}\quad (5)$$

где $G_3(T_3)$, $K_3(T_3)$ – температурно-зависимые модули сдвиговой и объёмной деформации материала заполнителя, Па; $s_{rz}^{(3)}$, $\vartheta_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3)$ – универсальная функция физической нелинейности заполнителя, зависящая от интенсивности деформаций $\varepsilon_u^{(3)}$ и температуры T_3 ; $\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3)$, $\varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3)$ – функции нелинейности, учитывающие влияние гидростатического напряжения $\sigma^{(3)}$.

Используя соотношения (4), (5), компоненты тензора напряжений в слоях представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций, выделив упругие (индекс «e») и температурно-нелинейные (индекс «ω») слагаемые:

$$\begin{aligned}T_\alpha^{(k)} &= \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad \sigma_{ae}^{(k)} = 2G_k(T_k) \vartheta_\alpha^{(k)} + 3K_k(T_k) \varepsilon^{(k)}, \\ \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k) \vartheta_\alpha^{(k)} + 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k, \\ \sigma_\alpha^{(3)} &= \sigma_{ae}^{(3)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{ae}^{(3)} = 2G_3(T_3) \vartheta_\alpha^{(3)} + 3K_3(T_3) \varepsilon^{(3)}, \\ \sigma_{\alpha\omega}^{(3)} &= 2G_3(T_3) \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3) \vartheta_\alpha^{(3)} + 3K_3(T_3) \alpha_{03} \Delta T_3 + \\ &+ (\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) s_\alpha^{(3)} + (\varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) \sigma^{(3)}.\end{aligned}\quad (6)$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «e») и температурно-нелинейной (индекс «ω») частей

$$T_\alpha^{(k)} = T_{ae}^{(k)} - T_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad M_\alpha^{(k)} = M_{ae}^{(k)} - M_{\alpha\omega}^{(k)}.$$

Используя формулы (4), представим обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине

$$\begin{aligned}T_\alpha &= T_{ae} - T_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{ae}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} dz, \\ M_\alpha &= M_{ae} - M_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{ae}^{(k)} z dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} z dz, \\ H_{ae} &= M_{ae}^{(3)} + c(T_{ae}^{(1)} - T_{ae}^{(2)}), \quad H_{\alpha\omega} = M_{\alpha\omega}^{(3)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)}).\end{aligned}\quad (7)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия была получена в статье [16] с помощью вариационного принципа возможных перемещений Лагранжа без использования физических уравнений связи напряжений с деформациями. Поэтому она будет справедлива и здесь. Используя выражения (1), (4)–(7), получим систему уравнений равновесия в усилиях, описывающую деформирование физически нелинейной круговой трехслойной пластины с легким наполнителем, связанной с двухпараметрическим основанием Пастернака:

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_\omega, \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = h_\omega, \quad (8)$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q + q_\omega.$$

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщённых внутренних усилий, причем нижний индекс « e » в дальнейшем опущен для удобства. Температурно-нелинейные добавки сосредоточены справа и включены в слагаемые с нижним индексом « ω »:

$$p_\omega = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}),$$

$$q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}).$$

Постановку задачи завершаем учетом граничных условий в усилиях на контуре пластины

$$T_r = T_r^0 + T_\omega, \quad H_r = H_r^0 + H_\omega, \quad M_r = M_r^0 + M_\omega, \quad (9)$$

$$M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0 + M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}),$$

где T_r^0 , Q^0 , H_r^0 , M_r^0 – внешние погонные силы и моменты, приложенные на контуре пластины.

Система уравнений равновесия в перемещениях. Линейные составляющие обобщённых внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения по формулам, приведенным в [16], поэтому система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая уравнениям (8), принимает вид:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = p_\omega, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = h_\omega, \quad (10)$$

$$L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q + q_\omega.$$

где L_2 , L_3 – дифференциальные операторы;

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3},$$

a_i – коэффициенты учитывающие геометрические параметры, зависимость модулей упругости материалов слоев по толщине от температуры

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}),$$

$$a_5 = K_{32} + c(K_{11} - K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2},$$

$$K_{km} = \int_{h_k} \left(K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) z^m dz, \quad m = 0, 1, 2.$$

При усреднении температурного поля по толщине k -го слоя пластины значения упругих параметров однородны внутри слоя в данный момент времени t

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}), \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}), \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z, t) dz.$$

Краевая задача по нахождению перемещений в круглой физически нелинейной пластине на основании Пастернака оказывается полностью определенной после присоединения к системе (10) силовых (9) или кинематических граничных условий. Помимо выражений (3) они включают соотношения для контура пластины (при $r = R$):

- для жесткой заделки $u = 0, \psi = 0, w = 0, w_{,r} = 0$;
- при шарнирном закреплении $u = 0, \psi = 0, w = 0, M_r = 0$;
- в случае свободного опирания $\psi = 0, T_r = 0, M_r = 0, Q = 0$.

Метод упругих решений. Система дифференциальных уравнений равновесия (10), описывающая деформирование рассматриваемой пластины, является нелинейной, поэтому для ее решения применен метод упругих решений, предложенный А. А. Ильиушиным [20]. Система принимает следующий итерационный вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)}) &= p_{\omega}^{(n-1)}; \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) &= h_{\omega}^{(n-1)}; \\ L_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) - \kappa_0 w^{(n)} + t_f \Delta w^{(n)} &= -q + q_{\omega}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где n – номер приближения; $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$ – дополнительные «внешние» нагрузки, которые на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения

$$\begin{aligned} p_{\omega}^{(n-1)} &= T_{r\omega}^{(n-1)},_r + \frac{1}{r} (T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\phi\omega}^{(n-1)}), \quad h_{\omega}^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)},_r + \frac{1}{r} (H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\phi\omega}^{(n-1)}), \\ q_{\omega}^{(n-1)} &= M_{r\omega}^{(n-1)},_{rr} + \frac{1}{r} (2M_{r\omega}^{(n-1)},_r - M_{\phi\omega}^{(n-1)},_r), \end{aligned}$$

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k(T_k)\omega_k(\varepsilon_{\alpha}^{(k)(n-1)}, T_k)\vartheta_{\alpha}^{(k)(n-1)} dz + \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k dz + \\ + \int_{h_3} s_{\alpha}^{(3)}(\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) dz + \int_{h_3} \sigma^{(3)}(\varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) dz ,$$

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k(T_k)\omega_k(\varepsilon_{\alpha}^{(k)(n-1)}, T_k)\vartheta_{\alpha}^{(k)(n-1)} z dz + \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k z dz + \\ + \int_{h_3} s_{\alpha}^{(3)}(\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) z dz + \int_{h_3} \sigma^{(3)}(\varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) z dz ,$$

$$H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(3)(n-1)} + c \left(T_{\alpha\omega}^{(1)(n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)(n-1)} \right).$$

Используя этот метод, на каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными «внешними» нагрузками.

С помощью первых двух в третьем уравнении системы (11) обнуляем коэффициенты перед искомыми функциями $u^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$. После двукратного интегрирования этих уравнений система приводится к виду

$$u^{(n)} = b_1 w_{,r}^{(n)} - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int_0^r r \int_0^r (a_2 h_{\omega}^{(n-1)} - a_4 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_1^{(n)} r + \frac{C_2^{(n)}}{r} ,$$

$$\psi^{(n)} = b_2 w_{,r}^{(n)} + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int_0^r r \int_0^r (a_1 h_{\omega}^{(n-1)} - a_2 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_3^{(n)} r + \frac{C_4^{(n)}}{r} ,$$

$$\Delta \Delta w_{,r}^{(n)} - t_f D \Delta w^{(n)} + \kappa_0 D w^{(n)} = qD + f_{\omega}^{(n-1)} ,$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2} ,$$

$$D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2} ;$$

$f_{\omega}^{(n-1)}$ – функция нелинейности, включающая дополнительные «внешние» нагрузки.

$$f_{\omega}^{(n-1)} = -D q_{\omega}^{(n-1)} + D_1 \frac{1}{r} (r p_{\omega}^{(n-1)})_{,r} + D_2 \frac{1}{r} (r h_{\omega}^{(n-1)})_{,r} ,$$

$$D_1 = \frac{a_1 (a_3 a_4 - a_2 a_5)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2} ,$$

$$D_2 = \frac{a_1 (a_1 a_5 - a_2 a_3)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2} ;$$

$C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, C_4^{(n)}$ – константы интегрирования, определяемые на каждом шаге итерации из граничных условий.

Заключение. В работе получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, описывающая термосиловой изгиб физически нелинейной круговой трехслойной пластины на основании Пастернака. Применение метода упругих решений позволяет получить итерационное аналитическое решение краевой задачи для численного исследования напряженно-деформированного состояния пластин при произвольных осесимметричных нагрузках.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T22M-072).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 **Carrera, E.** Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F. A. Fazzolari, M. Cinefra. – Amsterdam : Academic Press, 2016. – 410 p.

3 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

4 **Старовойтов, Э. И.** Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.

5 **Маркова, М. В.** Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 147–158.

6 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трёхслойных пластин на упругом основании Пастернака // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2014. – Т. 11, № 1. – С. 59–63.

7 **Tossapanon, P.** Flexural vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on elastic foundation with arbitrary boundary conditions: Chebyshev collocation technique / P. Tossapanon, N. Wattanasakulpong // Journal of Sandwich Structures & Materials. – 2020. – Vol. 22, no. 2. – P. 156–189.

8 **Ahmadi, H.** Nonlinear vibration of stiffened multilayer FG cylindrical shells with spiral stiffeners rested on damping and elastic foundation in thermal environment / H. Ahmadi, K. Foroutan // Thin-Walled Structures. – 2019. – Vol. 145. – Article 106388. – 26 p.

9 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

10 **Зеленая, А. С.** Термоупругий изгиб трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 93–100.

11 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

12 **Bouderba, B.** Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations / B. Bouderba, M. S. A. Houari, A. Tounsi // Steel and Composite Structures. – 2013. – Vol. 14 (1). – P. 85–104.

13 **Yarovaya, A. V.** Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation / A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, no. 2. – P. 206–213.

14 **Леоненко, Д. В.** Термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 5. – С. 106–119.

15 **Козел, А. Г.** Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А. Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

16 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 1. – С. 392–406.

17 **Козел, А. Г.** Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.

18 **Козел, А. Г.** Термосиловой изгиб упругой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 90–96.

19 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Гостройиздат, 1954. – 56 с.

20 **Ильюшин, А. А.** Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М.–Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

A. G. KOZEL

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

THERMOELASTIC-PLASTIC BENDING OF A THREE-LAYER CIRCULAR PLATE ON THE PASTERNAK FOUNDATION

There is presented the formulation of the boundary value problem for the thermoforce bending of an elastic-plastic three-layer circular plate connected with a two-parameter Pasternak foundation. The state physical equations correspond the theory of small elastic-plastic deformations. The effect of temperature change on the plate stress-strain state is taken into account. In the thin bearing layers, the hypotheses of Kirchhoff are valid, in the light filler incompressible in thickness, Timoshenko's hypothesis is valid. The presence of a rigid diaphragm on the plate contour prevents the relative shift of the layers. The system of differential equilibrium equations was derived by the variational method. The analytical solution of the boundary value problem is obtained by the method of elastic solutions.

Keywords: three-layer circular plate, bending, temperature, plasticity, Pasternak foundation.

Получено 22.10.2022