

УДК 539.319

Е. В. КОДНЯНКО^{1,2}, Д. А. ЧЕРНОУС²

¹ЗАО «Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», Солигорск, Беларусь

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА ДЛЯ АНАЛИЗА КАЧЕНИЯ КОЛЕСА С ТОНКИМ УПРУГИМ ОБОДОМ

Разработана методика решения контактной задачи о стационарном качении жесткого цилиндра с тонким деформируемым ободом в ведомом режиме, которая основана на использовании обобщенной модели Винклера. Получены аналитические выражения для контактного давления и сдвигового контактного напряжения. Результаты использования предлагаемой методики сопоставлены с расчетными оценками, полученными на основе точного решения задачи теории упругости для полосы.

Ключевые слова: модель Винклера, контактное давление, контактное сдвиговое напряжение, момент сопротивления качению, зона сцепления, зона проскальзывания.

Введение. В настоящее время в конструкциях различных машин и механизмов широко используются детали с полимерными покрытиями. В частности, в конструкцию шахтных скипов входят стальные роликовые опоры с полиуретановыми обкладками [1]. При проектировании таких опор следует минимизировать износ обкладок и, главным образом, проводника скипо-клетевого ствола. Поэтому требуется расчетная методика, позволяющая достоверно прогнозировать напряжения и деформации в названных опорах на основе рассмотрения контактной задачи для тела качения с покрытием. Точное ее решение требует использования сложного математического аппарата (интегральные преобразования, системы интегральных уравнений и др.) [2, 3], что затрудняет непосредственное применение получаемых соотношений при практических расчетах деталей и узлов механизмов и машин.

Относительно малая (по сравнению с характерным размером области контакта) толщина полимерных покрытий и их пренебрежимо малая жесткость (по сравнению с жесткостью материала детали) позволяют при решении контактной задачи использовать для покрытия модель Винклера, которая в настоящее время достаточно широко используется для анализа деформирования тонких покрытий [4–7]. При отсутствии в зоне сцепления контактирующих тел горизонтальных (в плоскости области контакта) смещений данная модель не позволяет оценить уровень сдвиговых контактных напряжений. Вместе с тем до настоящего времени остается не решенным вопрос о возможности подобного расчета для подвижного контакта.

Ранее авторами был предложен вариант использования упрощенной модели основания для расчета сдвиговых напряжений [8]. Однако при этом изучался этап предварительного нагружения колеса, но не рассматривался процесс

его качения. Цель данного исследования, которое является развитием работы, представленной в [9], состоит в разработке расчетной методики, позволяющей в рамках модели Винклера определить контактные давления и сдвиговые контактные напряжения при качении колеса с тонким полимерным покрытием.

Описание модели. Опора качения с полимерным покрытием моделируется абсолютно жестким цилиндром с деформируемым ободом, который образован изотропным линейно упругим материалом и адгезионно связан с поверхностью жесткого цилиндра (рисунок 1). Модуль Юнга материала обода E , коэффициент Пуассона ν . Общий радиус составного цилиндра R , длина образующей L , толщина обода h . Рассматривается стационарное качение составного цилиндра по недеформируемой горизонтальной опорной поверхности в ведомом режиме. К оси цилиндра приложены вертикальная сила P , нормальная к опорной поверхности, и горизонтальная сила F , параллельная этой поверхности. В области контакта выбирается координатная ось x по направлению действия силы F с началом координат на линии действия силы P .

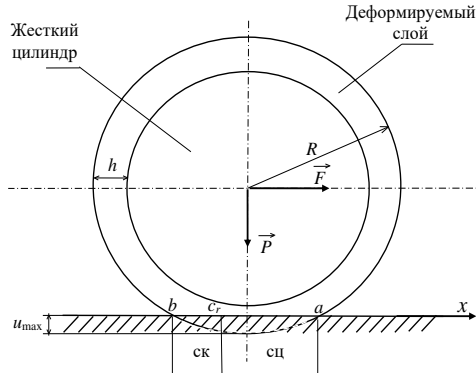


Рисунок 1 – Расчетная схема контактной задачи о стационарном качении жесткого цилиндра, имеющего деформируемый обод

Следует установить распределения контактного давления p и сдвигового контактного напряжения τ в области контакта при заданных силах P и F . Также требуется определить кинематические параметры подвижного контакта: вертикальное смещение (осадку) центра масс цилиндра u_{\max} , предварительное горизонтальное смещение w_0 центра масс цилиндра и коэффициент проскальзывания (крипа) s .

Предположим, что деформирование обода описывается обобщенной моделью Винклера [7]. В соответствии с ней контактное давление p в окрестности некоторой точки обода, находящейся в области контакта, определяется относительным вертикальным смещением u данной точки, а сдвиговое контактное напряжение τ – относительным горизонтальным смещением w :

$$p = k_n u, \quad \tau = k_\tau w. \quad (1)$$

Значения u и w задаются как разности между смещениями соответствующих (лежащих на одной вертикали и имеющих одну координату x) точек внешней и внутренней поверхностей обода. Коэффициенты жесткости k_n и k_τ определяются толщиной h и упругими характеристиками E , ν . Для жесткого соединения упругой полосы с недеформируемым основанием в работе [10] получено

$$k_n = \frac{E(1-\nu)}{h(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad k_\tau = \frac{E}{2h(1+\nu)}.$$

Под действием вертикальной силы P ось составного цилиндра вертикально смещается на некоторое расстояние u_{\max} к опорной поверхности. Принимаем, что зависимость смещения u точек обода в области контакта от координаты x описывается функцией

$$u = u_{\max} - \frac{x^2}{2R}. \quad (2)$$

Координаты a и b , определяющие границы области контакта (рисунок 1) определяются из условия равенства нулю контактного давления $p(b) = p(a) = 0$. Отсюда получаем

$$a = -b = \sqrt{2Ru_{\max}}. \quad (3)$$

Используем условие равновесия составного цилиндра в проекциях на ось, перпендикулярную опорной поверхности

$$P = L \int_b^a p dx. \quad (4)$$

Подставив в него выражение (1), с учетом (2) и (3) получаем уравнение для определения максимальной осадки, из которого находим

$$u_{\max} = \left(\frac{3P}{4k_n L \sqrt{2R}} \right)^{2/3}. \quad (5)$$

Отсюда полуширина области контакта

$$a = \left(\frac{3PR}{2k_n L} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

Действие горизонтальной силы F приводит к качению цилиндра. При этом в области контакта выделяются зоны сцепления «сц» и проскальзывания «ск» (рисунок 1). В зоне сцепления выполняется условие неизменности продольной осевой компоненты тензора деформаций [11], то есть производная от смещения w по координате x равна нулю, поэтому для данной зоны

$$w = -w_0 + sx.$$

Здесь подлежат определению константы (не зависящие от координаты x): предварительное смещение центра составного цилиндра w_0 ; s – коэффициент проскальзывания [11]. Отрицательность w обусловлена тем, что горизонтальные смещения точек обода, находящихся в сцеплении с недеформируемой опорной поверхностью, равны нулю. Горизонтальные смещения точек внутренней грани обода (жесткого цилиндра) положительны.

В зоне проскальзывания выполняется закон Кулона

$$\tau = -fp,$$

где f – коэффициент трения между внешней поверхностью деформируемого обода и опорной поверхностью.

Условие равенства нулю сдвигового напряжения τ на границе области контакта $x = a$ будет выполняться при

$$s = \frac{w_0}{a}, \quad (7)$$

причем координата a , равная полуширине области контакта, определяется выражением (6). Условие неразрывности сдвигового контактного напряжения на границе зон сцепления и проскальзывания будет выполняться при

$$w_0 = fu_{\max} \frac{k_n}{k_\tau} \left(1 + \frac{c}{a}\right). \quad (8)$$

Условие равновесия цилиндра в проекциях на ось x дает

$$F = L \int_b^a \tau dx = L \left[fk_n \int_{-a}^c \left(u_{\max} - \frac{x^2}{2R} \right) dx + k_\tau \int_c^a (w_0 - sx) dx \right]. \quad (9)$$

С учетом соотношений (5)–(8) последнее равенство приобретает вид

$$\left(\frac{c}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{c}{a}\right) + 7 - 8 \frac{F}{fP} = 0.$$

Получено кубическое уравнение для определения координаты c . Единственный его действительный корень может быть найден аналитически:

$$c = a - 2a \left(1 - \frac{F}{fP}\right)^{1/3}.$$

Теперь по формуле (8) можно найти предварительное смещение w_0 , а затем по (7) – коэффициент s . Имея константы u_{\max} , a , c , w_0 , s , можно описать распределение контактного давления и сдвигового контактного напряжения

$$p = k_n \left(u_{\max} - \frac{x^2}{2R} \right), \quad \tau = \begin{cases} -fk_n \left(u_{\max} - \frac{x^2}{2R} \right), & x < c; \\ -k_\tau (w_0 - sx), & x \geq c. \end{cases} \quad (10)$$

В соответствии с критерием Мизеса [12] прочность материала определяется максимальным значением интенсивности тензора напряжений σ_u :

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)}.$$

В рамках модели Винклера последнее выражение можно свести к виду

$$\sigma_u = \sqrt{p^2 \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right)^2 + 3\tau^2}.$$

Точное решение краевой задачи теории упругости для полосы произвольной толщины, жестко связанной с недеформируемым основанием, мо-

жет быть получено с использованием интегрального Фурье-преобразования [2]. Если на участке между точками с координатами b и a свободной от закрепления поверхности полосы действуют нормальное давление p и сдвиговое напряжение τ , то таким решением нормальное u и сдвиговое w смещения точек поверхности будут определяться соотношениями

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\chi+1}{4G\pi} \int_b^a p(y) K_u^p \left(\frac{x-y}{h} \right) dy + \frac{1}{4G\pi} \int_b^a \tau(y) K_u^\tau \left(\frac{x-y}{h} \right) dy; \\ w(x) &= \frac{-1}{4G\pi} \int_b^a p(y) K_w^p \left(\frac{x-y}{h} \right) dy + \frac{\chi+1}{4G\pi} \int_b^a \tau(y) K_w^\tau \left(\frac{x-y}{h} \right) dy, \end{aligned} \quad (11)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\chi = 3 - 4\nu$.

Функции влияния задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} K_u^p(z) &= \int_0^\infty \frac{4\beta - 2\chi \operatorname{sh}(2\beta)}{(\chi+1)^2 + 4\beta^2 + 4\chi \operatorname{sh}^2\beta} \frac{\cos(z\beta)}{\beta} d\beta, \\ K_u^\tau(z) &= K_w^p(z) = \int_0^\infty \frac{2\chi(\chi-1)(\operatorname{ch}(2\beta)-1) - 8\beta^2}{(\chi+1)^2 + 4\beta^2 + 4\chi \operatorname{sh}^2\beta} \frac{\sin(z\beta)}{\beta} d\beta, \\ K_w^\tau(z) &= \int_0^\infty \frac{4\beta + 2\chi \operatorname{sh}(2\beta)}{(\chi+1)^2 + 4\beta^2 + 4\chi \operatorname{sh}^2\beta} \frac{\cos(z\beta)}{\beta} d\beta. \end{aligned} \quad (12)$$

При использовании соотношений (11) для решения поставленной контактной задачи (рисунок 1) они рассматриваются как интегральные уравнения для определения контактного давления и сдвигового контактного напряжения. Для нахождения констант u_{\max} , a , c , b , w_0 , s к этим уравнениям добавляются условия равновесия цилиндра (4) и (9), условия на границах области контакта $p(b) = p(a) = \tau(a) = 0$ и выполнение на границе раздела зон сцепления и проскальзывания закона трения Кулона. Методика решения контактных задач на основе интегральных уравнений (11) подробно описана в монографиях [2, 3, 10]. В общем случае подобное решение может быть реализовано только численно. В нашем случае для этого использован программный комплекс MathCAD.

Интегрирование в (12) проводилось пошагово с оценкой сходимости. Решение интегральных уравнений (11) осуществлено методом конечных сумм [13]. После установления распределения контактного давления и сдвигового контактного напряжения интегрированием определялись Фурье-образы этих напряжений. Далее использовались приведенные в монографии [10] соотношения для компонент тензора напряжений в полосе произвольной толщины при заданных на свободной от закрепления границе нормальной и сдвиговой распределенных нагрузках. Затем устанавливалось распределение в ободе интенсивности тензора напряжений и определялось ее максимальное значение.

Расчетный пример. Для вычислений были использованы исходные данные, соответствующие ролику скипа, перемещающегося по проводникам скипо-клетового ствола №2 1РУ ОАО «Беларуськалий» [1]. Радиус ролика без полиуретановой обкладки (радиус жесткого цилиндра) $r = R - h = 85$ мм. Ширина ролика $L = 80$ мм. Сила прижатия в рабочем режиме $P = 3350$ Н. Сдвиговая сила принята равной $F = 450$ Н. Значения характеристик материала обода (полиуретан с твердостью по Шору 85) заимствованы из работы [14] $E = 21$ МПа; $\nu = 0,38$; коэффициент трения по стали $f = 0,4$; предел прочности на сжатие 4,8 МПа.

На рисунке 2 представлены расчетные эпюры контактного давления и сдвигового контактного напряжения. Отметим приемлемую степень соответствия расчетных оценок, полученных на основе разработанной методики, результатам использования точного решения. Применение модели Винклера приводит к завышенным значениям ширины области контакта и, соответственно, к снижению максимальных контактных напряжений.

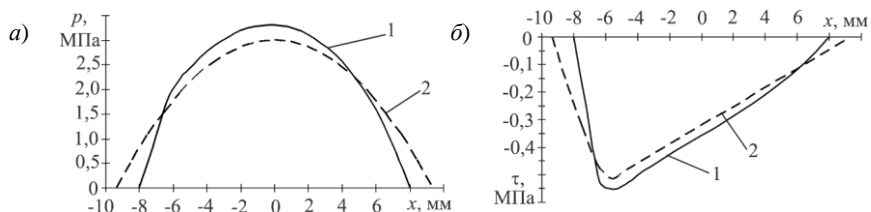


Рисунок 2 – Расчетные эпюры контактного давления (а) и сдвигового контактного напряжения (б) при толщине деформируемого обода $h = 10$ мм:

1 – численное решение системы интегральных уравнений (12);

2 – использование функций (10)

Погрешность расчета по разработанной методике возрастает с увеличением толщины деформируемого обода (рисунок 3), и при $h = 30$ мм относительная погрешность расчета интенсивности тензора напряжений составляет 12,5%. При использовании модели Винклера значение σ_{ii} зависит только от координаты x . В случае точного решения [10] σ_{ii} зависит также от координаты, отсчитываемой по толщине обода, причем максимум достигается на некотором расстоянии от поверхности контакта.

Использование предлагаемых аналитических соотношений позволяет проводить многопараметрический анализ рассматриваемой контактной пары. В частности, при выборе материала деформируемого обода следует учитывать, что при прочих равных условиях в случае меньшего коэффициента Пуассона будут реализовываться большие значения интенсивности тензора напряжений (рисунок 4). В рассматриваемом примере снижение ν от 0,4 до 0 сопровождается двукратным увеличением $\sigma_{ii \max}$. Увеличение значения коэффициента трения обода с опорной поверхностью приводит к незначительному снижению $\sigma_{ii \max}$.

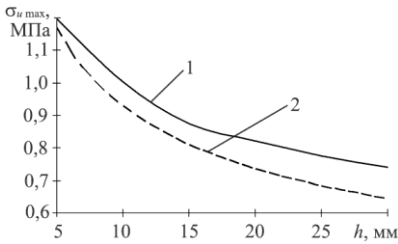


Рисунок 3 – Зависимость максимального значения интенсивности тензора напряжений в ободе от толщины деформируемого обода:

1 – решение системы интегральных уравнений (12), 2 – использование функций (10)

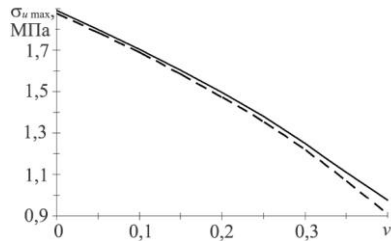


Рисунок 4 – Зависимость максимального значения интенсивности тензора напряжений в ободе от коэффициента Пуассона материала обода:

сплошная кривая – при $f=0,2$, пунктирная – при $f=0,5$

Наряду с параметром $\sigma_{и max}$, определяющим прочность элемента конструкции, для рассматриваемой контактной пары представляет практический интерес прогноз коэффициента проскальзывания, определяющего потери энергии при качении. Установлено (рисунок 5), что в диапазоне значений сдвиговой силы от 50 до 500 Н коэффициент s практически линейно возрастает с увеличением силы F . К росту значения коэффициента проскальзывания также приводит увеличение толщины деформируемого обода.

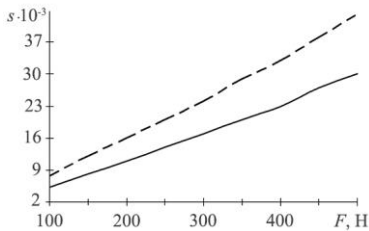


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента проскальзывания от горизонтальной силы F :

сплошная кривая – $h = 10$ мм,
пунктир – при $h = 30$ мм

К росту значения коэффициента проскальзывания также приводит увеличение толщины деформируемого обода.

Закключение. В представленной работе на основе методики, основанной на модели Винклера, получены аналитические выражения для контактного давления и сдвигового контактного напряжения при качении колеса с деформируемым ободом. Показано, что погрешность результатов

применения данной методики увеличивается с ростом толщины обода и в рассмотренном примере не превышает 12,5 % по сравнению с точным решением для полосы произвольной толщины. Установлено влияние коэффициента трения на максимальные значения сдвигового напряжения и интенсивности тензора напряжений. Продемонстрировано, что в материале обода с меньшим значением коэффициента Пуассона интенсивность тензора напряжений будет выше, а коэффициент проскальзывания возрастает как с увеличением сдвиговой силы, так и при увеличении толщины обода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Скип шахтный: пат. 11460 Респ. Беларусь, МПК В66В 17/32 / В. Я. Прушак, В. Я. Щерба, Д. А. Морев ; заявитель Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством – № u 20170053 ; заявл. 22.02.2017.

- 2 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 320 с.
- 3 **Александров, В. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, 1983. – 183 с.
- 4 **Горячева, И. Г.** Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения / И. Г. Горячева, М. М. Губенко, Ю. Ю. Маховская // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 99–107.
- 5 Computational modelling based wear resistance analysis of thick composite coatings / K. Holmberg [et al.] // Tribology International. – 2014. – Vol. 72. – P. 13–30.
- 6 **Christoforou, A. P.** On the contact of a spherical indenter and a thin composite laminate / A. P. Christoforou // Composite Structures. – 1993. – Vol. 26. – P. 77–82.
- 7 **Кравчук, А. С.** Прикладные контактные задачи для обобщенной стерневой модели покрытия / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. – СПб. : Научное издание, 2019. – 324 с.
- 8 **Коднянко, Е. В.** Расчет контактного сдвигового напряжения для колеса с деформируемой периферией / Е. В. Коднянко, Д. А. Черноус // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 83–89.
- 9 **Коднянко, Е. В.** Контактная задача с трением в рамках модели Винклера основания для опоры качения / Е. В. Коднянко, Д. А. Черноус // Поликомтриб-2022 : Тезисы докладов междунар. науч.-техн. конф. – Гомель : ИММС НАН Беларуси, 2022. – С. 63.
- 10 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 245 с.
- 11 **Попов, В. Л.** Механика контактного взаимодействия и физика трения / В. Л. Попов. – М. : Физматлит, 2012. – 348 с.
- 12 **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.
- 13 **Бахвалов, Н. С.** Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987.
- 14 **Яковлев, С. Н.** Расчет полиуретановых деталей, работающих на сжатие при статической нагрузке / С. Н. Яковлев // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Машиностроение. – 2014. – № 1 (190). – С. 137–142.

E. V. KADNIANKA^{1,2}, D. A. CHERNOUS²

¹JSC “Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production”, Soligorsk, Belarus
²Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

THE WINKLER MODEL APPLICATION TO THE ROLLING ANALYSIS FOR A WHEEL WITH A THIN ELASTIC RIM

A technique for solving the stationary rolling contact problem for a rigid cylinder with a thin deformable rim in the driven mode is developed, it is based on the use of the generalized Winkler model. The analytical expressions for contact pressure and shear contact stress are obtained. The results of using the proposed method are compared with the calculated estimates obtained on the basis of the exact elasticity theory problem solution for the strip.

Keywords: Winkler model, contact pressure, contact shear stress, rolling resistance moment, sticking area, slip area.

Получено 06.11.2022