УДК 539.3

А. И. ВЕРЕМЕЙЧИК
Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА О ДЕЙСТВИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Рассмотрено решение несвязанных задач однородной и неоднородной термоупругости для полупространства, на граничной поверхности которого движется прямолинейно локальный источник тепла с постоянной скоростью.

Ключевые слова: напряжения, полупространство, задача термоупругости, температура, источник тепла, термоупругий потенциал, неоднородность.

Введение. Современный уровень развития науки и техники выдвигает перед инженером требования по созданию эффективных методов расчета оптимальных режимов термообработки деталей и инструмента, позволяющих улучшить характеристики поверхности без изменения свойств сердцевины. Плазменное упрочнение по технико-экономическим показателям является более перспективным способом по сравнению с лазерным и электронно-лучевыми технологиями упрочнения [1]. При поверхностной плазменной закалке используется действие движущихся концентрированных источников энергии, создающих направленную высокотемпературную газовую струю, тепловой поток которой и является главным действующим фактором процесса. В связи с наличием движения струи вдоль обрабатываемой поверхности достигаемая температура разогрева материала и скорость охлаждения его после прохода струи оказываются жестко связанными. Согласно [2] процессы нагрева и охлаждения зависят от интенсивности теплового потока, коэффициентов теплопроводности материала и скорости движения источника тепла. Для учета влияния этих параметров на напряженно-деформированное состояние (НДС) необходимо решение соответствующих задач термоупругости для тел, подверженных тепловому нагружению движущимся источником нагрева [3, 4].

Постановка и решение однородной задачи термоупругости. Решение задачи классической однородной и изотропной линейной термоупругости рассмотрим на примере нагружения полупространства температурным полем, возникающим при действии движущегося по прямой линии с постоянной скоростью на поверхности источника тепла. Такой модели может удовлетворять, например, процесс поверхностного плазменного упрочнения деталей и инструмента, в основе которого лежит способность плазменной струи (дуги) создавать на небольшом участке поверхности высокие плотности теплового потока, достаточные для нагрева, плавления или испарения металла.

Рассмотрим однородное линейно-упругое полупространство $x_3 \geq 0$, на граничной поверхности $x_3 = 0$ которого по оси Ox_2 движется с постоянной скоростью v источник тепла мощности Q.

Возможная передача тепла от полупространства к окружающей среде на граничной поверхности за рассматриваемые короткие промежутки времени не учитывается, поэтому в любой момент времени τ граничное условие на плоскости $x_3 = 0$ не будет зависеть от τ и запишется в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)_{+0} = 0, \quad (\sigma_{i3})_{+0} = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{1}$$

Нагрузка полупространства представляется температурным полем T, которое получается путем решения дифференциального уравнения теплопроводности [5], удовлетворяющего первому условию (1). Постановка и решение задачи теплопроводности для полупространства, на которое действует источник тепла, движущийся с постоянной скоростью v, рассмотрено в [6], где для подвижной системы координат, перемещающейся вместе с рассматриваемым источником, получено следующее решение:

$$T(x_1, x_2, x_3) = \frac{Q}{4\pi\lambda_T R}\exp\left(-\frac{v(x_2+R)}{2a}\right), \quad R^2 = x_k x_k, \quad k = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где λ_T – коэффициент теплопроводности; R – расстояние до точки, в которой определяется температура T; $a = \lambda_T / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность материала.

Определим напряжения σ_{ij}, возникающие в полупространстве при воздействии температуры (2) и удовлетворяющие граничным условиям (1) на его поверхности. Поскольку среда, заполняющая полупространство, является однородной и изотропной, т. е. ее параметры не зависят от температуры, уравнения равновесия в перемещениях без учета инерционных членов имеют вид

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$; ν – коэффициент Пуассона; α – коэффициент температурного расширения.

В правую часть уравнения (3) входят элементы градиента известной функции T, т. е. решения (2). Для получения общего решения системы уравнений (3) сначала найдем частное решение, которое в форме, предложенной Гудьером [7], представляется в виде градиента некоторой функции термоупругого потенциала Φ:

$$\bar{u}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), найдем, что термоупругий потенциал Φ должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\nabla^2\Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T \ . \qquad (5)$$

Для движущейся системы координат, согласно [6], температура T должна соответствовать уравнению

$$\nabla^2 T + \frac{v}{a}\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \ . \qquad (6)$$

Дифференцируем уравнение (5) по координате x_2 и подставляем $\dfrac{\partial T}{\partial x_2}$ в (6):

$$\nabla^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right) = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha a}{v}\nabla^2 T \ . \qquad (7)$$

Уравнение (7) будет удовлетворено, если принять:

$$\Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha a}{v}\int T dx_2 + \Phi_0 \ .$$

Здесь T представлено в виде (2), а Φ_0 – произвольная гармоническая функция, которая выбирается таким образом, чтобы термоупругий потенциал Φ был представлен в форме

$$\Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha Q a}{4\pi v \lambda_T}\int \frac{1}{R}\exp\left(-\frac{v\left(x_2+R\right)}{2a}\right)dx_2 + \Phi_0 =$$

$$= -\frac{1+\nu}{1-\nu}Q\frac{\alpha a}{4\pi v \lambda_T}Ei\left[-\frac{v}{2a}\left(x_2+R\right)\right]. \qquad (8)$$

Выражение (8) содержит специальную функцию – интегральную показательную функцию Ei, которая имеет вид

$$Ei\left(z\right) = \int_{-\infty}^{z}\frac{e^t}{t}dt = -\int_{-z}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt, \quad Ei\left(z\right) = -Ei\left(-z\right), \quad z \neq 0.$$

Термоупругие напряжения σ_{ij}^T, которые соответствуют частному решению (4) в перемещениях, вычисляются путем дифференцирования потенциала Φ и подстановки в физические уравнения. В результате получаем

$$\sigma_{ij}^T = 2\mu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\nabla^2\Phi\right),$$

где $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, E – модуль упругости; δ_{ij} – символ Кронекера.

Окончательно для σ_{ij}^T с учетом обозначения $K = \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{\alpha\mu a}{2\pi v \lambda_T}Q$ имеем

$$\sigma_{11}^T=-\frac{K}{R^2}\left[\frac{R}{x_2+R}-x_1^2\frac{x_2+2R}{R\left(x_2+R\right)^2}+\frac{v}{2a}\left(2R-\frac{x_1^2}{x_2+R}\right)\right]\exp\left(-\frac{v\left(x_2+R\right)}{2a}\right);$$

$$\sigma_{22}^T=-\frac{K}{R^2}\left[\frac{x_2}{R}+\frac{v}{2a}\left(x_2-R\right)\right]\exp\left(-\frac{v\left(x_2+R\right)}{2a}\right);$$

$$\sigma_{33}^T=-\frac{K}{R^2}\left[\frac{R}{x_2+R}-x_3^2\frac{x_2+2R}{R\left(x_2+R\right)^2}+\frac{v}{2a}\left(2R-\frac{x_3^2}{x_2+R}\right)\right]\exp\left(-\frac{v\left(x_2+R\right)}{2a}\right);$$

$$\sigma_{12}^T=-\frac{K}{R^3}x_1\left(1+\frac{v}{2a}\right)\exp\left(-\frac{v\left(x_2+R\right)}{2a}\right); \tag{9}$$

$$\sigma_{23}^T=-\frac{K}{R^3}x_3\left(1+\frac{v}{2a}\right)\exp\left(-\frac{v\left(x_2+R\right)}{2a}\right);$$

$$\sigma_{13}^T=-\frac{K}{R^3}\frac{x_1x_3}{x_2+R}\left(1+\frac{R}{x_2+R}+\frac{v}{2a}R\right)\exp\left(-\frac{v\left(x_2+R\right)}{2a}\right).$$

Согласно условиям (1) граничная поверхность $x_3 = 0$ свободна от напряжений:

$$\sigma_{33}\left(x_1,x_2,0\right)=0;\quad \sigma_{23}\left(x_1,x_2,0\right)=0;\quad \sigma_{13}\left(x_1,x_2,0\right)=0. \tag{10}$$

Полученное частное решение (9) соответствует второму и третьему условиям (10), но не удовлетворяет первому:

$$\sigma_{33}^T\left(x_1,x_2,0\right)=-\frac{K}{r}\left[\frac{1}{x_2+r}+\frac{v}{2a}\right]\exp\left(-\frac{v\left(x_2+r\right)}{2a}\right),\ r^2=x_1^2+x_2^2. \tag{11}$$

Поэтому для полного решения краевой задачи необходимо к частному решению (9) добавить решение задачи теории упругости для полупространства, нагруженного на границе нормальным давлением p_3, уничтожающим напряжение (11), а именно

$$p_3=\sigma_{33}^T\left(x_1,x_2,0\right).$$

Обозначим решение упругой задачи через σ_{ij}^*, тогда полное решение термоупругой задачи $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^T+\sigma_{ij}^*$. Задача теории упругости для полупространства с заданным нормальным давлением решается в квадратурах как суперпозиция решений Буссинеска для действия сосредоточенной нормальной силы в некоторой произвольной точке граничной поверхности с координатами (ξ_1, ξ_2, 0). Вместо сосредоточенной силы P в решение Буссинеска необходимо подставить значение бесконечно малой элементарной нагрузки $p_3 d\xi_1 d\xi_2$, приходящейся на площадь $d\xi_1 d\xi_2$ окрестности точки (ξ_1, ξ_2, 0).

Выполняя интегрирование, получим решение σ_{ij}^* в квадратурах:

$$\sigma_{11}^* = \frac{3K}{2\pi}\oint_S \frac{Q'}{R^3}\left[\frac{x_3(x_1-\xi_1)^2}{R^2} - \frac{1-2\nu}{3}\left(\frac{R^2+Rx_3-x_3^2}{R-x_3} - \frac{(x_1-\xi_1)^2(2R-x_3)}{(R-x_3)^2}\right)\right]d\xi_1 d\xi_2;$$

$$\sigma_{22}^* = \frac{3K}{2\pi}\oint_S \frac{Q'}{R^3}\left[\frac{x_3(x_2-\xi_2)^2}{R^2} - \frac{1-2\nu}{3}\left(\frac{R^2+Rx_3-x_3^2}{R-x_3} - \frac{(x_2-\xi_2)^2(2R-x_3)}{(R-x_3)^2}\right)\right]d\xi_1 d\xi_2;$$

$$\sigma_{33}^* = \frac{3K}{2\pi}x_3^3\oint_S \frac{Q'}{R^5}d\xi_1 d\xi_2; \qquad (12)$$

$$\sigma_{12}^* = \frac{3K}{2\pi}\oint_S \frac{Q'(x_2-\xi_2)(x_1-\xi_1)}{R^3}\left[\frac{x_3}{R^2} - \frac{1-2\nu}{3}\frac{(2R-x_3)}{(R-x_3)^2}\right]d\xi_1 d\xi_2;$$

$$\sigma_{13}^* = \frac{3K}{2\pi}x_3^2\oint_S \frac{Q'(x_1-\xi_1)}{R^5}d\xi_1 d\xi_2; \quad \sigma_{23}^* = \frac{3K}{2\pi}x_3^2\oint_S \frac{Q'(x_2-\xi_2)}{R^5}d\xi_1 d\xi_2,$$

где $Q' = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{x_2-\xi_2+r} + \frac{v}{a}\right)\exp\left(-\frac{v(x_2-\xi_2+r)}{2a}\right)$, $r^2 = (x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2$, $R^2 = r^2 + x_3^2$.

Значения напряжений σ_{ij}^* на поверхности $x_3 = 0$ определяются по формулам (12) путем предельного перехода при $x_3 \to 0$. Однако получить выражения предельных напряжений таким путем затруднительно, т. к. их значения не могут быть представлены в замкнутой форме. Вместо решения упругой задачи (12) можно использовать численное решение упругой пространственной задачи. В этом случае можно заменить безгранично протяженное полупространство на внутреннюю область конечных размеров. Например, можно вырезать из рассматриваемого полупространства куб или параллелепипед, на гранях которого будут заданы механические напряжения, которые определяются по формулам (9). После отыскания напряжений σ_{ij}^* численным методом внутри и на поверхности куба (параллелепипеда) их нужно сложить с напряжениями частного решения (9). В результате будет получено решение поставленной задачи термоупругости для однородной упругой изотропной среды.

На основе решения задачи однородной термоупругости рассматривается задача термоупругости для континуально неоднородной среды, т. е. с учетом влияния на решение изменения теплофизических параметров материала.

Решение задачи неоднородной термоупругости при высоких температурах. Согласно методу возмущений Ломакина [3] полное решение задачи термоупругости для неоднородной изотропной среды можно получить на основании решения задачи для однородной изотропной линейно-упругой среды. Рассмотрим, как влияет температура, создаваемая движущимся источником, на напряжения, возникающие при нагреве. При этом необходимо учесть, что параметры упругости $\lambda(T)$, $\mu(T)$ зависят от температуры, которая в свою очередь зависит от координат x_i. Поскольку процесс нагрева полупространства рассматривается в системе координат, которая движется вместе с источником, все заданные и искомые функции от времени не зависят. Теплофизический параметр $\gamma(T)$ также считаем зависящим от температуры. Дифференциальные уравнения термоупругости такой непрерывно неоднородной среды имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda\theta)+\frac{\partial}{\partial x_j}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma T)=0, \quad i,\ j=1,2,3. \tag{13}$$

Выполняя дифференцирование (13), получим

$$\mu\nabla^2 u_i+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=\gamma\frac{\partial T}{\partial x_i}+\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}T-\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\theta-\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{14}$$

где
$$\theta=\frac{\partial u_k}{\partial x_k},\ \gamma=(2\mu+3\lambda)\alpha=\frac{E}{1-2\nu}\alpha .$$

Рассмотрим квазистатическую задачу термоупругости для полупространства $x_3\geq 0$, граничная поверхность которого совпадает с плоскостью координат Ox_1x_2. По оси Ox_2 с постоянной скоростью v движется источник тепла мощностью Q. Считаем, что усилия на границе полупространства равны нулю. Определим напряжения σ_{ij}, возникающие в полупространстве от нагрева таким источником. Температуру в дифференциальных уравнениях (14) считаем известной функцией, т. е. решением краевой задачи теплопроводности. Если принимать коэффициент температуропроводности a постоянным, а также не учитывать отдачу тепла окружающей среде на граничной поверхности, то в подвижных координатах температурное поле соответствует (2).

Решаем систему уравнений (14) для определения неизвестных перемещений u_i, по которым будут определены напряжения σ_{ij}, причем на граничной поверхности $x_3 = 0$ усилия должны быть равны нулю:

$$\sigma_{33}(x_1,x_2,0)=0,\ \ \sigma_{13}(x_1,x_2,0)=0,\ \ \sigma_{23}(x_1,x_2,0)=0.$$

Функции $\lambda(T)$, $\mu(T)$, $\gamma(T)$, где T представлено выражением (2), считаем заданными. Выразим их через $E(T)$:

$$\lambda=\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E(T),\quad \mu=\frac{1}{2(1+\nu)}E(T),\quad \gamma=\frac{\alpha}{1-2\nu}E(T). \tag{15}$$

Коэффициент Пуассона ν и коэффициент линейного расширения α принимаем не зависящим от температуры T, причем $\nu \neq 0{,}5$.

Подставим значения (15) в дифференциальное уравнение (14), разделив предварительно все члены на μ. Получаем дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{2\alpha(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{T}{E}\frac{\partial E}{\partial x_i} -$$

$$-\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\theta}{E}\frac{\partial E}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial x_j}. \qquad (16)$$

Это уравнение отличается от аналогичного уравнения для однородной среды (3) дополнительным слагаемым в правой части, которое можно рассматривать как фиктивные массовые силы K_i^{Φ} и представить в виде

$$K_i^{\Phi} = \mu\left[\frac{\alpha}{1-2\nu}T\frac{\partial E}{\partial x_i} - \frac{\nu\theta}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial E}{\partial x_i} - \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial E}{\partial x_j}\right]. \qquad (17)$$

По известной температуре здесь можно вычислить лишь первое слагаемое в правой части, поскольку все остальные зависят от неизвестных деформаций. Используя метод возмущений В. А. Ломакина [3], введем в правой части уравнения (17) малый параметр и будем выполнять дальнейшее решение последовательными приближениями. В этом случае на каждом этапе итераций введение массовых сил K_i^{Φ} облегчает вычисления при использовании решения Миндлина [8] для случая сосредоточенной силы, действующей в произвольной внутренней точке полупространства. Будем вычислять производную от модуля упругости как от сложной функции:

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = \frac{\partial E}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Зависимость модуля упругости E от температуры в определенных интервалах представим линейной функцией $E = AT + B$. Тогда $\frac{\partial E}{\partial T} = A = \text{const}$, а сомножитель $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ вычисляется непосредственным дифференцированием:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{Q}{4\pi\lambda_T R}\exp\left(-\frac{v}{2a}(x_2 + R)\right)\left[\frac{\beta_i}{R} + \frac{v}{2a}(1-\beta_i)\right], \beta_i = \frac{x_i}{R}, i = 1, 2, 3,$$

$$\psi_i = \frac{\partial E}{\partial x_i} = \frac{QA}{4\pi\lambda_T R}\exp\left(-\frac{v}{2a}(x_2 + R)\right)\left[\frac{\beta_i}{R} + \frac{v}{2a}(1-\beta_i)\right].$$

Элементы вектора ψ_i вычисляются лишь в той области полупространства, в которой модуль E является переменным, т. е. где $A \neq 0$. Это имеет место в наиболее нагретой зоне, близкой к источнику. На каждом этапе расчета нужно выявлять границу этой зоны, в которой будут действовать фиктивные массовые силы K_i^{Φ}. Отметим, что множитель $1/E$ представляет собой малый параметр $\varepsilon = \dfrac{1}{E(T)}$. Тогда уравнение (16) примет вид

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i} = \varepsilon R_i(x_1, x_2, x_3), \tag{18}$$

где $R_i(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{2\alpha(1+\nu)T - 2\nu\theta}{1-2\nu}\psi_i - \psi_j\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$; $\psi_i = \dfrac{\partial E}{\partial x_i}$; $\psi_j = \dfrac{\partial E}{\partial x_j}$.

В соответствии с методом возмущений В. А. Ломакина решение уравнения (18) краевой задачи термоупругости неоднородной среды ищется в виде степенного ряда по степеням параметра ε, причем коэффициенты ряда являются векторными функциями, представляющими последовательные приближения к искомому решению задачи:

$$u_i = u_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u_i^{(k)}. \tag{19}$$

Поскольку параметр ε мал, можно в разложении (19) воспользоваться лишь первыми двумя членами:

$$u_i = u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)}. \tag{20}$$

Подставим (20) в (18) и приравняем между собой выражения при одинаковых степенях параметра ε. В результате получим дифференциальное уравнение для начального приближения $u_i^{(0)}$:

$$\nabla^2 u_i^{(0)} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial x_i} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Для первого приближения дифференциальное уравнение имеет вид

$$\nabla^2 u_i^{(1)} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x_i} = \varepsilon R_i^{(1)}, \tag{21}$$

где правая часть выражена через известные перемещения $u_i^{(0)}$:

$$R_i^{(1)} = \frac{2\alpha(1+\nu)T - 2\nu\theta^{(0)}}{1-2\nu}\psi_i - \psi_j\left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i}\right).$$

Массовая нагрузка εR_i распределена в ограниченной области, вблизи движущегося источника, и она определяется численно. Тогда решение поставленной краевой задачи для уравнения (21) можно представить в виде суммы двух решений $\sigma_{ij}^{(1)} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^{*}$, где σ_{ij}^{*} – общее решение уравнения (21) с правой частью. На границе области напряжения будут принимать некоторые ненулевые значения:

$$\bar{\sigma}_{33}(x_1, x_2, 0) = f_3, \quad \bar{\sigma}_{13}(x_1, x_2, 0) = f_1, \quad \bar{\sigma}_{23}(x_1, x_2, 0) = f_2.$$

$$u_{ij}^{\text{ед}} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r}\left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \beta_i\beta_j\right].$$

В результате суперпозиции таких решений получим

$$\bar{u}_i = \int_D u_{ij}^{\text{ед}} \varepsilon R_j dx, \tag{22}$$

где D – область, в которой $A \neq 0$; dx – элемент объема.

Напряжения $\bar{\sigma}_{ij}$ и усилия $\bar{p}_i$ на любой площадке получаются путем дифференцирования (22) под знаком интеграла и дальнейшей подстановки в формулу закона Гука в соответствии с [9].

При рассмотрении задачи для полупространства при заданных краевых условиях (равенство нулю усилий на границе) известен тензор Грина, который обычно называют решением Миндлина $G_{ij}(x, y)$ [10], представляющий собой перемещение точки x по оси x_i, вызванное единичной силой, приложенной в произвольной точке y полупространства по направлению оси x_j. При этом усилия на поверхности полупространства, которые соответствуют перемещениям $G_{ij}(x, y)$, равны нулю. Применяя суперпозицию решений Миндлина, получим сразу первое приближение $u_i^{(1)}$ – решение уравнения (21):

$$u_i^{(1)}(x) = \int_D G_{ij}(x, y)\,\varepsilon(y) R_j(y) dy.$$

Представленная схема решения может использоваться для численной реализации задач термоупругости методом граничных интегральных уравнений [7] и пригодна для областей произвольной формы, ограниченных гладкой поверхностью.

Заключение. Проведено решение задачи однородной термоупругости о нагружении полупространства движущимся по прямой линии с постоянной скоростью источником тепла. На основе решения задачи однородной термоупругости проведено исследование НДС при нагреве полупространства движущимся тепловым источником с учетом зависимости теплофизических параметров среды от температуры.

Результаты решения задач термоупругости могут использоваться для оценки НДС тел при действии движущегося локального источника тепла (например, плазменной дуги) с целью определения оптимальных режимов термозакалки, выявления зон трещинообразования, а также при разработке новых конструкций плазмотронов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Гречнева, М. В.** Краткий анализ результатов работ в области плазменного поверхностного упрочнения сталей и сплавов / М. В. Гречнева // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2017. – Т. 21, № 5. – С. 10–23.

2 **Youssef, H. M.** The boundary value problem of a three-dimensional generalized thermoelastic half-space subjected to moving rectangular heat source / H. M. Youssef, E. A. N. Al-Lehaibi // Boundary Value Problems. – 2019. – Vol. 2019. – Article 8. – 15 p.

3 **Ломакин, В. А.** Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М. : Ленанд, 2014. – 367 с.

4 Recent advances in generalized thermoelasticity theory and the modified models: a review / F. Shakeriaski [et al.] // Journal of Computational Design and Engineering. – 2021. – Vol. 8, is. 1. – P. 15–35.

5 **Карлслоу, Г.** Теплопроводность твердых тел / Г. Карлслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.

6 **Веремейчик, А. И.** Механико-математическое моделирование процесса плазменно-механической обработки / А. И. Веремейчик, М. И. Сазонов, В. М. Хвисевич // Актуальные проблемы прочности. – Минск : УП «ИВЦ Минфина», 2022. – Гл. 27. – С. 340–357.

7 **Хвисевич, В. М.** Метод потенциала в нестационарных термоупругих задачах механики деформируемого твердого тела / В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик // Теоретическая и прикладная механика. – 2012. – Вып. 27. – С. 351–357.

8 **Lurie, A. I.** Theory of elasticity / A. I. Lurie ; transl. by A. Belyaev. – Berlin : Springer-Verlag, 2005. – 1050 p.

9 **Купрадзе, В. Д.** Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В. Д. Купрадзе. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1976. – 664 с.

10 **Mindlin, R. D.** Force at a point in the interior of a semi-infinite solid / R. D. Mindlin // Physics. – 1936. – Vol. 7, is. 5. – P. 195–202.

A. I. VERAMEICHYK
Brest State Technical University, Brest, Belarus

SOLUTION OF THE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A HALF-SPACE OF THE MOVING HEAT SOURCE ACTION

There is considered the the solution of unrelated problems of the homogeneous and inhomogeneous thermoelasticity for a half-space when a local heat source moves rectilinearly on the boundary surface with a constant velocity.

Keywords: stresses, half-space, thermoelasticity problem, temperature, heat source, thermoelastic potential, inhomogeneity.

Получено 05.10.2022