

УДК 539.3

С. В. БОСАКОВ, Ю. Н. КОТОВ

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ ДЛЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ, НЕКОТОРЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОТОРОЙ ОГРАНИЧЕНЫ

Рассматривается задача расчета круглой пластинки на упругом основании способом Б. Н. Жемочкина при условии, что часть точек пластинки при её изгибе лежат в одной наклонной плоскости. Практическим аналогом этой задачи является пространственная деформация базы внецентренно сжатой металлической колонны кольцевого поперечного сечения, лежащей на бетонном основании. Приведен пример расчёта, а также графики контактных напряжений и перемещений, график распределения сил давления колонны на опорную плиту.

**Ключевые слова:** круглая пластинка, база металлической колонны, упругое основание, контактные напряжения, способ Жемочкина.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим круглую пластинку на упругом основании под действием внешней нагрузки, вызывающей такие перемещения некоторых точек пластинки, при которых они остаются лежать в одной наклонной плоскости (рисунок 1). Примем, что на контакте между пластинкой и упругим основанием возникают только нормальные напряжения, для пластинки справедливы гипотезы технической теории изгиба [1]. Требуется определить контактные напряжения между пластинкой и упругим основанием, вертикальные перемещения и усилия в ней.

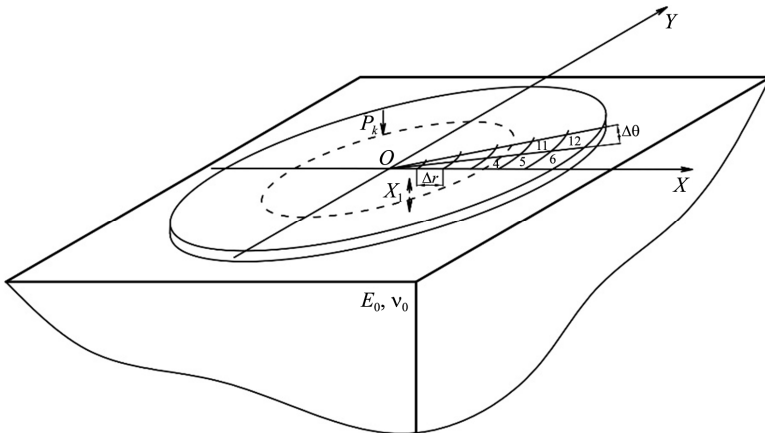


Рисунок 1 – Круглая пластинка на упругом основании

Решение поставленной задачи будем осуществлять способом Жемочкина [2, 3], который хорошо себя показал при решении подобных задач [4]. В статье [5] представлен обзор русскоязычных работ по применению метода Жемочкина для решения контактных задач, причем результаты расчетов данным методом хорошо согласуются с моделированием методом конечных элементов [6]. В работе [7] задача о поступательном перемещении штампа на плоском клине решена методом ортогональных многочленов. В статье [8] представлено решение для неосесимметричной круглой пластинки без действия на неё внешних сил. Расчет плит в виде сектора круга с произвольным углом или части кольца методом Жемочкина приведен в [9]. В статье [10] представлена методика расчета балочной плиты на упругом основании для случая расположения ряда точек плиты на одной прямой. В данной работе эта методика развивается на расчет круглой пластинки.

Разобьем пластинку на участки с размерами  $\Delta r$  и  $\Delta\theta$ . В центре каждого из них разместим вертикальную связь, через которую осуществляется контакт пластинки с упругим основанием. Считаем, что сила в связи вызывает равномерное распределение контактных напряжений в пределах каждого участка. Внешние силы  $P_k$  неизвестны и вызывают вертикальные перемещения некоторых точек пластинки, которые лежат в одной наклонной плоскости. Решение задачи выполним, используя смешанный метод строительной механики [11]. Для этого мысленно разрежем все связи и в начале координат введем защемление.

Система уравнений для случая, при котором величина равнодействующей внешних сил равна  $R$ , имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m \delta_{i,k} X_k + u + \varphi_x r_i \sin \theta_i + \varphi_y r_i \cos \theta_i + \sum_{k=1}^n y_{i,k} P_k = 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ -\sum_{k=1}^m X_k + \sum_{k=1}^n P_k = 0; \\ -\sum_{k=1}^m r_k \sin \theta_k X_k + \sum_{k=1}^n r_{pk} \sin \theta_{pk} P_k = 0; \\ -\sum_{k=1}^m r_k \cos \theta_k X_k + \sum_{k=1}^n r_{pk} \cos \theta_{pk} P_k = 0; \\ \sum_{k=1}^m F_{i,k} X_k - u_1 - \varphi_{1x} r_i \sin \theta_i - \varphi_{1y} r_i \cos \theta_i = 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \sum_{k=1}^n P_k = R; \\ \sum_{k=1}^n r_{pk} \sin \theta_{pk} P_k = Ra_x; \\ \sum_{k=1}^n r_{pk} \cos \theta_{pk} P_k = Ra_y, \end{array} \right.$$

где  $m$  – число участков Жемочкина на пластинке;  $\delta_{i,k}$  – взаимное вертикальное перемещение разрезанной связи Жемочкина с номером  $i$  от  $X_k = 1$ ;  $X_k$  – неизвестная сила в связи Жемочкина на участке с номером  $k$ ;  $u$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  – неизвестные линейное и угловые перемещения введенного в начале координат пластинки защемления;  $r_k \sin \theta_k$ ,  $r_k \cos \theta_k$  – расстояния от защемления до места приложения силы  $X_k$ ;  $r_{pk} \sin \theta_{pk}$ ,  $r_{pk} \cos \theta_{pk}$  – расстояния от защемления до участков, где приложены сосредоточенные неизвестные силы  $P_k$ ;  $n$  – число неизвестных сил, приложенных к точкам пластинки с перемещениями, лежащими в одной наклонной плоскости;  $y_{i,k}$  – вертикальное перемещение (прогиб) центра участка Жемочкина с номером  $i$  на пластинке с защемлением от единичной силы, приложенной к центру участка плиты с номером  $k$  ( $i = 1, \dots, m$ ), ( $k = 1, \dots, m$ ), определяется по формуле, приведенной в [11];  $P_k$  – неизвестная сила, приложенная к центру расположенного на пластинке участка с номером  $k$  ( $k = 1, \dots, m$ );  $u_1$ ,  $\varphi_{1x}$ ,  $\varphi_{1y}$  – неизвестные линейное и угловые перемещения наклонной плоскости, на которую действуют неизвестные силы;  $R$ ,  $a_x$ ,  $a_y$  – равнодействующая внешних сил, абсцисса и ордината её приложения на балочной плите.

Выражение  $\delta_{i,k}$  включает два слагаемых. Первое представляет перемещение центра участка с номером  $i$  упругого основания от единичной силы, распределенной равномерно по участку с номером  $k$  ( $i = 1, \dots, m$ ), ( $k = 1, \dots, m$ ). Определяется для упругого слоя по формуле

$$\delta_{i,k} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 r_k \Delta r \Delta \theta} F_{i,k} + y_{i,k},$$

где  $E_0$ ,  $\nu_0$  – упругие постоянные слоя; выражения для  $F_{i,k}$ ,  $y_{i,k}$  получаются по методике, представленной в работе [12], но здесь не приводятся из-за их громоздкости.

**Результаты расчета.** Расчет выполнялся для круглой металлической базы размерами опорной плиты  $0,7 \times 0,05$  м на бетонном фундаменте с упругими постоянными  $E_0 = 30600$  МПа,  $\nu_0 = 0,17$ . Колонна кольцевого сечения, диаметром  $0,35$  м опирается на базу симметрично. Контактная зона колонны с опорной плитой содержит 24 участка Жемочкина (рисунок 2).

Центры этих участков принадлежат базе, находятся в одной наклонной плоскости и имеют одинаковые угловые перемещения. Из-за действия асимметричной вертикальной нагрузки принято, что равнодействующая внешних сил  $R$  проходит через центр участка под № 4 (см. рисунок 2). Система разрешающих уравнений имеет 174-й порядок. После решения системы находились контактные напряжения и определялись перемещения. На рисунках 3, 4 приводятся графики перемещений и напряжений по характерным сечениям базы. Явно видна область контакта и внецентренного сжатия.

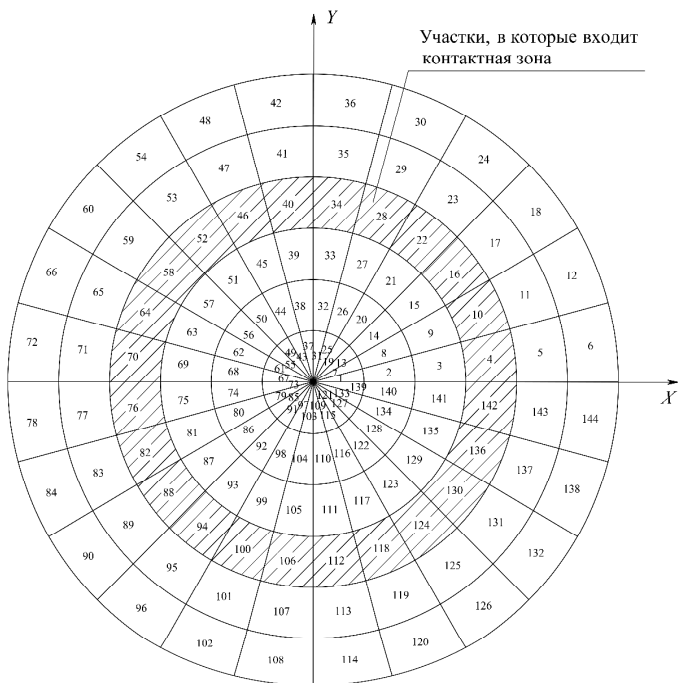


Рисунок 2 – Разбиение пластинки на участки Жемочкина

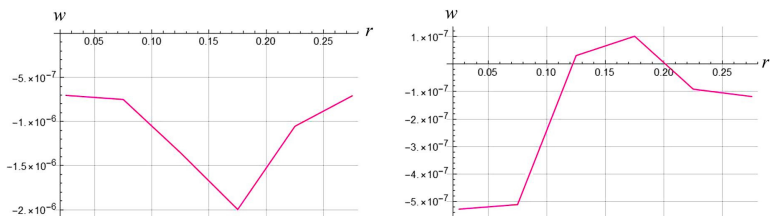


Рисунок 3 – Перемещения узлов базы по вертикальной оси (участки 1–6, 73–78)

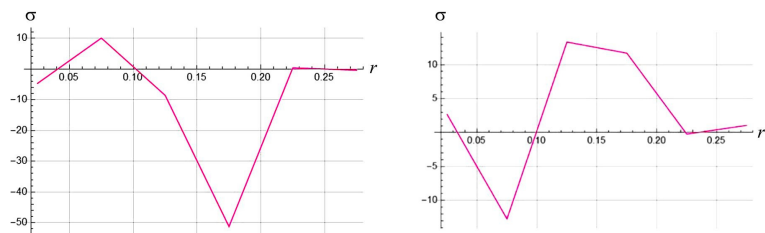


Рисунок 4 – Распределения контактных напряжений (участки 1–6, 73–78)

На рисунке 5 показаны 24 вертикальные силы, возникающие по окружности на контакте круглой колонны и базы в долях от величины  $R$  внецентренно приложенной равнодействующей силы. На графике распределения сил давления колонны на опорную плиту видно, что значения сил симметричны и имеют максимумы относительно нейтральной оси внецентренного сжатия. Все расчеты выполнялись в программном комплексе *Wolfram Mathematica 12.2* [13, 14].

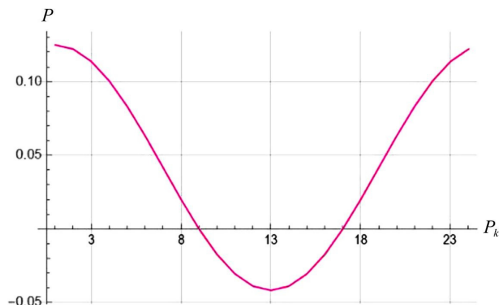


Рисунок 5 – График распределения сил давления колонны на опорную плиту по кольцевому сечению

**Заключение.** В работе изложена методика расчета круглой пластинки на упругом основании в полярных координатах способом Жемочкина при условии, что часть точек пластинки при изгибе лежат в одной наклонной плоскости. Данная методика позволяет найти вертикальные перемещения пластинки, распределение контактных напряжений и силы, обеспечивающие нахождение некоторых перемещений пластинки в одной плоскости. Предлагаемая методика может быть использована для разных моделей упругого основания и произвольном числе точек, лежащих в одной плоскости. Полученные результаты могут быть использоваться на стадии эксплуатации металлической базы колонны кольцевого поперечного сечения, кольцевых фундаментов дымовых труб ТЭЦ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности : учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 400 с.
- 2 Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. – М. : Стройиздат, 1962. – 239 с.
- 3 Ding, D. Problems in calculating the flexure of beams on elastic foundation / D. Ding // Canadian Journal of Civil Engineering. – 1987. – Vol. 14, no. 4. – P. 581–584.
- 4 Wang, Y. H. Beams and plates on elastic foundations: a review / Y. H. Wang, L. G. Tham, Y. K. Cheung // Progress in Structural Engineering and Materials. – 2005. – Vol. 7, no. 4. – P. 174–182.

5 **Босаков, С. В.** Способ Б. Н. Жемочкина в задачах устойчивости стержней на упругом основании / С. В. Босаков // Строительная механика и расчет сооружений. – 2020. – № 4 (291). – С. 61–66.

6 Convergence of analytical solution of pile under horizontal static load with analysis through finite element method / V. A. Pshenichkina [et al.] // Actual Issues of Mechanical Engineering (AIME 2018) : Proceedings of the International Conference // Advances in Engineering Research. – 2018. – Vol. 157. – P. 520–523.

7 **Ворович, И. И.** Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1974. – 456 с.

8 **Босаков, С. В.** Неосесимметричная контактная задача для кольцевой пластинки / С. В. Босаков, С. Генфуд // Прикладная механика. – 2017. – Т. 53, № 5. – С. 101–107.

9 **Босаков, С. В.** Способ Б. Н. Жемочкина в расчетах плит в форме части круга или кольца на произвольном упругом основании / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2021. – № 1 (294). – С. 40–44.

10 **Босаков, С. В.** Статический расчет балочной плиты на упругом основании при условии ограничений на перемещения плиты / С. В. Босаков, Ю. Н. Котов // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 17–23.

11 **Ржаницын, А. Р.** Строительная механика / А. Р. Ржаницын. – М. : Высш. шк., 1991. – 439 с.

12 **Босаков, С. В.** Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 128 с.

13 **Дьяконов, В. П.** Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК-Пресс, 2009. – 624 с.

14 **Половко, А. М.** Mathematica для студента / А. М. Половко. – СПб. : БХВ-Петербург. – 2007. – 368 с.

*S. V. BOSAKOV, Yu. N. KOTOV*

*Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus*

## **CONTACT PROBLEM IN POLAR COORDINATES FOR A ROUND PLATE FOR CONDITIONS OF ITS SOME DISPLACEMENT LIMITATION**

The problem of a round plate on an elastic foundation calculating by the method of B. N. Zhemochkin is considered for the case that some of the plate points at its bending lie in one inclined plane. A practical analogue of this problem is the spatial deformation of the base of an eccentrically compressed metal column with an annular cross section lying on a concrete base. An example of calculation is given, as well as the graphs of contact stresses and displacements and the distribution diagram for pressure forces of the column on the base plate.

**Keywords:** round plate, metal column foundation, flexible foundation, contact stresses, Zhemochkin's method.

Получено 14.09.2022