УДК 539.3

А. А. ПОДДУБНЫЙ, кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ПРИ ВНЕЗАПНОМ ОБРАЗОВАНИИ ТРЕЩИНЫ ВСЛЕДСТВИЕ ДЕЙСТВИЯ БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАГРУЗОК

Построена математическая модель вынужденных изгибных колебаний балки Эйлера – Бернулли на упругом основании Винклера, инициированных внезапным образованием поперечной трещины. При этом балка нагружена равномерно распределённой нагрузкой единичной интенсивности и жёстко защемлена по концам. Динамические прогибы и изгибающий момент исследуются путем разложения внешней нагрузки и начальных статических прогибов и момента в ряды по формам собственных колебаний поврежденной балки. Приводятся численные оценки и сравнения напряженно-деформированных состояний балки при квазистатическом и внезапном образовании трещин разной глубины и локализации.

Введение. При строительстве и эксплуатации конструкций зданий и сооружений в них могут появляться недопустимые трещины в результате концентрации микротрещин с последующим их слиянием в макротрещины, образование которых зависит от уровня нагрузки, скорости нагружения, модулей упругости, начальных дефектов и других показателей. При этом начало разрушения зависит от величин главных напряжений и соотношения между ними, а кажущаяся видимость внезапного разрушения есть продолжительный процесс накопления всевозможных повреждений – дефектов, приводящих к техногенным катастрофам. Поэтому изучение процесса внезапного образования трещин вследствие быстро изменяющихся нагрузок является актуальным направлением исследования.

Для анализа деформаций и внутренних усилий использовался метод начальных параметров в сочетании с векторно-матричным представлением состояний произвольных сечений балки. Определены частоты и формы собственных изгибных колебаний балки при различных сочетаниях параметров системы «балка – основание» с глубиной и локализацией трещины. Для этого использовалась математическая модель динамического процесса в нагруженной балке на основании Винклера, инициируемого внезапным образованием дефекта балки в виде открытой поперечной трещины [1]. Помимо этого, рассмотрены вынужденные колебания балки, статически нагруженной равномерно с распределенной нагрузкой заданной интенсивности q, опертой на упругое основание Винклера и жестко защемленной по концам, с использованием результатов, полученных в работе [1].

Постановка задачи.

1 Вынужденные колебания балки с трещиной. Физической моделью балки, опертой на упругое основание, испытывающей изгибные колебания после внезапного трещинообразования, принята конструкция из двух балочных сегментов, соединенных безмассовой пружиной кручения.

Поперечные перемещения сечений балки определяются решением уравнения вынужденных колебаний, описанных в работе [1]:

$$\frac{\partial w_{i^{\text{дин}}}}{\partial \xi^4} + 4\alpha^4 \left(w_{i^{\text{дин}}} + \frac{\partial w_{i^{\text{дин}}}}{\partial \tau^2} \right) = \bar{q}; \qquad (1)$$

$$\xi_i = \frac{x_i}{L};\ w_i^{\text{дин}} = \frac{v_i}{L};\ \tau = \omega_0 t;\ \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho A}},$$

где x_i, ξ_i – осевая размерная и безразмерная координаты; v_i, $w_i^{\text{дин}}$ – размерный и безразмерный прогибы сечения ξ_i; t, τ – размерное и безразмерное время; ρ – плотность материала балки; ω_0 – условная частота – параметр системы «балка – основание», имеющий размерность частоты.

Разделим переменные в уравнении (1) с помощью ряда

$$w_{\text{дин}} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\tau) W_n(\xi), \qquad (2)$$

где $W_n = W_n(\xi)$ – собственные функции балки, полученные сопряжением собственных функций сегментов $W_{ni}(\xi)(i = 1, 2)$ из уравнений [1].

2 Собственные изгибные колебания балки с открытой поперечной трещиной. Поскольку сегменты поврежденной балки, образующейся после внезапного образования трещины, отличаются только длиной: 1-й сегмент длиной $v = L_1 / L$, 2-й сегмент длиной $(1 - v)$, уравнение их собственных колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^4 w_{i^{\text{дин}}}}{\partial \xi^4} + 4\alpha^4 \left(w_{i^{\text{дин}}} + \frac{\partial^4 w_{i^{\text{дин}}}}{\partial \tau^2} \right) = 0. \qquad (3)$$

Решение уравнения (2) ищем, полагая колебания гармоническими и разделяя переменные представлением

$$w_{i^{\text{дин}}}(\xi, \tau) = W_i(\xi_i) \sin\bar{\omega}\tau, \qquad (4)$$

где $\bar{\omega} = \dfrac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}_0}$ – искомая относительная частота, отнесенная к относительной условной частоте; $\tilde{\omega} = \dfrac{\omega}{\omega_э}$ – искомая частота, отнесенная к эталонной частоте $\omega_э = \dfrac{1}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A}}$; $\bar{\omega}_0 = \dfrac{\omega_0}{\omega_э}$ – условная частота, отнесенная к $\omega_э$.

Далее в качестве обобщенной жесткости системы «балка – основание» удобно использовать безразмерную условную частоту $\bar{\omega}_0$ вместо параметра α, которые связаны между собой соотношением

$$4\alpha^4 = \frac{\omega_0^2}{EI/L^4\rho A} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_э}\right)^2 = \bar{\omega}_0^2.$$

Подстановка представления (4) в уравнение (3) дает уравнение форм собственных колебаний сегментов

$$W_i^{\mathrm{IV}} - \left(\tilde{\omega}^2 - \bar{\omega}_0^2\right)W_i = 0. \qquad (5)$$

Применяя к (5) подстановку Эйлера $W_i = Ae^{r\xi_i}$, получим характеристическое уравнение

$$r^4 - \left(\tilde{\omega}^2 - \bar{\omega}_0^2\right) = 0, \qquad (6)$$

его корни

$$r_{1,2} = \pm\beta_1;\ r_{3,4} = \pm i\beta_1;\ \beta_1 = \sqrt[4]{\tilde{\omega}^2 - \bar{\omega}_0^2}$$

и функцию прогибов

$$W_i(\beta_1\xi_i) = W_{0i}R_4(\beta_1\xi_i) + W'_{0i}R_3(\beta_1\xi_i) + {} + W''_{0i}R_2(\beta_1\xi_i) + W'''_{0i}R_1(\beta_1\xi_i), \qquad (7)$$

где $R_j = R_j(\beta_1\xi_i)$ $(j = 1...4)$ – функции Крылова вида

$$R_1(\beta_1\xi_1) = \frac{\mathrm{sh}\beta_1\xi_i - \sin\beta_1\xi_i}{2\beta_1^3};\ R_2 = R_1';\ \ R_3 = R_2';\ \ R_4 = R_3';$$

$$R_4' = \beta_1^4 R_1;$$

W_{0i}, W'_{0i}, W''_{0i}, W'''_{0i} – начальные параметры i-го сегмента $(W_{01} = W'_{01} = 0)$.

Последовательно дифференцируя прогиб (7), получим остальные кинематические и силовые факторы: угол поворота сечения $W_i'(\beta_1\xi_i)$, изгибающий момент $W_i''(\beta_1\xi_i)$, и поперечную силу $W_i'''(\beta_1\xi_i)$. Теперь состояние произвольного сечения ξ_i сегмента можно представить матричным уравнением

$$\bar{W}_i = V_1(\xi_i)\bar{W}_{0i}, \qquad (8)$$

где $\bar{W}_i(\beta_1\xi_i)$ – вектор состояния произвольного сечения ξ_i i-го сегмента;

$$\bar{W}_i(\beta_1\xi_i) = \left\{\bar{W}_i(\beta_1\xi_i) W_i'(\beta_1\xi_i) W_i''(\beta_1\xi_i) W_i'''\beta_1\xi_i)\right\}^T;$$

$\bar{W}_{0i}$ – вектор начальных параметров i-го сегмента, $\bar{W}_{0i} = \left\{W_{0i}W'_{0i}W''_{0i}W'''_{0i}\right\}^T$;

$$V_1(\xi_i) = \begin{pmatrix} R_4(\beta_1\xi_i) & R_3(\beta_1\xi_i) & R_2(\beta_1\xi_i) & R_1(\beta_1\xi_i) \\ \beta_1^4 R_4(\beta_1\xi_i) & R_4(\beta_1\xi_i) & R_3(\beta_1\xi_i) & R_2(\beta_1\xi_i) \\ \beta_1^4 R_2(\beta_1\xi_i) & \beta_1^4 R_1(\beta_1\xi_i) & R_4(\beta_1\xi_i) & R_4(\beta_1\xi_i) \\ \beta_1^4 R_3(\beta_1\xi_i) & \beta_1^4 R_2(\beta_1\xi_i) & \beta_1^4 R_1(\beta_1\xi_i) & R_4(\beta_1\xi_i) \end{pmatrix} -$$

функциональная матрица влияния начальных параметров i-го сегмента на состояние произвольного сечения ξ_i этого сегмента.

Численные результаты.

Результаты расчетов, приведенных ниже, относятся к системе «балка – основание» со следующими исходными данными.

1 Балка: материал – бетон, $E = 3{,}5\cdot10^{16}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$; длина $L = 6{,}7$ м; поперечное сечение прямоугольное с шириной $B = 0{,}25$ м и высотой $h = 0{,}148$ м; площадь $A = 0{,}045$ м^2; осевой момент инерции $I = 1{,}125\cdot10^{-4}$ м$^{-4}$; удлинение $\frac{L}{h} = 40.$

2 Основание: материал – гравий; коэффициент жесткости $\bar{K} = 7{,}5\cdot10^6\frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$; коэффициент постели $K = \bar{K}, B = 1{,}875\cdot10^6\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$

3 Нагрузка, перпендикулярная оси балки, равномерно распределенная, безразмерной единичной интенсивности.

4 Обобщенный параметр жесткости системы «балка – основание» $\alpha = 3{,}976$.

5 Трещина: глубина $\chi = \frac{a}{h}$ от 0,3 до 0,7; локализация трещины $\nu = \frac{l_T}{L}$.

6 Относительно параметра ν заметим, что диапазон изменения его ограничен требованием, чтобы оба сегмента балки с трещиной, соединённые пружиной кручения, удовлетворяли основным гипотезам и допущениям, которые приняты в строительной механике стержневых систем. В частности, отношение длин сегментов ν и $1 - \nu$ к максимальному размеру поперечного сечения h, т. е. их удлинение, должно быть не меньше 10. Такому же требованию должно удовлетворять удлинение исходной (бездефектной) балки. Таким образом, длины сегментов должны удовлетворять системе первенств.

При соотношении $\frac{h}{L} = k = \frac{1}{40} \to 0{,}025 < \nu < 0{,}75$, то есть в данной постановке задачи, приняв $\frac{L}{h} = 40$, допустимо рассматривать образование трещин в сечениях, удаленных от концов балки на расстояниях не менее четверти её длины, либо в сечениях, расположенных в заделках, когда рассматривается, по существу, один сегмент, соединенный с одной опорой пружиной кручения (упругая заделка).

При расчете прогибов, изгибающих моментов и напряжений рассматривали два варианта расположения трещины: в среднем сечении балки $\nu = 0{,}5$ и в сечении в заделке $\nu = 1$. Для случая $\nu = 0{,}5$ рассчитывались максимальные моменты и напряжения в двух сечениях: в середине балки $\xi = 0{,}5$ и в заделке ($\xi = 0$ или $\xi = 1$). Для случая $\nu = 1$ такие же расчеты проводились для трех сечений: в неповрежденном сечении $\xi = 0$, в середине балки и в поврежденном сечении $\xi = 1$.

Расчеты приводятся в безразмерных значениях максимальных изгибающих моментов и растягивающих напряжений при квазистатическом и внезапном образовании трещин различной глубины χ в среднем сечении балки $\nu = 0{,}5$. Полученные результаты показали, что при квазистатическом образовании трещины в середине балки и небольших глубинах трещины ($\chi < 0{,}5$) опасными являются сечения в заделках, в неповрежденной балке с наибольшими напряжениями $\sigma \approx 47\ldots48$, при более глубоких трещинах $\chi \geq 0{,}5$ опасным становится среднее сечение $\xi = 0{,}5$ с наибольшими напряжениями $\sigma_{\text{наиб}} > 50$. При внезапном образовании трещины в сечении $\xi = 0{,}5$ оно становится опасным уже при глубинах трещины $\chi > 0{,}3$, когда напряжение становится > 50.

Для приведения числовых значений максимальных моментов и напряжений к размерному виду их следует умножать соответственно на $\frac{EI}{L}\,\text{Н}\cdot\text{м}$ и $E \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

Далее определяем отношения наибольших напряжений в сечениях балки, получаемых при образовании трещин различной глубины в середине балки, к наибольшему напряжению (41,75) в неповрежденной балке.

Определено, что наибольшее (более чем трехкратное (3,53)) приращение получает среднее сечение балки при внезапном образовании трещины $\chi = 0{,}7$ в этом же сечении. При квазистатическом образовании такой же трещины напряжение увеличивается в 2,93 раза.

В последующем определены показатели, характеризующие влияние внезапности образования трещин различной глубины на величину напряжения. В качестве критерия принято отношение напряжений, развивающихся после внезапного и квазистатического образования трещины.

Наибольший эффект внезапности образования трещины (1,92) получился для трещины глубиной $0{,}5h$.

Далее провели расчеты напряжений в балке при образовании трещины в сечении правой заделки $\nu = 1$.

В данном случае опасным сечением во всех обстоятельствах является сечение с трещиной $\xi = 1$. Показано, что напряжение может превышать наибольшее статическое напряжение в этом сечении (41,75) в 5 раз при квазистатическом и в 7 раз при внезапном образовании трещины до глубины $0{,}7\,h$.

Сравнительный анализ двух вариантов локализации трещины показывает, что более опасным для несущей способности балки на упругом основании с жестко заделанными концами при равномерном распределении внешней нагрузки является случай образования трещины в одной из заделок.

Вывод. В работе завершено построение математической модели динамики конструктивно нелинейной системы взаимодействующих балки и упругого основания Винклера, описанное в работе [1].

Разработан аналитический метод расчета вынужденных колебаний в системе «балка – основание», инициируемых внезапным образованием открытой поперечной трещины.

Вынужденные колебания исследуются путем разложения внешней нагрузки и статического прогиба неповрежденной балки в ряды по формам собственных колебаний балки с дефектом.

Сравнением напряженных состояний сечений балки в ходе вынужденных колебаний с состоянием при квазистатическом образовании тех же трещин, а также с состоянием неповрежденной балки, показано перераспределение и многократное превышение значений максимальных напряжений в балке, обусловленные фактором внезапности образования трещины.

Список литературы

1 **Поддубный, А. А.** Динамика конструктивно нелинейной системы «балка – основание» при внезапном образовании трещин / А. А. Поддубный, В. А. Гордон // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2022. – № 1(44). – С. 84–97.

Получено 31.10.2022

A. A. Poddubny. Forced vibrations of a reinforced concrete beam sitting on an elastic foundation in the case of a sudden formation of a crack due to the action of rapidly changing loads.

A mathematical model of forced bending vibrations of an Euler-Bernoulli beam on an elastic Winkler foundation, initiated by the sudden formation of a transverse crack, is constructed. The beam is loaded with a uniformly distributed load of unit intensity and is rigidly clamped at the ends. Dynamic deflection and bending moment are investigated by expanding the external load and the initial static deflection and moment into rows according to the eigenmodes of the damaged beam. Numerical estimates and comparisons of the stress-strain states of the beam under quasi-static and sudden formation of cracks of different depths and localizations are given.