МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

Т. И. ВАСИЛЬЕВА, С. П. НОВИКОВ, Д. Н. СИМОНЕНКО

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области транспорта и транспортной деятельности
для обучающихся по специальностям 1-37 02 01 «Тяговый состав
железнодорожного транспорта (по направлениям)»,
1-37 02 02 «Подвижной состав железнодорожного транспорта»,
1-37 02 03 «Техническая эксплуатация погрузочно-разгрузочных,
путевых, дорожно-строительных машин и оборудования»
в качестве учебно-методического пособия
по учебной дисциплине «Математика»*

Гомель 2023

УДК 517.37(075.8)
ББК 22.161.1
В19

Р е ц е н з е н т ы: доцент кафедры информационно-управляющих систем и технологий, канд. физ.-мат. наук, доцент *Н. В. Рязанцева* (БелГУТ);
кафедра фундаментальной и прикладной математики (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент *Л. Н. Марченко*) (ГГУ им. Ф. Скорины)

Васильева, Т. И.
В19 Кратные и криволинейные интегралы : учеб.-метод. пособие / Т. И. Васильева, С. П. Новиков, Д. Н. Симоненко ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2023. – 78 с.
ISBN 978-985-891-080-8

Рассмотрены общие методы использования материала раздела курса высшей математики «Кратные и криволинейные интегралы» при решении прикладных задач. Краткое изложение основных теоретических вопросов, необходимых для успешных практических приложений, сопровождается большим числом подробно разобранных примеров. Приведены задачи для самостоятельных работ.

Предназначено для студентов технических специальностей.

УДК 517.37(075.8)
ББК 22.161.1

© Васильева Т. И., Новиков С. П., Симоненко Д. Н., 2023

ISBN 978-985-891-080-8

© Оформление. БелГУТ, 2023

1 ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Определение, основные свойства

Рассмотрим на плоскости Oxy замкнутую ограниченную область G, площадь которой S. Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в G. Разобьем область G произвольно на n частей G_1, G_2, ..., G_n (рисунок 1.1), площади которых ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметры d_1, d_2, ..., d_n соответственно (диаметром области называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области).

В каждой части G_i выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$ и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

которая называется интегральной суммой функции $f(x, y)$ в области G.

Для непрерывной в области G функции $f(x, y)$ существует конечный предел I интегральной суммы σ при стремлении к нулю наибольшего из диаметров λ областей G_i, при этом I не зависит от способа разбиения области G и выбора точек $(x_i; y_i)$.

$$I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается одним из символов:

$$I = \iint_G f(x, y)dS = \iint_G f(x, y)dxdy.$$

Отметим, что этот предел может существовать не только для непрерывных функций. Функция $z = f(x, y)$, для которой предел интегральной суммы существует и конечен, называется интегрируемой.

Геометрический смысл двойного интеграла. Двойной интеграл от непрерывной неотрицательной функции $z = f(x, y)$ по области G равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу – плоскостью $z = 0$, с боков – цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области G, а образующие параллельны оси Oz (рисунок 1.2).

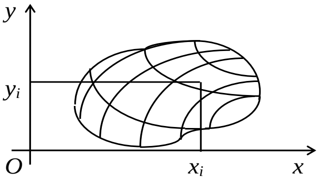

Рисунок 1.1

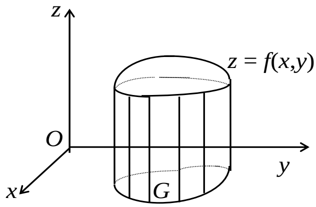

Рисунок 1.2

Механический смысл двойного интеграла. Двойной интеграл от неотрицательной функции $z = f(x, y)$ по области G есть масса пластинки G, если $f(x, y)$ считать плотностью пластинки в точке $(x; y)$.

Основные свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_G cf(x,y)dS = c\iint\limits_G f(x,y)dS$ (c = const).

2. $\iint\limits_G \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)dS = \iint\limits_G f(x,y)dS \pm \iint\limits_G g(x,y)dS.$

3. $\iint\limits_G f(x,y)dS = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{G_2} f(x,y)dS,$ где G есть объединение областей G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек.

4. Если $f(x,y) \le g(x,y)$, то $\iint\limits_G f(x,y)dS \le \iint\limits_G g(x,y)dS.$

5. $\left|\iint\limits_G f(x,y)dS\right| \le \iint\limits_G |f(x,y)|dS.$

6. Если $m \le f(x, y) \le M$ в области G, то $mS \le \iint\limits_G f(x,y)dS \le MS.$

7. Для непрерывной в области G вместе с ее границей функции $f(x, y)$ существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in G$, для которой $\iint\limits_G f(x,y)dS = f(\bar{x}, \bar{y})S.$

Задачи

Изобразить тела, объемы которых выражаются следующими двойными интегралами:

1.1.1. $\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy$, где область G: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$.

1.1.2 $\iint\limits_G \left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} dxdy$, где область G: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 1$.

1.1.3. $\iint\limits_G (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} dxdy$, где область G: $x^2 + y^2 \le x$.

1.1.4. $\iint\limits_G (x+y)dxdy$, где область G: $0 \le x + y \le 1$, $0 \le x$, $0 \le y$.

1.1.5. $\iint\limits_G 4dxdy$, где область G: $|x| \le 2$, $-3 \le y \le \frac{x}{2}+2$.

1.1.6. $\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy$, где область G: $|x| + |y| \le 1$.

1.2 Вычисление двойного интеграла

Различают области интегрирования следующих видов.

1. Область G ограничена слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$), снизу – кривой $y = \varphi_1(x)$, сверху – кривой $y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$), каждая из которых пересекается вертикальной прямой только в одной точке (рисунок 1.3).

2. Область G ограничена снизу и сверху прямыми $y = c$, $y = d$ ($c < d$), слева – кривой $x = \Psi_1(y)$, справа – кривой $x = \Psi_2(y)$ ($\Psi_1(y) \le \Psi_2(y)$), каждая из которых пересекается горизонтальной прямой только в одной точке (рисунок 1.4).

Для области первого вида двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

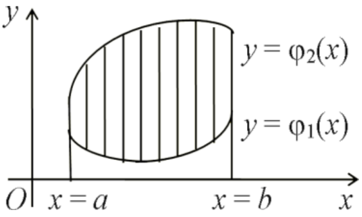

Рисунок 1.3

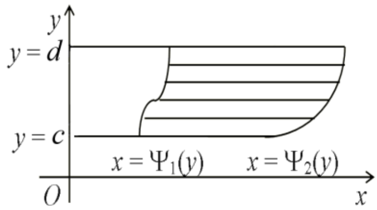

Рисунок 1.4

Для области второго вида двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

В общем случае область интегрирования путем разбиения на части сводится к рассмотренным выше основным.

Пример 1. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}} xydy.$

Решение.

$$\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}} xydy=\int x\frac{y^2}{2}\Big|_x^{x\sqrt{3}}dx=\int\limits_1^2\frac{(3x^3-x^3)}{2}dx=\int\limits_1^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=3\frac{3}{4}.$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

Решение. Область G ограничена линиями $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ (рисунок 1.5). Представим границу области G следующим образом: $y=0$, $y=1$, $x=-(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$, $x=(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$. Тогда

$$\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (x^2+xy)dxdy$ по области G, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1 - x$ (рисунок 1.6).

Решение.

$$\iint\limits_G (x^2+xy)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2+xy)dy = \int\limits_0^1 (x^2 y + x\frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x-x^3}{2} dx = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4})\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

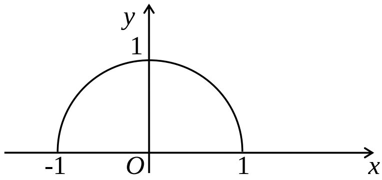

Рисунок 1.5

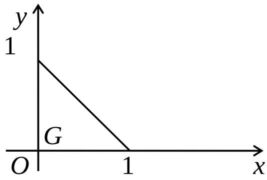

Рисунок 1.6

Задачи

Двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ заменить повторным, в котором расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для указанных областей G:

1.2.1. G – треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$.

1.2.2. G – трапеция с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 2)$, $C(0; 1)$.

1.2.3. G – треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(2; 1)$, $B(–2; 1)$.

1.2.4. G – круг $x^2 + y^2 \le 1$.

1.2.5. G – круг $x^2 + y^2 \le y$.

1.2.6. G – параболический сегмент, ограниченный кривыми $y = x^2$ и $y = 1$.

Изобразить области интегрирования и вычислить повторные интегралы:

1.2.7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2 dy.$ 1.2.8. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 (x^2+2xy)dy.$

1.2.9. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} \rho^2 \sin^2 \varphi d\rho.$ 1.2.10. $\int\limits_1^{2} dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx.$

1.2.11. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{1} (x+y) dy.$ 1.2.12. $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_0^{y} e^{\frac{x}{y}} dx.$

Изобразить области интегрирования и изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

1.2.13. $\int\limits_1^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy.$ 1.2.14. $\int\limits_0^{4} dx \int\limits_x^{4x} f(x,y) dy.$

1.2.15. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{0{,}25x^2-1}^{2-x} f(x,y) dy.$ 1.2.16. $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y) dy.$

1.2.17. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y) dy.$ 1.2.18. $\int\limits_1^{e} dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y) dy.$

Вычислить двойные интегралы:

1.2.19. $\iint\limits_G (x+y) dxdy,$ где область G – треугольник, ограниченный прямыми $x = 4$, $y = 0$, $y = x$.

1.2.20. $\iint\limits_G xy^2 dxdy,$ где область G ограничена параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 1$.

1.2.21. $\iint\limits_G x dxdy,$ где область G ограничена линиями $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

1.2.22. $\iint\limits_G (1 + xy^2) dxdy,$ где область G ограничена линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0{,}5x$, $y = (0{,}5x)^{1/2}$.

1.2.23. $\iint\limits_G (x + 2y) dxdy,$ где область G ограничена прямыми $y = 4x + 6$, $y = 0{,}5x - 1$, $x = -1$.

1.2.24. $\iint\limits_G (x^2 + y^2) dxdy,$ где область G – параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x + 1$, $y = 1$, $y = 3$.

1.3 Замена переменных в двойном интеграле

Формула преобразования двойного интеграла к криволинейным координатам u,v, которые связаны с прямоугольными координатами соотношениями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, имеет вид

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv, \qquad (*)$$

где

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

При этом предполагается, что осуществляется взаимно однозначное отображение области G плоскости Oxy на область D плоскости O_1uv; функции $x(u,v)$ и $y(u,v)$ имеют непрерывные частные производные в области D и якобиан $J \neq 0$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_G (2x-y)dxdy$, где G – параллелограмм, ограниченный прямыми $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=1$, $2x-y=3$.

Решение. Непосредственное вычисление данного интеграла через повторный является громоздким, так как потребует разбиения G на три части и вычисления трех повторных интегралов. Поэтому лучше ввести замену $x+y=u$, $2x-y=v$. Тогда $x = \dfrac{u+v}{3}$, $y = \dfrac{2u-v}{3}$. Прямые $x+y=1$ и $x+y=2$ в системе координат Oxy перейдут в прямые $u=1$ и $u=2$ в системе координат O_1uv, соответственно $2x-y=1$ и $2x-y=3$ – в $v=1$ и $v=3$. Параллелограмм G (рисунок 1.7, *а*) перейдет в прямоугольник D (рисунок 1.7, *б*).

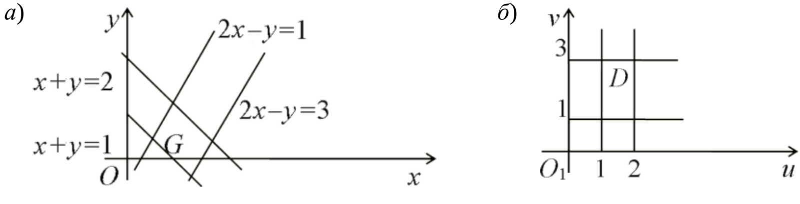

Рисунок 1.7

Якобиан преобразования $J=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{3}\neq 0$. Поэтому

$$\iint\limits_G (2x-y)dxdy=\iint\limits_G \frac{1}{3}vdudv=\frac{1}{3}\int\limits_1^2 du\int\limits_1^3 vdv=\frac{1}{3}\int\limits_1^2\left(\frac{v^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 du=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)\int\limits_1^2 du=1\frac{1}{3}.$$

Для случая полярных координат ρ и φ ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$) якобиан $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\rho$ и формула (*) имеет вид

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\iint\limits_G f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy,$ где область G – четверть круга $x^2+y^2\leq 1$, расположенная в I квадранте (рисунок 1.8).

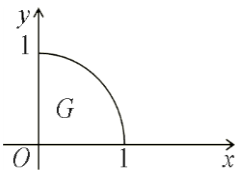

Рисунок 1.8

Решение. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, имеем:

$$\iint\limits_G e^{\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 e^{\rho^2}\rho d\rho=\frac{e-1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi(e-1)}{4}.$$

Задачи

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \rho^2 d\rho d\varphi,$ если область G ограничена:

1.3.1. окружностями $\rho=3$, $\rho=6$;

1.3.2. кривой $\rho=a\sin 2\varphi$;

1.3.3. первым витком спирали $\rho=3\varphi$ и полярной осью.

Вычислить следующие интегралы путем перехода к полярным координатам:

1.3.4. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dx.$ 1.3.5. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy.$

1.3.6. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy.$ 1.3.7. $\int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} (h-2x-3y)dx.$

Перейдя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

1.3.8. $\iint\limits_G e^{-x^2-y^2}dxdy,$ если область G – круг $x^2+y^2 \le a^2$.

1.3.9. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$ если область G ограничена линиями $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=36$.

1.3.10. $\iint\limits_G xy^2dxdy,$ если область G ограничена окружностями $x^2+(y-1)^2=1$ и $x^2+y^2=4y$.

1.3.11. $\iint\limits_G \sin\sqrt{(x^2+y^2)}\,dxdy,$ если область G – круговое кольцо $\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$.

1.3.12. $\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy,$ если область G ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.

1.3.13. $\iint\limits_G \ln(1+x^2+y^2)dxdy,$ если область G определяется неравенствами $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x^2+y^2 \le 1$.

Вместо x и y ввести новые переменные u и v и определить пределы интегрирования в следующих двойных интегралах:

1.3.14. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{3x}^{5x} f(x,y)dy,$ если $u=x$, $v=\dfrac{y}{x}$.

1.3.15. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{ex} f(x,y)dy,$ если $x = u - uv$, $y = uv$.

1.3.16. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy,$ если $u = x + y$, $v = x - y$.

С помощью надлежащей замены переменных вычислить двойные интегралы:

1.3.17. $\iint\limits_G dxdy,$ если область G ограничена линиями $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 3x$.

1.3.18. $\iint\limits_G \frac{dxdy}{(x+y)^4}$, если область G ограничена линиями $x + y = 1$, $x + y = 2$, $3x - y = 0$, $4x - y = 0$.

1.3.19. $\iint\limits_G xydxdy,$ если область G ограничена линиями $x^2 = 3y$, $x^2 = 5y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$.

1.4 Самостоятельная работа

В задаче 1 вычислить повторный интеграл. В задаче 2 изменить порядок интегрирования. В задаче 3 вычислить интеграл путем перехода к полярным координатам.

Вариант 1

1. $\int\limits_1^e dx \int\limits_4^6 \frac{y}{x} dy.$

2. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} f(x,y)dy.$

3. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy.$

Вариант 2

1. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} dy \int\limits_0^{\pi/2} \cos(x+y)dx.$

2. $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^4 f(x,y)dy.$

3. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dy.$

Вариант 3

1. $\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{1}^{2} xy dy.$

2. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

3. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-\sqrt{\pi^2-x^2}}^{\sqrt{\pi^2-x^2}} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dy.$

Вариант 4

1. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1}^{2} (x^2+y^2)dy.$

2. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

3. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (1-2x-3y)dy.$

Вариант 5

1. $\int\limits_{3}^{5} dx \int\limits_{0}^{2} (x+y)dy.$

2. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy.$

3. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy.$

Вариант 6

1. $\int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{1}^{2} (x+y)^{-2} dy.$

2. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{4} f(x,y)dx.$

3. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2+1)^{-1} dy.$

Вариант 7

1. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{1} e^{x-y} dx.$

2. $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x-2}^{-x^2} f(x,y)dy.$

3. $\int\limits_{0}^{e^2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{e^4-x^2}} \ln(x^2+y^2)dy.$

Вариант 8

1. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{x\sqrt{3}} xy dy.$

2. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{1/y}^{y} f(x,y)dx.$

3. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$

Вариант 9

1. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_4^8 \frac{y}{x^3} dx.$

2. $\int\limits_1^6 dx \int\limits_{6/x}^{7-x} f(x,y) dy.$

3. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2) dy.$

Вариант 10

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{y-1}^{2y} xy dy.$

2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy.$

3. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy.$

1.5 Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоской фигуры, ограниченной областью G, находится по формуле

$$S = \iint\limits_G dxdy.$$

Для области G, определяемой неравенствами $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ (рисунок 1.9), площадь

$$S = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$

Если G определяется неравенствами $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$ (рисунок 1.10), то площадь

$$S = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx.$$

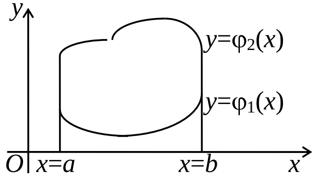

Рисунок 1.9

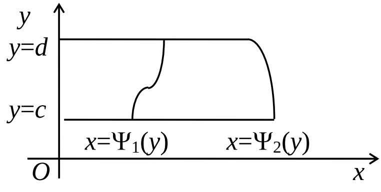

Рисунок 1.10

Если область G определена в полярных координатах неравенствами $\alpha \le \varphi \le \beta$, $g_1(\varphi) \le \rho \le g_2(\varphi)$, то площадь

$$S = \iint\limits_G \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \rho d\rho.$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 = y^3$, $x^2 = 8(6 - y)^3$.

Решение. Построим область G (рисунок 1.11). Находим координаты точек пересечения заданных линий, решая систему $\begin{cases} x^2 = y^3, \\ x^2 = 8(6-y)^3. \end{cases}$ В результате получим $A(-8; 4)$, $B(8; 4)$. Фигура симметрична относительно оси Oy, поэтому ее площадь равна удвоенной площади криволинейного треугольника OBC. Следовательно,

$$S = \iint\limits_G dxdy = 2\iint\limits_{OBC} dxdy = 2\int\limits_0^8 dx \int\limits_{x^{2/3}}^{6-\frac{1}{2}x^{2/3}} dy = 2\int\limits_0^8 y \Big|_{x^{2/3}}^{6-\frac{1}{2}x^{2/3}} dx = 2\int\limits_0^8 \left(6 - \frac{3}{2}x^{2/3}\right)dx =$$

$$= 2\left(6x - \frac{9}{10}x^{5/3}\right)\Bigg|_0^8 = 38\frac{2}{5}.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x + 4$, $x + y = 2$.

Решение. Область G есть фигура, ограниченная слева параболой $y^2 = x + 4$, справа – прямой $x + y = 2$ (рисунок 1.12). Решая систему $\begin{cases} y^2 = x + 4, \\ x + y = 2, \end{cases}$ находим точки $A(0; 2)$ и $B(5; -3)$ пересечения параболы и прямой. Искомая площадь

$$S = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_{-3}^{2} dy \int\limits_{y^2-4}^{2-y} dx = \int\limits_{-3}^{2} (6 - y - y^2)dy = 20\frac{5}{6}.$$

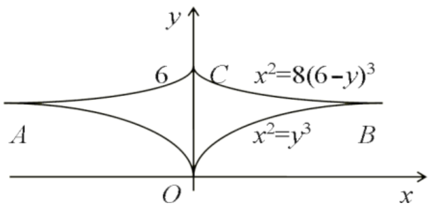

Рисунок 1.11

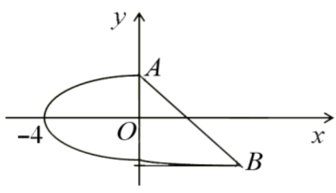

Рисунок 1.12

Пример 3. Найти площадь области, ограниченной линиями $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = b\cos\varphi$, $0 < a < b$.

Решение. Область G представляет собой часть круга (рисунок 1.13). Учитывая симметрию, площадь S равна удвоенной площади фигуры OAB. Следовательно,

$$S = \iint_G dxdy = 2\iint_{OBC} dxdy = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} \rho d\rho = (b^2 - a^2)\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{(b^2-a^2)}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{(b^2-a^2)}{2}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi(b^2-a^2)}{4}.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ $(a > 0)$.

Решение. В декартовых прямоугольных координатах нахождение пределов интегрирования привело бы к громоздким вычислениям. Перейдем к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда получим уравнение кривой $\rho = 2a\cos^3\varphi$. Так как ρ – величина неотрицательная, то φ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Область интегрирования имеет вид, показанный на рисунке 1.14.

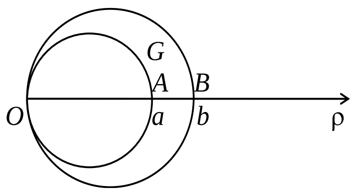

Рисунок 1.13

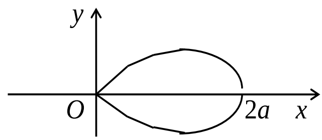

Рисунок 1.14

Из симметричности кривой относительно полярной оси получаем, что

$$S = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos^3\varphi} \rho d\rho = 4a^2\int_0^{\pi/2}\cos^6\varphi d\varphi = \frac{5}{8}\pi a^2.$$

Задачи

Найти площади, ограниченные следующими линиями:

1.5.1. $xy = 1$, $x + y = 5/2$. 1.5.2. $y = x^2$, $4y = x^2$, $y = 4$.

1.5.3. $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -4x + 4$. 1.5.4. $y = \ln x$, $x + y = 1$, $y = -1$.

1.5.5. $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = 0$ $(x \ge 0)$.
1.5.6. $y = e^x,\ y = e^{2x},\ x = 1$.
1.5.7. $\rho = a\cos 2\varphi$.
1.5.8. $\rho = 4\sin\varphi,\ \rho = 2\sin\varphi$.
1.5.9. $\rho = a(1 - \cos\varphi),\ \rho = a$ (вне круга).
1.5.10. $\rho\cos\varphi = 1,\ \rho = 2$.
1.5.11. $\rho = 1 - \cos\varphi,\ \rho = 1$ (вне кардиоиды).
1.5.12. $\rho = 4(1 + \cos\varphi),\ \rho\cos\varphi = 3$ (справа от прямой).

Переходя к полярным координатам, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:
1.5.13. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),\ x^2 + y^2 = a^2$ (вне круга).
1.5.14. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$.
1.5.15. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$ $(x \ge 0, y \ge 0)$.
1.5.16. $(x^2 + y^2)^2 = 8xy,\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (вне круга).

1.6 Нахождение объемов тел

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу – плоскостью $z = 0$, с боков – цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области G, а образующие параллельны оси Oz (рисунок 1.15), вычисляется по формуле
$$V = \iint_G f(x, y)dxdy.$$
Нахождение объемов тел более сложной формы сводится к вычислению алгебраической суммы объемов нескольких криволинейных цилиндров.

Например, если тело ограничено поверхностями $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$, $0 \le f_1(x, y) \le f_2(x, y)$ и его проекция есть область G на плоскости Oxy (рисунок 1.16), то его объем находится по формуле
$$V = \iint_G (f_2(x, y) - f_1(x, y))dxdy.$$
Эта формула верна не только в том случае, когда $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ неотрицательны, но и тогда, когда $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ – любые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношению $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$.

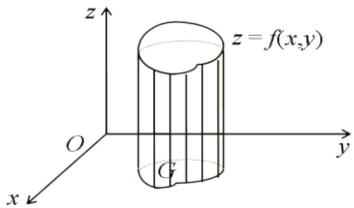

Рисунок 1.15

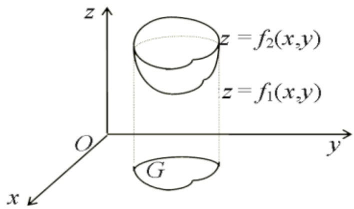

Рисунок 1.16

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = 4$, $y = 4x^2$, $x + y + z = 6$, $z = 0$.

Решение. Данное тело есть цилиндрическое тело, ограниченное сверху частью плоскости $z = 6 - x - y$, снизу – частью плоскости Oxy, заключенной между прямой $y = 4$ и параболой $y = 4x^2$.

$$V = \iint_G (6-x-y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{4x^2}^{4} (6-x-y)dy = \int_{-1}^{1} \left((6-x)y - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{4x^2}^{4} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (8x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 4x + 16)dx = \left(\frac{8}{5}x^5 + x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x \right)\Bigg|_{-1}^{1} = 19\frac{1}{5}.$$

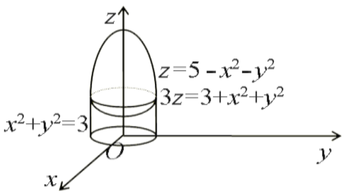

Рисунок 1.17

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 5 - x^2 - y^2$, $3z = 3 + x^2 + y^2$.

Решение. Данное тело ограничено сверху и снизу параболоидами вращения (рисунок 1.17). Объем данного тела

$$V = \iint_G ((5 - x^2 - y^2) - \frac{1}{3}(3 + x^2 + y^2))dxdy = \frac{4}{3}\iint_G (3 - x^2 - y^2)dxdy,$$

где G – проекция тела на плоскость Oxy.

Так как линия пересечения заданных параболоидов определяется системой уравнений $z = 5 - x^2 - y^2$, $3z = 3 + x^2 + y^2$, то исключая z, получим $x^2 + y^2 = 3$ – уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей $x^2 + y^2 = 3$. Данное уравнение $x^2 + y^2 = 3$ будет и уравнением проекции линии пересечения поверхностей на плоскость Oxy. Для упрощения вычислений интеграла преобразуем его к полярным координатам. Полагаем $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$. Область G есть круг

$x^2 + y^2 = 3$, поэтому в полярной системе координат G имеет вид $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le \sqrt{3}$. Получаем

$$V = \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (3-\rho^2)\rho d\rho = \frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = 3\varphi\Big|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$ (вне цилиндра).

Решение. Объем данного тела (рисунок 1.18) равен разности объемов шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 4a^2$ и цилиндрического тела, ограниченного сверху и снизу поверхностью шара $z = \pm\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ с образующей, параллельной оси Oz, и направляющей $x^2 + y^2 = a^2$. Объем шара $V_1 = 4\pi R^3/3 = 32\pi a^3/3$.

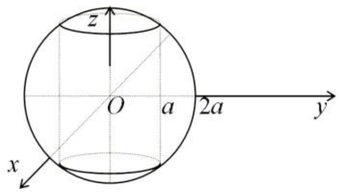

Рисунок 1.18

Найдем объем цилиндрического тела $V_2 = \iint\limits_G \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$, где G – круг $x^2 + y^2 \le a^2$. Перейдем к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$. Область G: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le a$. Учитывая симметрию цилиндра относительно плоскости Oxy, получаем

$$V_2 = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{4a^2 - \rho^2}\,\rho d\rho = -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} (4a^2 - \rho^2)^{3/2}\Big|_0^a d\varphi =$$

$$= a^3\frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3})\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3(8 - 3\sqrt{3}).$$

Объем тела $V = V_1 - V_2 = \dfrac{32}{3}\pi a^3 - \dfrac{4}{3}\pi a^3(8 - 3\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}\pi a^3.$

Пример 4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = xy$, $z = 0$, $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$, $y = x/2$, $y = x$.

Решение. Данное тело ограничено сверху гиперболическим параболоидом $z = xy$, снизу – плоскостью Oxy, с боков – цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющая есть граница области G, определяемая уравнениями: $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$, $y = x/2$, $y = x$. Изобразим область G (рисунок 1.19).

Точки пересечения имеют координаты $A(2;2)$, $B(4;4)$, $C(16;8)$, $D(8;4)$.

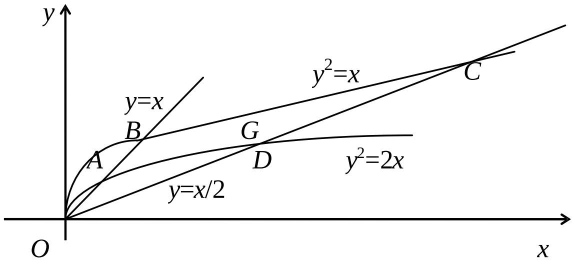

Рисунок 1.19

Объем тела $V=\iint\limits_G xydxdy$. Перейдем к криволинейным координатам u и v: $y^2/x=u$, $y/x=v$. Тогда $x=u/v^2$, $y=u/v$. Область G в плоскости Oxy отобразится в прямоугольник D плоскости O_1uv: $2\le u\le 4$, $\frac{1}{2}\le v\le 1$.

Якобиан $J=\begin{vmatrix} 1/v^2 & -2u/v^3 \\ 1/v & -u/v^2 \end{vmatrix}=-u/v^4+2u/v^4=u/v^4$. Таким образом, $V=\iint\limits_G xydxdy=\iint\limits_G \frac{u}{v^2}\cdot\frac{u}{v}\cdot\frac{u}{v^4}dudv=\iint\limits_G \frac{u^3}{v^7}dudv=\int\limits_{1/2}^{1}dv\int\limits_2^4\frac{u^3}{v^7}du=$

$$=\int\limits_{1/2}^{1}\frac{u^4}{4v^7}\Bigg|_2^4 dv=60\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dv}{v^7}=60\left(-\frac{1}{6v^6}\right)\Bigg|_{1/2}^{1}=-10(1-64)=630.$$

Задачи

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

1.6.1. $z=x^2+y^2$, $x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

1.6.2. $z=1+x+y$, $z=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

1.6.3. $z=a-x$, $y^2=ax$, $z=0$.

1.6.4. $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=12+y-x^2$.

1.6.5. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

1.6.6. $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + z^2 = 9$.

Переходя к полярным координатам, найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

1.6.7. $x + y + z = 3a$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

1.6.8. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

1.6.9. $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

1.6.10. $z = x$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$.

1.6.11. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

1.6.12. $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

С помощью надлежащей замены переменных найти объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

1.6.13. $z = (x + y)^2$, $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 0$, $4x - y = 0$, $z = 0$.

1.6.14. $z = 1/(x + y)^3$, $z = 0$, $x + y = 4$, $x + y = 2$, $x - y = 0$, $3x - y = 0$.

1.6.15. $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $xy = 4$, $xy = 8$, $y = x/2$, $y = 2x$.

1.6.16. $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$.

1.6.17. $z = \sin(xy/\pi)$, $z = 0$, $xy = \pi^2$, $y = x$, $y = ex$, $(x > 0)$.

1.6.18. $z = (x + y)^3$, $z = 0$, $x + y = 3$, $x + y = 2$, $5x - y = 0$, $10x - y = 0$.

1.7 Вычисление площадей поверхностей

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, проекцией ее на плоскость Oxy является область G (рисунок 1.20) и в этой области функция z непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Площадь поверхности выражается формулой

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

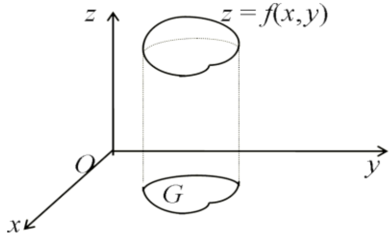

Рисунок 1.20

Аналогично, если поверхность задана уравнением $x = f(y, z)$ и G – ее проекция на плоскость Oyz, то

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz.$$

Если же уравнение поверхности $y = f(x, z)$ и G – ее проекция на плоскость Oxz, то

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz.$$

Пример 1. Вычислить площадь части плоскости $6x + 3y + 2z - 12 = 0$, заключенной в первом октанте.

Решение. Проекцией G данной части плоскости ABC на плоскость Oxy является треугольник OAB (рисунок 1.21). Он ограничен осями $x = 0$, $y = 0$ и прямой $y = 4 - 2x$, получаемой из уравнения плоскости при $z = 0$. Выразим явно z из уравнения плоскости: $z = 6 - 3x - (3/2)y$. Так как z и $\frac{\partial z}{\partial x} = -3, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}$ непрерывны в G, то площадь поверхности

$$S = \iint_G \sqrt{1 + (-3)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}\, dxdy = \frac{7}{2}\iint_G dxdy = \frac{7}{2}\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy = \frac{7}{2}\int_0^2 (4 - 2x)dx =$$

$$= \frac{7}{2}(4x - x^2)\Big|_0^2 = 14.$$

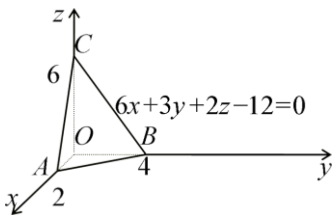

Рисунок 1.21

Пример 2. Вычислить площадь части поверхности $3z = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостями $x = 0$, $z = 3$ $(x \geq 0)$.

Решение. Данная поверхность является частью параболоида вращения при $x \geq 0$, отсеченной плоскостями $z = 3$ и Oyz (рисунок 1.22). Параболоид вращения $3z = x^2 + y^2$ и плоскость $z = 3$ при $x \geq 0$ пересекаются по полуокружности $x^2 + y^2 = 9$, $z = 3$. Проекцией G данной поверхности на плоскость Oxy является полукруг радиусом

$R = 3$ с центром в начале координат. Так как $z = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{3}x$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3}y$, то $S = \iint\limits_G \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}y^2}\,dxdy = \frac{1}{3}\iint\limits_G \sqrt{9 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy.$

Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$. Область G задается неравенствами $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le \rho \le 3$. Имеем

$$S = \frac{1}{3}\iint\limits_G \sqrt{9 + 4\rho^2\cos^2\varphi + 4\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho d\rho d\varphi = \frac{1}{3}\iint\limits_G \sqrt{9 + 4\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^3 \sqrt{9 + 4\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{1}{24}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left.\frac{2(9 + 4\rho^2)^{2/3}}{3}\right|_0^3 d\varphi = \frac{3(5\sqrt{5} - 1)}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi =$$

$$= \frac{3(5\sqrt{5} - 1)}{4}\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3(5\sqrt{5} - 1)\pi}{4}.$$

Пример 3. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + z^2 = az$.

Решение. Поверхность расположена в четырех октантах. Учитывая симметрию, рассмотрим часть сферы в I октанте (рисунок 1.23). Поверхность в I октанте удобнее проектировать на плоскость Oxz. Проекцией G является полукруг, ограниченный окружностью $x^2 + z^2 = az$ и осью Oz. Из уравнения сферы

$$y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}.$$

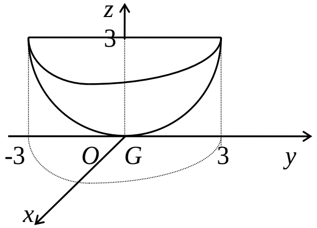

Рисунок 1.22

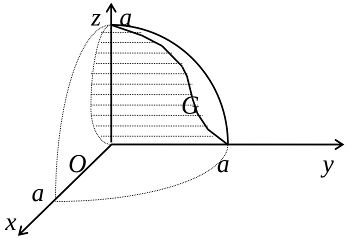

Рисунок 1.23

Благодаря симметрии вся искомая площадь $S = 4a\iint\limits_G \dfrac{dxdz}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}$. Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, $dxdz = \rho d\rho d\varphi$. Область G: $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le \rho \le a\sin\varphi$. Поэтому

$$S = 4a\iint\limits_G \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 4a\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sin\varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = -4a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - \rho^2}\Big|_0^{a\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= -4a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi - 1)d\varphi = -4a^2(\sin\varphi - \varphi)\Big|_0^{\pi/2} = 2a^2(\pi - 2).$$

Задачи

Вычислить площадь части поверхности:

1.7.1. конуса $x^2 + y^2 = z^2$, которая высекается цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$;

1.7.2. параболоида $x^2 + y^2 = 2z$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 3$;

1.7.3. плоскости $x + y + z = 6$, отсекаемой плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 3$;

1.7.4. плоскости $x + y + z = 2a$, которая лежит в I октанте и ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$;

1.7.5. цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, которая содержится между плоскостями $z = 0$ и $z = 2x$;

1.7.6. плоскости $z = x$, которая заключена внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ выше плоскости $z = 0$;

1.7.7. цилиндра $z^2 = 4x$, вырезанной цилиндром $y^2 = 4x$ и плоскостью $x = 1$;

1.7.8. конуса $z^2 = 2xy$, отсекаемого плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$;

1.7.9. сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, которая вырезана поверхностью цилиндра $x^2/4 + y^2 = 1$;

1.7.10. конуса $z^2 = 2xy$, отсеченной плоскостями $x = 3$, $y = 3$ при $x \ge 0$, $y \ge 0$;

1.7.11. конуса $y^2 + z^2 = x^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

1.7.12. Определить площадь части земной поверхности, ограниченной меридианами 0° и β°, экватором и параллелью α°. Рассмотреть частный случай $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

1.8 Приложения двойного интеграла к механике

Пусть материальная пластинка на плоскости Oxy занимает некоторую область G, по которой распределена масса m с плотностью $\gamma(x, y)$, где $\gamma(x, y)$ – непрерывная функция.

Вычисление массы пластинки. Разобьем G на n частей G_i и обозначим через m_i массы этих частей $i = 1, 2, ..., n$. В каждой части произвольно возьмем точку (x_i, y_i). Масса m_i каждой такой части приближенно равна $\gamma(x_i, y_i)\Delta s_i$, где Δs_i – площадь части G_i. Масса всей пластинки $m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i)\Delta S_i$. Для непрерывной в G функции $\gamma(x, y)$ это выражение является интегральной суммой. В пределе при $\lambda \to 0$ получим точное значение массы пластинки, равное двойному интегралу от функции $\gamma(x, y)$ по области G, т. е.

$$m = \iint_G \gamma(x, y)dxdy.$$

Пример 1. Найти массу пластинки, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, если в каждой ее точке поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния до начала координат.

Решение. Поверхностная плотность в точке $M(x, y)$ выражается формулой $\gamma(x, y) = k(x^2 + y^2)$, где k – коэффициент пропорциональности. Исходя из симметрии (рисунок 1.24) и формулы для $\gamma(x, y)$, переходя к полярным координатам, находим массу:

$$m = \iint_G k(x^2 + y^2)dxdy = k\iint_G \rho^2 \rho d\rho d\varphi = 4k \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho =$$

$$= k \int_0^{\pi/4} \rho^4 \Big|_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = k \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{k}{2}\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{k\pi}{8}.$$

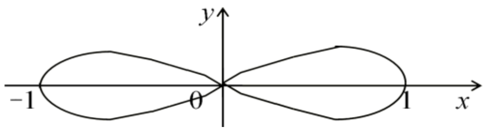

Рисунок 1.24

Вычисление координат центра масс пластинки. Если после разбиения области G на части считать, что масса m_i сосредоточена в точке (x_i,y_i) части G_i , то для координат x и y центра масс системы материальных точек получим выражения

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \gamma(x_i, y_i)\Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i)\Delta S_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \gamma(x_i, y_i)\Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i)\Delta S_i},$$

которые представляют собой приближенные значения координат центра масс пластинки. Для получения точных координат необходимо перейти к пределу при $\lambda \to 0$. При этом интегральные суммы перейдут в соответствующие интегралы. Таким образом, координаты центра масс пластинки определяются по формулам

$$x = \frac{\iint\limits_G x\gamma(x,y)dxdy}{m}, \quad y = \frac{\iint\limits_G y\gamma(x,y)dxdy}{m},$$

где $m = \iint\limits_G \gamma(x,y)dxdy$ – масса пластинки.

Если пластинка однородна, т. е. $\gamma(x, y)$ = const, то координаты центра масс имеют вид

$$x = \frac{\iint\limits_G xdxdy}{S}, \quad y = \frac{\iint\limits_G ydxdy}{S},$$

где $S = \iint\limits_G dxdy$ – площадь пластинки.

Величины $M_y = \iint\limits_G x\gamma(x,y)dxdy$ и $M_x = \iint\limits_G y\gamma(x,y)dxdy$ называются статическими моментами пластинки относительно осей Oy и Ox соответственно.

Пример 2. Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной параболами $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$ (рисунок 1.25).

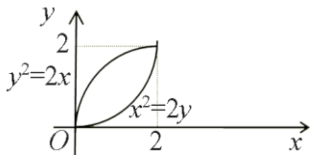

Рисунок 1.25

Решение. Вычислим площадь пластинки:

$$S = \iint_G dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{\sqrt{2x}} dy = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Найдем координаты центра масс:

$$x = \frac{3}{4} \int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{\sqrt{2x}} x dy = \frac{3}{4} \int_0^2 x \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{3}{4} \left(2\sqrt{2} \frac{x^{5/2}}{5} - \frac{x^4}{8} \right) \Bigg|_0^2 = 0{,}9.$$

$$y = \frac{3}{4} \int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{\sqrt{2x}} y dy = \frac{3}{4} \int_0^2 \frac{y^2}{2} \Bigg|_{x^2/2}^{\sqrt{2x}} dx = \frac{3}{4} \int_0^2 \left(x - \frac{x^4}{8} \right) dx = \frac{3}{4} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{40} \right) \Bigg|_0^2 = 0{,}9.$$

Таким образом, $x = y = 0{,}9$.

Вычисление момента инерции пластинки. Момент инерции материальной точки относительно некоторой оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния до этой оси. Момент инерции системы материальных точек равен сумме моментов инерции этих точек. Учитывая это, после разбиения области G на части G_i заменим пластинку системой материальных точек с массами $m_i = \gamma(x_i, y_i)\Delta s_i$ и координатами $(x_i; y_i)$. Момент инерции такой системы относительно оси Oy равен $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \gamma(x_i, y_i)\Delta s_i$ и дает приближенное значение момента инерции пластинки. Это выражение является интегральной суммой для непрерывной функции $x^2\gamma(x, y)$. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получаем для момента инерции пластинки относительно оси Oy формулу

$$I_y = \iint_G x^2 \gamma(x, y) dxdy.$$

Аналогично, момент инерции пластинки относительно оси Ox

$$I_x = \iint_G y^2 \gamma(x, y) dxdy.$$

Рассуждая, как выше, получим формулу момента инерции пластинки относительно начала координат

$$I_0 = \iint_G (x^2 + y^2)\gamma(x, y)dxdy.$$

Пример 3. Найти момент инерции полукруга радиуса a с постоянной плотностью $\gamma(x, y) = 1$ относительно начала координат.

Решение. $I_0 = \iint_G (x^2 + y^2)dxdy.$ Перейдем к полярным координатам. Уравнение окружности в полярных координатах $\rho = a$.

$$I_0 = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} \rho^2 \rho d\rho = \int_0^{\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^a d\varphi = \frac{a^4}{4} \varphi \Bigg|_0^a = \frac{\pi\rho^4}{4}.$$

Задачи

1.8.1. Вычислить массу квадратной пластинки со стороной a, если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата и равна 1 в центре квадрата.

1.8.2. Вычислить массу круглой пластинки радиуса a, если плотность ее обратно пропорциональна расстоянию точки от центра и равна δ на краю пластинки.

1.8.3. Вычислить массу кругового кольца $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ $(a < b)$, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

1.8.4. Найти координаты центра масс круглой пластинки $x^2 + y^2 = 25$, если плотность ее в точке $M(x; y)$ пропорциональна расстоянию точки M от точки $A(5; 0)$.

1.8.5. Найти координаты центра масс части эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ (пластинки), если в точке $(x; y)$ плотность равна xy.

1.8.6. Найти координаты центра масс прямоугольного треугольника, катеты которого 1 и 2, если в каждой его точке плотность пропорциональна квадрату расстояния ее от вершины прямого угла.

Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной следующими линиями:

1.8.7. $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y = 0$.

1.8.8. $x - 3y = 0$, $x + y = 8$, $x = 3$.

1.8.9. $y^2 = 5x$, $x = 5$, $y = 0$ ($y > 0$).

1.8.10. $x + y = 4$, $x - 3y = 0$, $x + 5y - 16 = 0$.

1.8.11. Кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

1.8.12. Одной петлей кривой $\rho = 15\sin 2\varphi$.

Найти моменты инерции относительно осей координат пластинок ($\gamma = 1$), ограниченных следующими линиями:

1.8.13. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$, $x+\frac{y}{2}=1$, $y = 0$.

1.8.14. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$ ($0 \le x \le 2$).

1.8.15. $xy = 4$, $xy = 8$, $x = 2y$, $2x = y$ ($x > 0, y > 0$).

1.8.16. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1.8.17. $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

1.8.18. $x^2 + y^2 = 1$.

1.9 Самостоятельная работа

Для пластинок, ограниченных указанными линиями, найти в задаче 1 координаты центра масс, в задаче 2 момент инерции относительно указанной оси.

Вариант 1

1. $xy = 4$, $y = x$, $x = 4$.
2. $y = x^2 + 1$, $x - y + 3 = 0$ (Oy).

Вариант 2

1. $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = -2$, $x = 2$.
2. $xy = 1$, $x - y = 0$, $x = 2$ (Oy).

Вариант 3

1. $y^2 = 4 + x$, $x + 3y = 0$.
2. $y^3 = x^2$, $y = -x^2 + 2$ (Oy).

Вариант 4

1. $ay = x^2 - 2ax$, $y = x$.
2. $(x^2/4) + y^2 = 1$, $(x/2) + y = 1$ (Oy).

Вариант 5

1. $xy = 1$, $xy = 8$, $y^2 = x$, $y^2 = 8x$.
2. $x - 3y = 0$, $4x - 3y = 0$, $xy = 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ (Oy).

Вариант 6

1. $y^2 = a^2 - ax$, $y = a + x$.
2. $xy = 8$, $x + y = 9$ (Ox).

Вариант 7

1. $xy - 6 = 0$, $3x - 2y = 0$, $x - 6y = 0$.

2. $x^2 + y^2 = 1$, $x + y = 1$ (Ox).

Вариант 8

1. $y^2 = 4x$, $2x - y + 2 = 0$, $y = -2$, $y = 2$.

2. $(x/a) + (y/b) = 1$, $x = 0$, $y = 0$ (Ox).

Вариант 9

1. $x^2 = 4y + 4$, $x^2 = -2y + 4$.

2. $y = x/2$, $x = 4$, $y = 4$ (Ox).

Вариант 10

1. $x + y = 4$, $x - 3y = 0$, $x + y = 8$, $3x - y = 0$.

2. $x = 4 - y^2$, $x = 0$ (Ox).

2 ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Общие понятия

Пусть в некоторой замкнутой ограниченной области V трехмерного пространства задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Разобьем область V на n произвольных областей, не имеющих общих внутренних точек, с объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. В каждой области возьмем произвольную точку $(x_i; y_i; z_i)$ и составим сумму $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$, которая называется интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по области V.

Для непрерывной в области V функции $f(x, y, z)$ существует конечный предел I интегральной суммы σ при стремлении к нулю наибольшего из диаметров λ частичных областей V_i, при этом I не зависит от способа разбиения области V и выбора точек $(x_i; y_i; z_i)$.

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Этот предел называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dv = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz.$$

Физический смысл тройного интеграла. Если $f(x, y, z) > 0$ в области V, то тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$ представляет собой массу тела, занимающего область V и имеющего переменную плотность $\gamma = f(x, y, z)$.

Тройные интегралы являются непосредственным обобщением двойных интегралов на случай трехмерного пространства и обладают аналогичными двойным интегралам свойствами.

2.2 Вычисление тройного интеграла

Рассмотрим область V, ограниченную снизу и сверху поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, а с боковых сторон – цилиндрической поверхностью. Пусть проекция области V на плоскость Oxy есть область G (рисунок 2.1), в которой определены и непрерывны функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$. Предположим, что всякая прямая, параллельная оси Oz, пересекает не более чем в двух точках границу области V (и любой части T области V, отсеченной плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz); и всякая прямая, параллельная одной из координатных осей Ox или Oy, пересекает не более чем в двух точках границу области G (и проекции части T на Oxy).

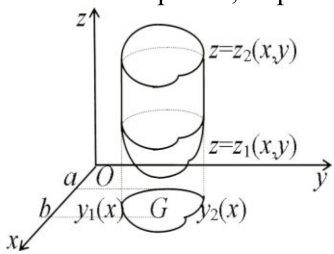

Рисунок 2.1

Если область G задается неравенствами $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные функции, то тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области V вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Порядок интегрирования может быть и другим, т. е. переменные x, y, z в этой формуле можно менять ролями.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,$ где область интегрирования V – прямоугольный параллелепипед, определенный неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.

Решение. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 (x^2+y^2+z^2)dz =$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 \left(x^2z + y^2z + \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 dy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 (3x^2+3y^2+9)dy = \int\limits_0^1 (3x^2y+y^3+9y)\Big|_0^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (6x^2+26)dx = (2x^3+26x)\Big|_0^1 = 28.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z+1)^{-3}dxdydz,$ если область интегрирования ограничена координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z - 1 = 0$.

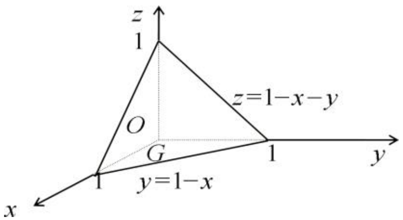

Рисунок 2.2

Решение. Область V есть треугольная пирамида, которая проекция которой на плоскость Oxy есть треугольник G, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1 - x$ (рисунок 2.2).

$$\iiint\limits_V (x+y+z+1)^{-3}dxdydz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z+1)^{-3}dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} \left(-\frac{1}{2}(x+y+z+1)^{-2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left((x+y+1)^{-2}-\frac{1}{4}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(-(x+y+1)^{-1}-\frac{1}{4}y\right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left((x+1)^{-1}-\frac{3}{4}+\frac{x}{4}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| - \frac{3x}{4}+\frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

Задачи

Заменить тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ повторным, если область интегрирования V ограничена поверхностями:

2.2.1. $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2.2.2. $x - 2y + z - 8 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2.2.3. $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 3$.

2.2.4. $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 4$.

Вычислить интегралы:

2.2.5. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 (x^3 + y^2 + z)dz.$

2.2.6. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{2-y} ydz.$

2.2.7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy \int\limits_{1-x}^{2-2x} ydz.$

2.2.8. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyzdz.$

Вычислить тройные интегралы:

2.2.9. $\iiint\limits_V (1-x)^2 \cdot \sqrt{1-y^2}\,dxdydz$, где область V задается неравенствами $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, $-1 \le z \le 1$.

2.2.10. $\iiint\limits_V (2x+3y-z)dxdydz$, где V ограничена плоскостями $z = 0$, $z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

2.2.11. $\iiint\limits_V (7x-5y+3z+1)dxdydz$, где V ограничена плоскостями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$, $z = 4$.

2.2.12. $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dxdydz$, где V ограничена цилиндром $y = \sqrt{x}$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \pi/2$.

2.2.13. $\iiint\limits_V \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}dxdydz$, где V ограничена плоскостями $x = 0$, $x = e - 1$, $y = 0$, $y = e - x - 1$, $z = e$, $x + y - z + e = 0$.

2.2.14. $\iiint\limits_V zdxdydz$, где область V задается неравенствами $0 \le x \le 1/3$, $x \le y \le 2x$, $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

2.3 Замена переменных в тройном интеграле

Если ограниченная замкнутая область V в декартовых координатах x, y, z взаимно однозначно отображается на область W в криволинейных координатах *u, v, w* с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ и якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_W f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw.$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. В цилиндрических координатах положение точки *M* в пространстве определяется тремя числами ρ, φ, *z*, где ρ и φ – полярные координаты проекции точки *M* на плоскость *Oxy* и *z* – аппликата точки *M* (рисунок 2.3).

При переходе от прямоугольных декартовых координат *x*, *y*, *z* к цилиндрическим ρ, φ, *z*, связанным с *x*, *y*, *z* формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ $(0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$, якобиан преобразования $J = \rho$, поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_W f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

Тройной интеграл в сферических координатах. В сферических координатах положение точки *M* в пространстве определяется тремя числами ρ, φ, θ, где ρ – расстояние точки от начала координат, так называемый радиус-вектор точки, φ – угол между проекцией радиус-вектора на плоскость *Oxy* и осью *Ox*, θ – угол между радиус-вектором и осью *Oz* (рисунок 2.4).

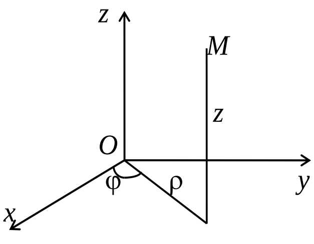

Рисунок 2.3

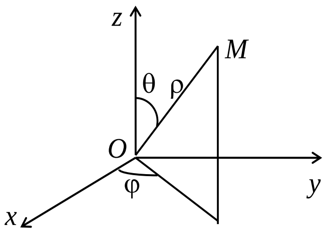

Рисунок 2.4

При переходе от прямоугольных декартовых координат x, y, z к сферическим ρ, φ, θ, связанным с x, y, z формулами $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$ $(0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi)$, якобиан преобразования $J = \rho^2\sin\theta$, поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_W f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Пример 1. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

Решение. Перейдем к цилиндрическим координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Так как область V ограничена снизу параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$, сверху – плоскостью $z = 1$ и проекция V на плоскость Oxy есть круг $x^2 + y^2 \le 1$ (рисунок 2.5), то $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$.

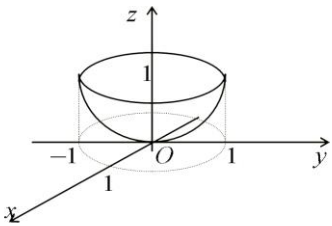

Рисунок 2.5

В декартовых координатах $x^2 + y^2 \le z \le 1$, поэтому $\rho^2 \le z \le 1$ в цилиндрических координатах. Таким образом,

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz = \iiint\limits_W \rho^2\cdot\rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1 \rho^3 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho^3 z\Big|_{\rho^2}^1 d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 (\rho^3 - \rho^5)d\rho = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{12}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ если

а) область V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{3} = 1$;

б) область V – шар $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.

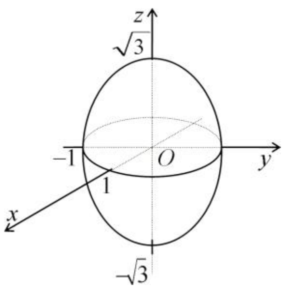

Рисунок 2.6

Решение. а) Область V есть эллипсоид вращения и проекция V на плоскость Oxy есть круг $x^2 + y^2 \le 1$ (рисунок 2.6). Перейдем к цилиндрическим координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Тогда $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$.

Так как $-\sqrt{3(1-x^2-y^2)} \le z \le \sqrt{3(1-x^2-y^2)}$ в декартовых координатах, то в цилиндрических координатах $-\sqrt{3(1-\rho^2)} \le z \le$ $\le \sqrt{3(1-\rho^2)}$. Подынтегральная функция $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\cos^2\varphi +$ $+ \rho^2\sin^2\varphi + z^2 = \rho^2 + z^2$. Получаем

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \iiint\limits_W (\rho^2+z^2)\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_{-\sqrt{3(1-\rho^2)}}^{\sqrt{3(1-\rho^2)}} (\rho^2+z^2)\rho dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho^3 z + \rho\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{3(1-\rho^2)}}^{\sqrt{3(1-\rho^2)}} d\rho = 2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2(1-\rho^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_1^0 d\varphi =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2(1-\rho^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_1^0 d\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}.$$

б) Так как область V – шар (рисунок 2.7), то в интеграле лучше перейти к сферическим координатам: $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$. Тогда в сферических координатах шар задается неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \rho \le a$. Подынтегральная функция $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta = \rho^2(\sin^2\theta(\cos^2\varphi +$ $+ \sin^2\varphi) + \cos^2\theta) = \rho^2$. Значит,

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \iiint\limits_W \rho^2\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{a} \rho^4 \sin\theta d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{\rho^5}{5}\sin\theta\Bigg|_0^a d\theta = \frac{a^5}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{a^5}{5}\int\limits_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} d\varphi = \frac{2a^5}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 0{,}8\pi a^5.$$

Пример 3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Решение. Область V есть шар $x^2 + y^2 + (z - 0{,}5)^2 \le 0{,}25$ (рисунок 2.8). Перейдем к сферическим координатам: $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$.

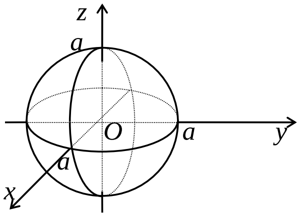

Рисунок 2.7

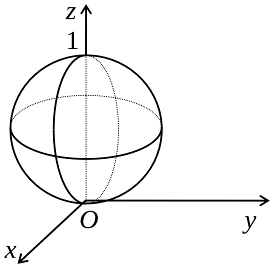

Рисунок 2.8

Тогда шар будет задаваться неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le \cos\theta$. Отсюда

$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} dxdydz = \iiint\limits_W \rho\cdot\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} \rho^3 \sin\theta d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4} \sin\theta \Bigg|_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4\theta d(\cos\theta) =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi = \frac{1}{20}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 0{,}1\pi.$$

Пример 4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ $(0 < a < b)$, $z = cx$, $z = dx$ $(0 < c < d)$, $z = h$ $(h > 0)$.

Решение. Введем новые координаты u, v, w по формулам: $u = \dfrac{z}{y^2}$, $v = \dfrac{z}{x}$, $w = z$. Тогда $x = \dfrac{w}{v}$, $y = \left(\dfrac{w}{u}\right)^{\frac{1}{2}}$, $z = w$. Область V

перейдет в область W, определяемую неравенствами: $a \le u \le b$, $c \le v \le d$, $0 \le w \le h$. Находим якобиан преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & -wv^{-2} & v^{-1} \\ -\frac{1}{2}w^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{3}{2}} & 0 & \frac{1}{2}(uw)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}w^{\frac{3}{2}}v^{-2}u^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz = \frac{1}{2}\iiint\limits_W \frac{w^2}{v^2} w^{\frac{3}{2}} v^{-2} u^{-\frac{3}{2}} dudvdw = \frac{1}{2}\int\limits_a^b du \int\limits_c^d dv \int\limits_0^h w^{\frac{7}{2}} v^{-4} u^{-\frac{3}{2}} dw =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^b du \int\limits_c^d u^{-\frac{3}{2}} v^{-4} \cdot \frac{2}{9} w^{\frac{9}{2}} \Bigg|_0^h dv = \frac{h^4\sqrt{h}}{9}\int\limits_a^b du \int\limits_c^d u^{-\frac{3}{2}} v^{-4} dv = \frac{h^4\sqrt{h}}{9}\int\limits_a^b u^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{v^{-3}}{(-3)}\Bigg|_c^d du =$$

$$= \frac{h^4\sqrt{h}}{27}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right)\int\limits_a^b u^{-\frac{3}{2}} du = \frac{h^4\sqrt{h}}{27}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right) u^{-\frac{1}{2}}(-2)\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{2h^4\sqrt{h}}{27}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

Задачи

Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz$, где $f(x, y, z)$ – заданная ниже функция, область V ограничена указанными поверхностями:

2.3.1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; V: $x^2 + y^2 = b^2$, $z = 0$, $z = a$.

2.3.2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; V: $y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$, $x = 3$.

2.3.3. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^4$; V: $z = x^2 + y^2$, $z = 3$.

2.3.4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; V: $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

2.3.5. $f(x, y, z) = z$; V: $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $z = 4$.

2.3.6. $f(x, y, z) = xy/\sqrt{z}$; V: $4z^2 = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$ (в I октанте).

Перейдя к сферическим координатам, вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, где $f(x, y, z)$ – заданная ниже функция, область V ограничена указанными поверхностями:

2.3.7. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}$; V: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2.3.8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; V: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$ $(z > 0)$.

2.3.9. $f(x, y, z) = 1/(16 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2})^{1/2}$; V: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2.3.10. $f(x, y, z) = (1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2})^{1/2}$; V: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2.3.11. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^3$; V: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ $(z > 0)$.

2.3.12. $f(x, y, z) = 1$; V: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (в I октанте).

Путем надлежащей замены переменных вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, где $f(x, y, z)$ – заданная ниже функция, область V ограничена указанными поверхностями:

2.3.13. $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{z}$; V: $y^2 = 4x$, $y^2 = 5x$, $x^2 = y$, $x^2 = 3y$, $y^2 = z$, $y^2 = 2z$.

2.3.14. $f(x, y, z) = xyz$; V: $z = x^2 + y^2$, $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$, $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 2x$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

2.4 Самостоятельная работа

В задаче 1 заменить тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ повторным, если область V ограничена указанными поверхностями. В задаче 2 вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, где $f(x, y, z)$ – заданная ниже функция, область V определяется указанными неравенствами. В задаче 3 перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ к цилиндрическим или сферическим координатам и расставить пределы интегрирования, если область V ограничена указанными поверхностями.

Вариант 1

1. $V: x + y - z + 1 = 0,\ \ x = 0,$
$y = 0,\ \ z = 0.$

2. $f(x, y, z) = xyz;\ \ V: x^2 + y^2 + z^2 \le 1,$
$x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0.$

3. $V: x^2 + y^2 = 1,\ \ z = 0,\ \ z = 1,$
$y = x,\ \ y = x\sqrt{3}.$

Вариант 2

1. $V: -2x + y + z - 4 = 0,\ \ x = 0,$
$y = 0,\ \ z = 0.$

2. $f(x, y, z) = 6x + 8y + 4z + 5;$
$V: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1,\ \ 0 \le z \le 1.$

3. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ z = 0\ (z > 0).$

Вариант 3

1. $V: x^2 + y^2 = 4z,\ \ z = 5.$

2. $f(x, y, z) = 2x + 3y - z;$
$V: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1 - x,$
$0 \le z \le 3.$

3. $V: 4z = x^2 + y^2,\ \ z = 4.$

Вариант 4

1. $V: -x + y - 5z + 1 = 0,\ \ x = 0,$
$y = 0,\ \ z = 0.$

2. $f(x, y, z) = 1;\ \ \ V: 0 \le x \le 2,$
$0 \le y \le 3 - 3\dfrac{x}{2},\ 0 \le z \le 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3}.$

3. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ \ z = 0\ (z < 0).$

Вариант 5

1. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ \ x = 0,\ \ y = 0,$
$z = 0\ (x > 0,\ \ y > 0,\ \ z > 0).$

2. $f(x, y, z) = x;\ \ \ V: 0 \le x \le 3,$
$1 \le y \le 3,\ \ 0 \le z \le \dfrac{3 - x}{2}.$

3. $V: z = \dfrac{x^2 + y^2}{3},\ \ z = 3.$

Вариант 6

1. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$

2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$
$V: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2,\ \ 0 \le z \le 3.$

3. $V: x^2 + y^2 = 2x,\ \ z = 0,\ \ z = x^2 + y^2.$

Вариант 7

1. $V: x - 3y - z + 9 = 0,\ \ x = 0,$
$y = 0,\ \ z = 0.$

2. $f(x, y, z) = y;\ \ V: 0 \le y \le 1,$
$-\sqrt{2y} \le x \le \sqrt{2y},$
$1 - y \le z \le 2(1 - y).$

3. $V: x^2 + y^2 = 4,\ \ x^2 + y^2 = 1,\ \ z = 0,$
$y + 4z = 2.$

Вариант 8

1. $V: 3x + 4y + z - 24 = 0,\ \ x = 0,$
$y = 0,\ \ z = 0.$

2. $f(x, y, z) = x + y + z;\ \ V: 0 \le x \le 2,$
$0 \le y \le 2,\ \ 0 \le z \le 2.$

3. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ \ x = 0,\ \ y = 0,$
$z = 0\ (x > 0,\ \ y > 0,\ \ z > 0).$

Вариант 9

1. $V: x^2 + z^2 = y^2,\ y = 4.$

2. $f(x, y, z) = x;\ V: 1 \le x \le 3,$

$0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le \dfrac{3-x}{2}.$

3. $V: x^2 + y^2 = 2x,\ y = 0,\ z = 0,$
$z = 5.$

Вариант 10

1. $V: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1,\ x = 0,$
$y = 0,\ z = 0\ (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$

2. $f(x, y, z) = z;\ V: 0 \le x \le 6,$

$0 \le y \le 4 - 2\dfrac{x}{3},\ 0 \le z \le \dfrac{y^2}{2}.$

3. $V: x^2 + y^2 = 16,\ z = 0,\ z = 3,$
$y = x,\ \sqrt{3}\,y = x.$

2.5 Вычисление величин посредством тройного интеграла

Следующие формулы выводятся аналогично соответствующим формулам в случае двойных интегралов.

Пусть некоторое тело занимает область V и $\gamma = \gamma(x, y, z)$ – объемная плотность распределения массы в точке (x,y,z) тела, представляющая собой непрерывную функцию.

Объем тела выражается формулой $V = \iiint\limits_V dxdydz.$

В цилиндрических координатах объем тела $V = \iiint\limits_V \rho d\rho d\varphi dz,$ в сферических координатах объем тела $V = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$

Масса тела определяется по формуле $m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dxdydz.$

Координаты центра масс тела вычисляются по формулам

$$x = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)dxdydz}{m},\quad y = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)dxdydz}{m},\quad z = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)dxdydz}{m},$$

где m – масса тела.

Величины

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)dxdydz,\quad M_{xz} = \iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)dxdydz$$

называются статическими моментами тела относительно координатных плоскостей *Oyz*, *Oxz*, *Oxy* соответственно.

Если рассматриваемое тело однородно, т. е. $\gamma(x, y, z) = \text{const}$, то выражения для координат центра масс упрощаются:

$$x = \frac{\iiint\limits_V x dxdydz}{V}, \quad y = \frac{\iiint\limits_V y dxdydz}{V}, \quad z = \frac{\iiint\limits_V z dxdydz}{V},$$

где V – объем тела.

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей *Oxy*, *Oxz*, *Oyz* вычисляются соответственно по формулам

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\gamma(x, y, z)dxdydz, \quad I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

Моменты инерции тела относительно координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz* определяются по формулам

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz, \quad I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

Момент инерции тела относительно начала координат выражается формулой

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x + y + z - 4 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 3$.

Р е ш е н и е. Тело представляет собой пятигранник V (рисунок 2.9), проекция V на плоскость *Oxy* есть четырехугольник *OABC*, задаваемый неравенствами $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4 - x$. Сверху тело ограничено плоскостью $z = 4 - x - y$, снизу – $z = 0$. Тогда объем

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{4-x} dy \int\limits_0^{4-x-y} dz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{4-x} (4 - x - y)dy =$$

$$= \int\limits_0^3 \left((4 - x)y - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{4-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 (4 - x)^2 dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(4 - x)^3}{3}\Bigg|_0^3 = 10{,}5.$$

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$ (внутри конуса).

Решение. Проекцией тела на плоскость Oxy есть круг $x^2 + y^2 \le 1$ (рисунок 2.10). Граница $x^2 + y^2 = 1$ круга получается исключением z из уравнений сферы и конуса. Перейдем к цилиндрическим координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Тогда $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$. Верхняя часть тела ограничена полусферой $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + 1$, нижняя часть – частью конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому в цилиндрических координатах $\rho \le z \le \sqrt{1-\rho^2} + 1$. Таким образом, объем

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_W \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_0^{\sqrt{1-\rho^2}+1} \rho dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (\sqrt{1-\rho^2} + 1 - \rho)\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \pi.$$

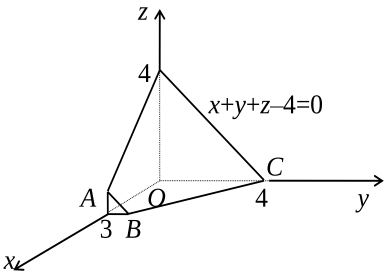

Рисунок 2.9

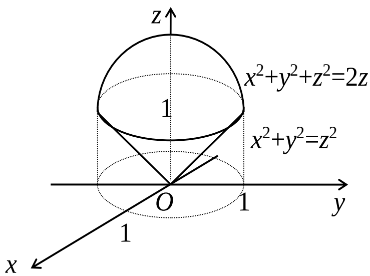

Рисунок 2.10

Пример 3. Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $y^2 = 2x$ и плоскостями $x + z = 1$, $2x + z = 2$, если в каждой его точке плотность численно равна абсциссе этой точки.

Решение. В точке $(x; y; z)$ тела по условию плотность $\gamma(x, y, z) = x$. Тогда масса тела $m = \iiint\limits_V x dxdydz$, где V – область, занимаемая телом. Так как тело определяется неравенствами $0 \le x \le 1$, $-\sqrt{2x} \le y \le \sqrt{2x}$, $1 - x \le z \le 2(1 - x)$, то масса

$$m=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dy\int_{1-x}^{2(1-x)} xdz=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} x(1-x)dy=\int_0^1 (x-x^2)\cdot 2\sqrt{2x}dx=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\sqrt{2}}{35}.$$

Пример 4. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного плоскостями $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $z = 0$, $y + 2z = 3$.

Решение. Данное тело есть призма (рисунок 2.11), которая задается неравенствами $1\le x\le 3$, $0\le y\le 3$, $0\le z\le \frac{3-y}{2}$. Найдем объем тела

$$V=\int_1^3 dx\int_0^3 dy\int_0^{\frac{3-y}{2}} dz=\int_1^3 dx\int_0^3 \frac{3-y}{2}dy=\frac{1}{2}\int_1^3\left(3y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 dx=\frac{9}{4}\int_1^3 dx=\frac{9}{2}.$$

$$x=\frac{2}{9}\iiint_V xdxdydz=\frac{2}{9}\int_1^3 dx\int_0^3 dy\int_0^{\frac{3-y}{2}} xdz=\frac{2}{9}\int_1^3 dx\int_0^3 x\frac{3-y}{2}dy=$$

$$=\frac{1}{9}\int_1^3 x\left(3y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 dx=\frac{1}{2}\int_1^3 xdx=\frac{x^2}{4}\Bigg|_1^3=2.$$

$$y=\frac{2}{9}\iiint_V ydxdydz=\frac{2}{9}\int_1^3 dx\int_0^3 dy\int_0^{\frac{3-y}{2}} ydz=\frac{2}{9}\int_1^3 dx\int_0^3 y\frac{3-y}{2}dy=$$

$$=\frac{1}{9}\int_1^3\left(\frac{3y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 dx=\frac{1}{2}\int_1^3 dx=\frac{x}{2}\Bigg|_1^3=1.$$

$$z=\frac{2}{9}\iiint_V zdxdydz=\frac{2}{9}\int_1^3 dx\int_0^3 dy\int_0^{\frac{3-y}{2}} zdz=\frac{2}{9}\int_1^3 dx\int_0^3 \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{3-y}{2}} dy=$$

$$=\frac{1}{9}\int_1^3 dx\int_0^3 \frac{(3-y)^2}{4}dy=-\frac{1}{36}\int_1^3 \frac{(3-y)^3}{3}\Bigg|_0^3 dx=\frac{1}{4}\int_1^3 dx=\frac{x}{4}\Bigg|_1^3=0{,}5.$$

Итак, координаты центра масс (2; 1; 0,5).

Пример 5. Найти координаты центра масс нижней половины однородного шара V радиуса a с центром в начале координат.

Решение. Данное тело (рисунок 2.12) ограничено поверхностями $z = 0$ и $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. В силу симметрии полушара координаты центра масс $x = y = 0$. Для нахождения координаты z воспользуемся формулой объема полушара $V = \dfrac{2\pi a^3}{3}$ и перейдем к сферическим координатам: $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$. Тогда неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, $0 \le \rho \le a$. Найдем сначала

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\,dxdydz = \iiint\limits_W \rho\cos\theta\,\rho^2\sin\theta\,d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho^3\cos\theta\sin\theta\,d\rho =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi = -\frac{a^4}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{a^4\pi}{4}.$$

Итак, $z = \dfrac{M_{xy}}{V} = -\dfrac{a^4\pi}{4} : \dfrac{2\pi a^3}{3} = -\dfrac{3a}{8}$. Координаты центра масс $\left(0; 0; -\dfrac{3a}{8}\right)$.

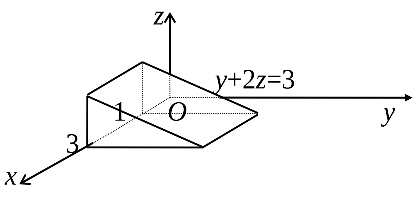

Рисунок 2.11

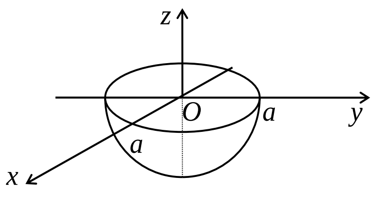

Рисунок 2.12

Пример 6. Найти момент инерции относительно оси Oy однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = 4$, $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y + z = 2$.

Решение. Данное тело V есть полый усеченный цилиндр (рисунок 2.13). Для нахождения момента инерции тела M_y введем цилиндрические координаты. Так как образующая цилиндра параллельна оси Oy, имеем $x = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi,\ y = y$. Тогда в цилиндрических координатах тело определяется неравенствами: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $1 \le \rho \le 2,\ 0 \le y \le 2 - \rho\sin\varphi$. Ввиду однородности тела обозначим его плотность $\gamma(x,y,z) = c$. Тогда

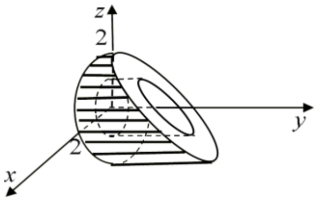

Рисунок 2.13

$$M_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)c\,dxdydz = c\iiint\limits_W \rho^2\rho\,d\rho d\varphi dy = c\int_0^{2\pi} d\varphi\int_1^2 d\rho\int_0^{2-\rho\sin\varphi}\rho^3 dy =$$

$$= c\int_0^{2\pi} d\varphi\int_1^2 \rho^3 y\Big|_0^{2-\rho\sin\varphi} d\rho = c\int_0^{2\pi} d\varphi\int_1^2 (2\rho^3-\rho^4\sin\varphi)d\rho = c\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^5}{5}\sin\varphi\right)\Bigg|_1^2 d\varphi =$$

$$= c\int_0^{2\pi}\left(\frac{15}{2}-\frac{31}{5}\sin\varphi\right)d\varphi = c\left(\frac{15}{2}\varphi+\frac{31}{5}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 15\pi c.$$

Задачи

В задачах 2.5.1–2.5.6 вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

2.5.1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 3z\ (z \ge 0)$.

2.5.2. $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = x^2 + y^2$.

2.5.3. $x^2 = y,\ x^2 = 4 - 3y,\ z = 0,\ z = 9$.

2.5.4. $x^2 + y^2 = 3x,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2.5.5. $6x + 4y + 3z = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

2.5.6. $y = 1 - x^2,\ y = -\sqrt{1-x^2},\ z = 0,\ z = 6$.

2.5.7. Показать, что поверхность конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ делит объем шара $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ в отношении 3:1.

2.5.8. Найти массу куба $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2$, если в каждой его точке объемная плотность численно равна сумме ее расстояний до координатных плоскостей.

2.5.9. Найти массу пирамиды, образованной плоскостями $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, если объемная плотность в каждой ее точке равна аппликате z этой точки.

Найти массу тела, ограниченного указанными поверхностями, при заданной плотности $\gamma(x, y, z)$:

2.5.10. $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 2$, $\gamma(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

2.5.11. $x^2 + y^2 = z$, $z = 4$, $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$.

2.5.12. $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$, $\gamma(x, y, z) = 2(x^2 + y^2)$.

2.5.13. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2.5.14. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ (общая часть шаров), $\gamma(x, y, z) = 3z$.

2.5.15. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $\gamma(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Найти координаты центра масс тела, ограниченного указанными поверхностями, при заданной плотности $\gamma(x, y, z)$:

2.5.16. $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z^2 = 6x$, $\gamma(x, y, z) = 2z$.

2.5.17. $x + y + z = 15$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\gamma(x, y, z) = x + y + z$.

2.5.18. $x^2 + y^2 = 4z$, $z = 0$, $z = 4$, $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$.

2.5.19. $z = (25 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $z = 0$, $\gamma(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

2.5.20. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (в I октанте), $\gamma(x, y, z) = \mathrm{const}$.

2.5.21. $a^2 - x^2 - y^2 = az$, $z = 0$, $\gamma(x, y, z) = \mathrm{const}$.

Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела ($\gamma(x, y, z) = 1$), ограниченного следующими поверхностями:

2.5.22. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

2.5.23. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$.

2.5.24. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = z^2$, $z = 1$.

2.5.25. $2x + 3y = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4$.

2.5.26. $y^2 + z^2 = 6x$, $x = 6$.

2.5.27. $y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$, $x = 6$.

Определить моменты инерции относительно оси Oz однородного тела ($\gamma(x, y, z) = 1$), ограниченного следующими поверхностями:

2.5.28. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z > 0)$.

2.5.29. $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$.

2.5.30. $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$, $z = 3$.

Определить момент инерции относительно начала координат однородного тела ($\gamma(x, y, z) = 1$), ограниченного следующими поверхностями:

2.5.31. $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2.5.32. $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$.

2.5.33. $z^2 = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

2.6 Самостоятельная работа

В задаче 1 найти с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указаными поверхностями; сделать чертеж данного тела. В задаче 2 найти координаты центра масс тела, ограниченного указанными поверхностями, при заданной плотности $\gamma(x, y, z)$.

Вариант 1

1. $z = 0$, $z = y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

2. $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = c$ $(c > 0)$, $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Вариант 2

1. $z = 0$, $z = x^2$, $x + y = 1$, $y = 0$.

2. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ $(z > 0)$, $\gamma(x, y, z) = 1$.

Вариант 3

1. $y^2 = x$, $z = 0$, $z = 1 - x$.

2. $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 4$, $\gamma(x, y, z) = \text{const}$.

Вариант 4

1. $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = z$.

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $3z^2 = x^2 + y^2$ $(z > 0)$ (внутри конуса), $\gamma(x, y, z) = \text{const}$.

Вариант 5

1. $x = 0$, $x + y = 4$, $z = 0$, $z = 4\sqrt{y}$.

2. $z = 0$, $az = a^2 - x^2 - y^2$, $\gamma(x, y, z) = \text{const}$.

Вариант 6

1. $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $x + z = 2$.

2. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, $\gamma(x, y, z) = 1$.

Вариант 7

1. $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $z = 0$,
$z = x^2 + y^2$.

2. $z = 0$, $z = c$, $x^2 + y^2 = cz$,
$\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$.

Вариант 8

1. $y = \sqrt{1-x^2}$, $z = 0$, $z = y$.

2. $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $y = 2$,
$\gamma(x, y, z) = x^2 + z^2$.

Вариант 9

1. $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 4 - x - y$.

2. $z = c$, $x^2 = z^2 - y^2$, $\gamma(x, y, z) = 2$.

Вариант 10

1. $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$, $z = 0$,
$z = 1 - y^2$.

2. $z = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(z > 0)$,
$\gamma(x, y, z) = \text{const}$.

3 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1 Криволинейные интегралы первого рода (Кри-1)

Рассмотрим функцию $u = f(x; y; z)$, которая определена на кусочно-гладкой пространственной кривой AB. Разобьем дугу AB произвольно на n элементарных дуг точками $A = A_0$, A_1, A_2, …, $A_n = B$ (рисунок 3.1). Обозначим через Δl_i длину дуги у дуги $A_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. На каждой дуге $A_{i-1}A_i$ выберем произвольно одну точку $P_i(x_i; y_i; z_i)$ и составим сумму $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta l_i$, которая называется интегральной суммой для функции $f(x; y; z)$ по длине дуги кривой AB.

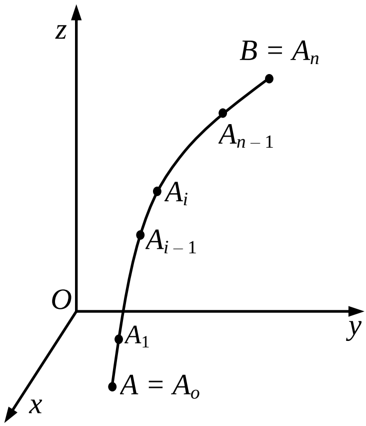

Рисунок 3.1

Если функция $f(x; y; z)$ непрерывна в точках дуги AB, то существует предел интегральной суммы σ при $\max\Delta l_i \to 0$, не зависящий от способа разбиения дуги AB на элементарные и выбора точек P_i. Он называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x;y;z)$ по кривой AB и обозначается $\int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl,$ т. е.

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl = \lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta l_i.$$

Основные свойства Кри-1.

1. $\int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl = \int\limits_{BA} f(x;y;z)\,dl$, т. е. Кри-1 не зависит от пути интегрирования.

2. $\int\limits_{AB} cf(x;y;z)\,dl = c\int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl$, где $c=\text{const}$.

3. $\int\limits_{AB}(f(x;y;z)\pm g(x;y;z))\,dl = \int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl + \int\limits_{AB} g(x;y;z)\,dl.$

4. $\int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl = \int\limits_{AC} f(x;y;z)\,dl + \int\limits_{CB} f(x;y;z)\,dl$, где AB есть объединение дуг AC и CB.

5. Если $m\le f(x;y;z)\le M,$ то $mL\le \int\limits_{AC} f(x;y;z)\,dl \le ML$, где L – длина дуги AB.

6. Для непрерывной на кривой AB функции $f(x;y;z)$ выполняется равенство $\int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl = f(P)L,$ где P – некоторая точка на AB (теорема о среднем).

3.2 Вычисление Кри-1

1. Если функция $f(x;y;z)$ задана параметрически уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_1\le t\le t_2$, то Кри-1 вычисляется через определенный интеграл по следующей формуле:

$$\int\limits_{L} f(x;y;z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

2. Аналогично определяется и вычисляется Кри-1 от функции двух переменных $f(x;y)$ по плоской кривой. Если кривая L задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Если кривая L задана в явном виде формулой $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx.$$

Если кривая L задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi.$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} \frac{6z(4y+1)}{x^2}dl,$

где AB задается параметрически $x = t,\ y = \frac{t^2}{2},\ z = \frac{t^3}{3},\ 1 \le t \le 2.$

Решение. $\int\limits_{AB} \frac{6z(4y+1)}{x^2}dl = \int\limits_1^2 \frac{6\frac{t^3}{3}\left(4\frac{t^2}{2}+1\right)}{t^2}\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt =$

$$= \int\limits_1^2 (4t^3 + 2t)\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt = \int\limits_1^2 (t^4+t^2+1)^{\frac{1}{2}} d(t^4+t^2+1) =$$

$$= \left.\frac{2(t^4+t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_1^2 = \frac{2}{3}(21^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}(7^{\frac{3}{2}} - 1) = 2\sqrt{3}(7\sqrt{7} - 1).$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{MN}(3y - x)dl,$ где MN – отрезок прямой от $M(3;4)$ до $N(6;8)$.

Решение. Прямая MN задается уравнением $y = \frac{4}{3}x$. Так как $y' = \frac{4}{3}$, получаем $\int\limits_{MN}(3y - x)dl = \int\limits_{3}^{6}\left(3\cdot\frac{4}{3}x - x\right)\sqrt{1+\frac{16}{9}}dx =$

$$= \int\limits_{3}^{6} 3x\cdot\frac{5}{3}dx = 5\frac{x^2}{2}\Bigg|_3^6 = \frac{5}{2}(36-9) = 67{,}5.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{L}(2x - y)dl,$ где L – дуга лемнискаты Бернулли $\rho = \sqrt{2a\cos 2\varphi}$ (рисунок 3.2), расположенная в I и IV координатных углах.

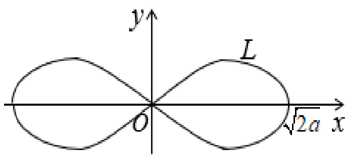

Рисунок 3.2

Решение. Так как $x = \rho\cos\varphi = \sqrt{2a\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi = \sqrt{2a\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi$, $\rho' = \sqrt{2a}\,\frac{(-\sin 2\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ и $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, то $\int\limits_{L}(2x - y)dl =$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sqrt{2a\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi - \sqrt{2a\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi)\sqrt{2a\cos 2\varphi + \frac{2a\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}d\varphi =$$

$$= 2a\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\varphi}(2\cos\varphi - \sin\varphi)\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2a(2\sin\varphi + \cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 4a\sqrt{2}.$$

Задачи

Вычислить криволинейные интегралы:

3.2.1. $\int\limits_{AB}\frac{ydl}{\sqrt{x}}$, где AB – дуга полукубической параболы $y^2 = \frac{4}{9}x^3$, $3 \le x \le 8$.

3.2.2. $\int\limits_{AB} y\,dl,$ где AB – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $(0;\,0)$ до точки (2; 2).

3.2.3. $\int\limits_{AB} y^2 dl,$ где AB – часть окружности $x=\cos t,\ \ y=\sin t,$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

3.2.4. $\int\limits_{L} \dfrac{dl}{x^2+y^2+z^2},$ где L задается параметрически $x=\cos t,$ $y=\sin t,\ \ z=t,\ 0\le t\le 2\pi.$

3.2.5. $\int\limits_{L} (x^3-y^3)dl,$ где L – часть окружности $\rho=2,\ \ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}.$

3.2.6. $\int\limits_{L} (x+y)dl,$ где L – дуга лемнискаты Бернулли $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\pi\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}.$

3.3 Криволинейные интегралы второго рода (Кри-2)

Пусть $\vec{F}(x;\,y;\,z) = P(x;\,y;\,z)\,\vec{i} + Q(x;\,y;\,z)\,\vec{j} + R(x;\,y;\,z)\,\vec{k}$ – непрерывная вектор-функция на пространственной кривой AB. Разобьем дугу AB на n частей точками $A = A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n = B$. Пусть $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j} + \Delta z_i\vec{k}$. Выберем на каждой элементарной дуге $A_{i-1}A_i$ произвольную точку M_i. Выражение $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n}(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i$ называется интегральной суммой для вектор-функции $\vec{F}(x;y;z)$. Если интегральная сумма σ имеет предел при $\lambda\to 0$, то он называется криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции $\vec{F}(x;y;z)$ по кривой AB.

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(P(M_i)\Delta x_i +$$
$$+Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i).$$

Основные свойства Кри-2. При изменении пути интегрирования Кри-2 меняет знак на противоположный, т. е.

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz=-\int\limits_{BA} P(x;y;z)dx+$$
$$+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz.$$

Остальные свойства Кри-2 аналогичны свойствам Кри-1.

3.4 Вычисление Кри-2

Пространственный случай. Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывные вместе со своими производными функции, t_1 – значение параметра t в точке A, t_2 – значение параметра t в точке B, то Кри-2 выражается через определенный интеграл по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz=\int\limits_{t_1}^{t_2}(P(x(t);y(t);z(t))x'(t)+$$
$$+Q(x(t);y(t);z(t))y'(t)+R(x(t);y(t);z(t))z'(t))dt.$$

Плоский случай. Если $\vec{F}(x;y) = P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j}$ и кривая AB задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, то формула для вычисления Кри-2 имеет вид

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int\limits_{t_1}^{t_2}(P(x(t);y(t))x'(t)+Q(x(t);y(t))y'(t))dt.$$

Если кривая AB задана в явном виде уравнением $y=\varphi(x)$, где a – значение x в точке A, b – значение x в точке B, то Кри-2 выражается через определенный интеграл по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int\limits_{a}^{b}(P(x;\varphi(x))+Q(x;\varphi(x))\varphi'(x))dx.$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{AB} yzdx+xzdy+xydz$ по дуге AB винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Так как $x' = -a\sin t,\ y' = a\cos t,\ z' = k$, имеем

$$\int\limits_{AB} yzdx + xzdy + xydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (a\sin t \cdot kt(-a\sin t) + a\cos t \cdot kta\cos t + a\cos t \times$$

$$\times a\sin t \cdot k)dt = ka^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (t\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)dt = ka^2\,\frac{t}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{k\pi a^2}{8}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L (-y^2 x)dx + x^2 ydy$, если кривая L задана параметрически $x = \sqrt{\cos 2t},\ y = \sqrt{\sin 2t},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{6}$.

Решение. Имеем $x' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}}(-2\sin 2t) = -\frac{\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin 2t}}2\cos 2t = \frac{\cos 2t}{\sqrt{\sin 2t}}$. Поэтому $\int\limits_L (-y^2 x)dx + x^2 ydy =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(-\sin 2t\sqrt{\cos 2t}\,\frac{(-\sin 2t)}{\sqrt{\cos 2t}} + \cos 2t\sqrt{\sin 2t}\,\frac{\cos 2t}{\sqrt{\sin 2t}} \right) dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$ если AB – отрезок прямой от $A(3;\,6)$ до $B(1;\,2)$.

Решение. Составим уравнение прямой AB: $\frac{y-2}{6-2} = \frac{x-1}{3-1}$ или $y - 2 = 2x - 2$, т. е. $y = 2x$. Поскольку $y' = 2$, значение x в точке A равно 3, значение x в точке B равно 1, имеем $\int\limits_{AB} \frac{y}{x^2+y^2}dx +$

$$+ \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int\limits_3^1 \left(\frac{2x}{x^2+4x^2} + \frac{x}{x^2+4x^2}\cdot 2 \right) dx = \frac{4}{5}\int\limits_3^1 \frac{dx}{x} = \frac{4}{5}\ln|x|\Big|_3^1 = -\frac{4}{5}\ln 3.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_L ydx+2xdy,$ если L – контур ромба со сторонами $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\pm1,\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\pm1$, пробегаемый против часовой стрелки.

Решение. Изобразим ромб (рисунок 3.3).

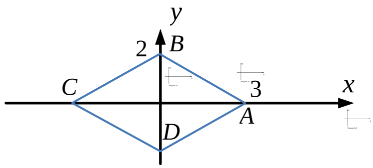

Рисунок 3.3

Уравнение AB: $y=-\frac{2}{3}x+2$,

$y'=-\frac{2}{3}$, 3 – значение x в точке A,

0 – значение x для B.

BC: $y=\frac{2}{3}x+2$, $y'=\frac{2}{3}$, 0 – значение x в точке B, –3 – значение x для C.

CD: $y=-\frac{2}{3}x-2$, $y'=-\frac{2}{3}$, –3 – значение x в точке C, 0 – значение x для D.

DA: $y=\frac{2}{3}x-2$, $y'=\frac{2}{3}$, 0 – значение x в точке D, 3 – значение x для A.

Тогда $$\int\limits_{AB} ydx+2xdy=\int\limits_3^0\left(-\frac{2}{3}x+2+2x\left(-\frac{2}{3}\right)\right)dx=\int\limits_3^0(-2x+2)\,dx=$$

$$=(-x^2+2x)\Big|_3^0=3.$$

$$\int\limits_{BC} ydx+2xdy=\int\limits_0^{-3}\left(\frac{2}{3}x+2+2x\frac{2}{3}\right)dx=\int\limits_0^{-3}(2x+2)\,dx=(x^2+2x)\Big|_0^{-3}=3.$$

$$\int\limits_{CD} ydx+2xdy=\int\limits_{-3}^0\left(-\frac{2}{3}x-2+2x\left(-\frac{2}{3}\right)\right)dx=\int\limits_{-3}^0(-2x-2)\,dx=$$

$$=(-x^2-2x)\Big|_{-3}^0=3.$$

$$\int\limits_{DA} ydx+2xdy=\int\limits_0^3\left(\frac{2}{3}x-2+2x\frac{2}{3}\right)dx=\int\limits_0^3(2x-2)\,dx=(x^2-2x)\Big|_0^3=3.$$

Таким образом, $\int\limits_L ydx+2xdy=3+3+3+3=12$.

Задачи

Вычислить криволинейные интегралы.

3.4.1. $\int\limits_{OA}(x+y)dx+(3x-2y)dy$ а) по отрезку прямой OA; б) по дуге OA параболы $y=\dfrac{x^2}{2}$, для $O(0;\,0)$, $A(2;\,2)$.

3.4.2. $\int\limits_{L} y^2dx+2xydy$, если L – окружность $x=a\cos t,\ y=a\sin t.$

3.4.3. $\int\limits_{AB} ydx-xdy$ по дуге AB эллипса $x=a\cos t,\ y=b\sin t.$

3.4.4. $\int\limits_{MN}\sqrt{6xyz}dx+xydy-\sqrt{x}dz$ по дуге MN, заданной параметрически $x=t,\ y=\dfrac{t^2}{2},\ z=\dfrac{t^3}{3},\ 0\le t\le 1.$

3.4.5. $\int\limits_{MN}xydx+yzdy+zxdz$ по дуге MN, заданной параметрически $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=3,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}.$

3.5 Приложения криволинейных интегралов

Пусть $\gamma=\gamma(x;y;z)$ – плотность вещества, распределенного по дуге AB.

Длина дуги AB выражается формулой $l=\int\limits_{AB}dl$. Масса дуги $m=\int\limits_{AB}\gamma(x;y;z)dl$. Координаты центра масс вычисляются по формулам $x=\dfrac{\int\limits_{AB}\gamma(x;y;z)xdl}{m}$; $y=\dfrac{\int\limits_{AB}\gamma(x;y;z)ydl}{m}$; $z=\dfrac{\int\limits_{AB}\gamma(x;y;z)zdl}{m}$. Статические моменты дуги относительно плоскостей Oyz, Oxz, Oxy

соответственно равны $M_{yz} = \int\limits_{AB} \gamma(x;y;z)x\,dl,\quad M_{xz} = \int\limits_{AB} \gamma(x;y;z)y\,dl,$

$M_{xy} = \int\limits_{AB} \gamma(x;y;z)z\,dl.$

Если дуга однородная, т. е. $\gamma(x;y;z) = \text{const}$, то координаты центра масс $x = \dfrac{\int\limits_{AB} x\,dl}{L}$; $y = \dfrac{\int\limits_{AB} y\,dl}{L}$; $z = \dfrac{\int\limits_{AB} z\,dl}{L}$.

Моменты инерции дуги *AB* относительно координатных плоскостей *Oyz*, *Oxz*, *Oxy* вычисляются по формулам $I_{yz} = \int\limits_{AB} \gamma(x;y;z)x^2 dl,$

$I_{xz} = \int\limits_{AB} \gamma(x;y;z)y^2 dl,\ I_{xy} = \int\limits_{AB} \gamma(x;y;z)z^2 dl.$

Моменты инерции дуги *AB* относительно координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz* и начала координат соответственно равны

$$I_x = \int\limits_{AB} \gamma(x;y;z)(y^2+z^2)dl,\qquad I_y = \int\limits_{AB} \gamma(x;y;z)(x^2+z^2)dl,$$

$$I_z = \int\limits_{AB} \gamma(x;y;z)(x^2+y^2)dl,\qquad I_O = \int\limits_{AB} \gamma(x;y;z)(x^2+y^2+z^2)dl.$$

Если дуга *AB* плоская, то $\gamma = \gamma(x; y)$ и статические моменты и моменты инерции вычисляются для осей координат *Ox*, *Oy*:
$M_x = \int\limits_{AB} \gamma(x;y)y\,dl,\qquad M_y = \int\limits_{AB} \gamma(x;y)x\,dl,\qquad I_x = \int\limits_{AB} \gamma(x;y)y^2 dl,$

$I_y = \int\limits_{AB} \gamma(x;y)x^2 dl,\qquad I_O = \int\limits_{AB} \gamma(x;y)(x^2+y^2)dl.$

Работа переменной силы $\vec{F} = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ вдоль криволинейного пути *MN* вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{MN} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz.$$

Пример 1. Найти координаты центра масс дуги циклоиды $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le \pi,\ \gamma(x;y;z) = \text{const}.$

Решение. Найдем длину дуги циклоиды. Так как $x' = a(1-\cos t),\ \ y' = a\sin t,$ имеем

$$dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Тогда $L=\int\limits_{AB}dl=\int\limits_0^{\pi}2a\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=4a.$

$$x=\frac{\int\limits_{AB}x\,dl}{L}=\frac{1}{4a}\int\limits_0^{\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt=\frac{a}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(t\sin\frac{t}{2}-\sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{a}{2}\left(-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}-\frac{4\sin^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{a}{2}\left(4-\frac{4}{3}\right)=\frac{4a}{3}.$$

$$y=\frac{\int\limits_{AB}y\,dl}{L}=\frac{1}{4a}\int\limits_0^{\pi}a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt=\frac{a}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\cos t\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{a}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\left(2\cos^2\frac{t}{2}-1\right)\sin\frac{t}{2}\right)dt=\frac{a}{2}\left(-2\cos\frac{t}{2}+\frac{4\cos^3\frac{t}{2}}{3}-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{4a}{3}.$$

Пример 2. Найти массу дуги параболы $y^2=2px,\ 0\le x\le\frac{p}{2}$, если линейная плотность параболы равна $|y|$.

Решение. Так как (рисунок 3.4)

$y=\pm\sqrt{2px},\ y'=\pm\sqrt{2p}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}=\pm\sqrt{\frac{p}{2x}}$, имеем

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx=\sqrt{\frac{x+\frac{p}{2}}{x}}\,dx.$$

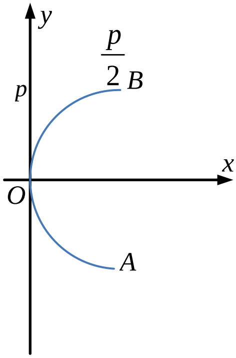

Рисунок 3.4

Тогда $m=\int\limits_{AB}\gamma(x;y)dl=\int\limits_{AO}|y|dl+\int\limits_{OB}|y|dl=$

$$=-\int\limits_{\frac{p}{2}}^{0}\sqrt{2px}\sqrt{\frac{x+\frac{p}{2}}{x}}dx+\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}\sqrt{\frac{x+\frac{p}{2}}{x}}dx=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}\sqrt{\frac{x+\frac{p}{2}}{x}}dx=2\sqrt{2p}\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x+\frac{p}{2}\right)=$$

$$=\frac{4\sqrt{2p}}{3}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{p}{2}}=\frac{2p^2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Пример 3. Найти момент инерции окружности $x^2+y^2=r^2$ относительно ее диаметра.

Решение. Найдем момент инерции окружности относительно ее диаметра, лежащего на оси Ox. Будем считать дугу окружности однородной: $\gamma(x;y)=\mathrm{const}=1$. Уравнение окружности в параметрическом виде: $x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Тогда $dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt=rdt.$ Получаем

$$I_x=\int\limits_L y^2dl=\int\limits_0^{2\pi}r^2\sin^2 t\cdot rdt=r^3\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{r^3}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi r^3.$$

Пример 4. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению материальной точки от начала координат, если эта точка описывает в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, положительную четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Решение. Из условия следует, что $\vec{F} = kx\vec{i} + ky\vec{j}$, где k – коэффициент пропорциональности (рисунок 3.5). Уравнение эллипса в параметрическом виде: $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Учитывая, что $x' = -a\sin t,\ y' = b\cos t$, вычисляем работу

$$A = \int_L kxdx + kydy = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t \cdot (-a\sin t) +$$

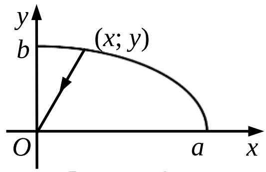

Рисунок 3.5

$$+ b\sin t \cdot b\cos t)dt = k(b^2 - a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt =$$

$$= k(b^2 - a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2t d(2t)\frac{1}{2} = \frac{k(b^2 - a^2)}{4} \cdot (-\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k(b^2 - a^2)}{2}.$$

Задачи

В задачах 3.5.1–3.5.3 вычислить длины дуг указанных кривых:

3.5.1. полукубической параболы $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ от $A(3;\ 2\sqrt{3})$ до $B(8; \frac{32}{3}\sqrt{2})$;

3.5.2. кардиоиды $x = 2\cos t - \cos 2t,\quad y = 2\sin t - \sin 2t$;

3.5.3. пространственной кривой $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ от $O(0;\ 0;\ 0)$ до $A(3;\ 3;\ 2)$.

3.5.4. Найти массу дуги OA кривой $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})$, если линейная плотность в каждой точке кривой обратно пропорциональна ординате точки, $x_O = 0$, $x_A = a$.

3.5.5. Найти массу контура L треугольника с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, если в каждой его точке линейная плотность $\gamma = x + y$.

3.5.6. Найти массу части винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$, линейная плотность которой в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

3.5.7. Найти координаты центра масс верхней половины окружности $x^2 + y^2 = R^2$ $(\gamma(x;y) = \text{const})$.

3.5.8. Найти координаты центра масс дуги AB астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, если в каждой её точке линейная плотность пропорциональна абсциссе точки, $A(0;\,a)$ до $B(a;\,0)$.

3.5.9. Найти координаты центра масс дуги цепной линии $y = 2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$, заключенной между точками с абсциссами 0 и 2.

3.5.10. Вычислить статический момент первого витка конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ относительно плоскости Oxy, если плотность $\gamma = kz^2$, k – коэффициент пропорциональности.

3.5.11. Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками $A(2;\,0)$ до $B(0;\,1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна 1.

3.5.12. Вычислить работу при перемещении единицы массы по окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ под действием силы $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + 2x\vec{j}$.

3.5.13. Вычислить работу при перемещении единицы массы по прямой от точки от $A(2;\,0;\,0)$ до точки $B(2;\,2;\,2)$ под действием силы $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$.

3.5.14. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + 2y\vec{j}$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку $(1;\,-5)$ по параболе $y = -5x^2$.

3.6 Формула Остроградского – Грина. Независимость Кри-2 от контура интегрирования

Если в плоскости Oxy лежит замкнутая кусочно-гладкая кривая L, которая ограничивает односвязную область D и функции $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в D, то имеет место формула Грина

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Обход контура L осуществляется в положительном направлении, то есть при движении по L область D остается слева.

При выполнении отмеченных выше условий для L, D, P и Q следующие утверждения эквивалентны.

1. $\oint\limits_C Pdx + Qdy = 0$ по любому замкнутому контуру C, содержащемуся в D.

2. $\oint\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от контура интегрирования, где кривая AB лежит в D.

3. $Pdx + Qdy = du$ – полный дифференциал функции $u = u(x, y)$.

4. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ во всех точках области D.

Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то функцию $u = u(x, y)$ можно найти, вычислив криволинейный интеграл $u(x,y) = \int\limits_{A_0B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$ где в качестве наивыгоднейшего пути интегрирования следует выбрать ломаную, содержащую произвольную фиксированную точку $A_0(x_0, y_0)$ и переменную точку $B(x, y)$, звенья которой параллельны осям Ox и Oy (рисунок 3.6).

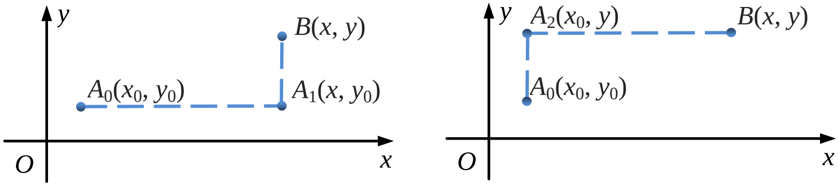

Рисунок 3.6

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C \quad \text{или}$$

$$u(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + C.$$

Если в формуле Грина $P(x,y)=-\dfrac{y}{2}$ и $Q(x,y)=\dfrac{x}{2}$, то получится формула для вычисления площади области D через Кри-2:

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_L -ydx+xdy.$$

Пример 1. Вычислить $\oint\limits_L 3(x^2+xy^2)dx+(x+y)^3dy,$ применяя формулу Грина, если L – контуру треугольника с вершинами $O(0;\,0)$, $A(3;\,3)$, $B(0;\,6)$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

Решение. Здесь $P(x,y)=3(x^2+xy^2),$ $Q(x,y)=(x+y)^3,$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3(x+y)^2,$ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy.$ Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=3(x^2+y^2).$ По формуле Грина $\oint\limits_L 3(x^2+xy^2)dx+(x+y)^3dy=\iint\limits_D 3(x^2+y^2)dxdy.$ Уравнения прямой OA: $y=x$, прямой AB: $y=6-x$. Тогда $\iint\limits_D 3(x^2+y^2)dxdy=$

$$=3\int\limits_0^3 dx\int\limits_x^{6-x}(x^2+y^2)dy=3\int\limits_0^3\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_x^{6-x}dx=3\int\limits_0^3\left(72-36x+12x^2-\frac{8x^3}{3}\right)dx=$$

$$=3\left(72x-18x^2+4x^3-\frac{4x^4}{3}\right)\Bigg|_0^3=324.$$

Пример 2. Проверить, что данное выражение $(3x-2y^2+5)dx+(1-4xy)dy$ является полным дифференциалом функции $u(x,\,y)$, найти $u(x,\,y)$.

Решение. Пусть $P(x,y)=3x-2y^2+5,$ $Q(x,y)=1-4xy.$ Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-4y,$ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-4y.$ Так как $P(x,y),$ $Q(x,y),$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, заданное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u=u(x,\,y)$. Выберем в качестве фиксированной точки $A(x_0,\,y_0)$ начало координат $O(0;\,0)$. Получаем

$$u(x,y)=\int_0^x(3x+5)dx+\int_0^y(1-4xy)dy+C=\frac{3x^2}{2}+5x+y-2xy^2+C.$$

Пример 3. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Решение.

$$S=\frac{1}{2}\oint_L -ydx+xdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-b\sin t\cdot(-a\sin t)+a\cos t\cdot b\cos t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

Задачи

В задачах 3.6.1–3.6.3 вычислить Кри-2, применяя формулу Грина, по замкнутому контуру L, пробегаемому против хода часовой стрелки:

3.6.1. $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy,$ L – контур треугольника с вершинами $A(3;\,0)$, $B(3;\,3)$, $C(0;\,3)$;

3.6.2. $\oint\limits_L (1-x^2y)dx+(2+xy^2)dy,$ L – окружность $x^2 + y^2 = 4$;

3.6.3. $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dx+y(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))dy,$ L – контур прямоугольника $0 \le x \le 3$, $1 \le y \le 4$.

В задачах 3.6.4–3.6.6 проверить, что данное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ и найти $u(x, y)$:

3.6.4. $y(1 + \cos(xy))dx + x(1 + \cos(xy))dy$;

3.6.5. $(1 + y^2e^{xy})dx + (3 + e^{xy} + xye^{xy})dy$;

3.6.6. $(1 - e^{x-y} + \cos x)dx + (e^{x-y} + \cos y)dy$.

В задачах 3.6.7–3.6.9 вычислить площадь, ограниченную кривой L с помощью Кри-2:

3.6.7. L – контур четырехугольника с вершинами $A(6;\,1)$, $B(4;\,5)$, $C(1;\,6)$, $D(-1;\,1)$;

3.6.8. L – кардиоида $x = 4\cos t - 2\cos 2t$, $y = 4\sin t - 2\sin 2t$;

3.6.9. L – астроида $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

3.7 Самостоятельная работа

В задаче 1 вычислить Кри-1 по отрезку прямой AB. В задаче 2 вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки по линии L.

Вариант 1

1. $\int\limits_{AB}(x-2y)dl,\ A(5;\,4),\ B(9;\,7).$

2. $\vec{F}=(x+2y)\vec{i}+(x-y)\vec{j},\ L$ – окружность $x=2\cos t,\ y=2\sin t$, пробегаемая в положительном направлении.

Вариант 2

1. $\int\limits_{AB}(3x-y)dl,\ A(5;\,3),\ B(6;\,8).$

2. $\vec{F}=(xy-1)\vec{i}+x^2y\vec{j},\ L$ – дуга эллипса $x=\cos t,\ y=2\sin t$ от точки $A(1;\,0)$ до точки $B(0;\,2)$.

Вариант 3

1. $\int\limits_{AB}(2x+y)dl,\ A(-1;\,2),\ B(3;\,5).$

2. $\vec{F}=y\vec{i}+x\vec{j},\ L$ – дуга окружности $x=R\cos t,\ y=R\sin t$ от точки $O(R;\,0)$ до точки $A(0;\,R)$.

Вариант 4

1. $\int\limits_{AB}(x+2y)dl,\ A(-2;\,1),\ B(1;\,3).$

2. $\vec{F}=(x^2y-x)\vec{i}+(y^2x-2y)\vec{j},$ L – дуга эллипса $x=3\cos t$, $y=2\sin t$, пробегаемая в положительном направлении.

Вариант 5

1. $\int\limits_{AB}(x+3y)dl,\ A(1;\,2),\ B(7;\,10).$

2. $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+\vec{j},\ L$ – дуга верхней половины окружности $x=2\cos t,\ y=2\sin t$, пробегаемая в положительном направлении.

Вариант 6

1. $\int\limits_{AB}(2x-2y)dl,\ A(3;\,1),\ B(4;\,-6).$

2. $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j},\ L$ – дуга эллипса $x=3\cos t,\ y=2\sin t$, пробегаемая в положительном направлении.

Вариант 7

1. $\int\limits_{AB}(y-x)dl,\ A(1;\,3),\ B(5;\,6).$

2. $\vec{F}=y^2\vec{i}+x^2\vec{j},\ L$ – верхняя половина эллипса $x=3\cos t$, $y=\sin t$, от точки $A(-3;\,0)$ до точки $B(3;\,0)$.

Вариант 8

1. $\int\limits_{AB}(y-2x)dl,\ A(6;\,2),\ B(-2;\,8).$

2. $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+\vec{j},\ L$ – верхняя половина окружности $x=4\cos t$, $y=4\sin t$ от $A(4;\,0)$ до $B(-4;\,0)$.

Вариант 9

1. $\int\limits_{AB}(x+y)dl,\ A(2;\,1),\ B(4;\,5).$

2. $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j},\ L$ – дуга эллипса $x=6\cos t,\ y=4\sin t$, пробегаемая в положительном направлении.

Вариант 10

1. $\int\limits_{AB}(3x+y)dl,\ A(-7;\,1),\ B(1;\,7).$

2. $\vec{F}=y^2\vec{i}+2xy\vec{j},\ L$ – окружность $x=3\cos t,\ y=3\sin t$, пробегаемая в положительном направлении.

4 ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах, предварительно изобразив на чертеже области интегрирования:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$$

№	*a*	*b*	*c*	*d*	№	*a*	*b*	*c*	*d*
1	0	4	$\frac{3\sqrt{x}}{2}$	$\sqrt{25-x^2}$	9	2	4	$\frac{6}{x}$	$7-x$
2	0	1	$2x+1$	$4-x^2$	10	0	a	$ax-x^2$	$\sqrt{a^2-x^2}$ $a>0$
3	–2	1	x^2+1	$3-x$	11	1	4	x^2	x^3
4	0	2	x	$2x$	12	0	1	e^{-x}	e^x
5	1	2	$\frac{1}{x}$	x	13	$-\frac{1}{2}$	1	$2x^2$	$3-x$
6	–1	2	x^2	$x+2$	14	–1	1	$2x^2$	$x+3$
7	–6	1	x^2+5x-6	$\frac{(x+6)}{7}$	15	0	4	$\frac{3x}{4}$	$\sqrt{25-x^2}$
8	0	4	$\sqrt{4x-x^2}$	$2\sqrt{x}$					

$$\int_{l}^{p} dy \int_{m}^{n} f(x,y)dx$$

№	*l*	*p*	*m*	*n*	№	*l*	*p*	*m*	*n*
16	1	3	$\frac{y-1}{2}$	$\sqrt{4-y}$	24	0	4	$\frac{5y}{4}$	$\sqrt{9+y^2}$
17	1	3	$\frac{1}{y}$	y	25	–4	0	$-\sqrt{9+y^2}$	$\frac{5y}{4}$
18	0	1	$\sqrt{y}$	$3-2y$	26	0	3	$\frac{3y}{4}$	$\sqrt{25-y^2}$
19	2	4	$2-y$	y	27	–3	3	$-\sqrt{25-y^2}$	$\sqrt{25-y^2}$
20	2	4	$\ln y$	y	28	0	2	$\frac{y^2}{4}$	$2\sqrt{y}$
21	0	1	$-\sqrt{4-y^2}$	$2-y$	29	0	$\sqrt{2}$	$4-2y^2$	$4-y^2$
22	0	$\frac{3}{2}$	$2y^2$	$y+3$	30	0	4	$2-\frac{y}{2}$	$8-\frac{y^2}{2}$
23	–1	1	$2y^2$	$3-y$					

Задача 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_S f(x,y)dxdy,$ введя полярные координаты. Построить область интегрирования.

№	*f*(*x*; *y*)	*S*
1	$\cos\sqrt{x^2+y^2}$	$\frac{\pi^2}{4} \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$
2	$\sqrt{25-x^2-y^2}$	$x^2+y^2 \le 9$
3	x^2+y^2	$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $y = 0$ $(x > 0, y > 0)$
4	x^2-y^2	$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$
5	xy	$(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$
6	x^2+y^2	$(x^2+y^2)^2 = 8xy$
7	$\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$	$x = 0, y = 0,\ x+y = 1,\ x+y = 2$
8	$x+y$	$x^2+y^2 = 1, x^2+y^2 = 4$
9	xy	$x^2+y^2 \le a^2$

№	$f(x;y)$	S
10	$\sin\sqrt{x^2+y^2}$	$x^2+y^2=\pi^2,\ x^2+y^2=4\pi^2$
11	x^2+y^2	$x^2+y^2=2ay$
12	$\sqrt{R^2-x^2-y^2}$	$x^2+y^2=R^2,\ y=x,\ y=\sqrt{3}x$
13	$\sqrt{R^2-x^2-y^2}$	$x^2+y^2\le a^2,\ a<R$
14	$\sqrt{R^2-x^2-y^2}$	$x^2+y^2\le Rx,\ y\ge 0$
15	$\sqrt{a^2-x^2-y^2}$	$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ ,\ a^2>x^2+y^2$
16	$\sqrt{a^2+x^2+y^2}$	$x^2+y^2=a^2$
17	$ae^{-(x^2+y^2)}$	$x^2+y^2=R^2$
18	y	$x^2+y^2=ax,\ x=0,\ x=a$
19	$\sin\sqrt{x^2+y^2}$	$x^2+y^2=\pi^2,\ x^2+y^2=4\pi^2$
20	x^2+y^2	$x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x$
21	ax	$x^2+y^2=2ax$
22	$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2$
23	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$(x^2+y^2)^3=a^2x^3y$
24	xy	$(x^2+y^2)^3=a^4y^2$
25	x^2+y^2	$(x^2+y^2)^3=a^4x^2$
26	xy	$(x^2+y^2)^2=a^2(2x^2+y^2)$
27	$\dfrac{1}{a}(x^2+y^2)$	$x^2+y^2=2ax,\ a>0$
28	$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$(x^2+y^2)^2=4ay^3\ ,\ a>0$
29	x	$(x^2+y^2)^3=a^2x^4$
30	$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$	$(x^2+y^2)^2=2ax^3\ ,\ a>0$

Задача 3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями. Сделать чертеж.

№	Поверхности	№	Поверхности
1	$x + 2y - z = 0$, $2x + 3y - 18 = 0$, $x - 2y - 2 = 0,\ x = 3,\ z = 0$	16	$6x - 9y + 5z = 0,\ 3x - 2y = 0$, $4x - y = 0, x + y - 5 = 0, z = 0$
2	$2y^2 = x,\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 4z = 0$	17	$y = 0,\ y = 3 - x^2 - z^2$
3	$x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4 - z, z = 0$	18	$z = 4 - x^2, y = 5, y = 0, z = 0$
4	$z = 0,\ y + z = 2,\ y = x^2$	19	$x^2 + y^2 = 2y,\ z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 0$
5	$z = 4 - x^2 - y^2,\ 2z = 2 + x^2 + y^2$	20	$z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 0$
6	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$	21	$x^2 + y^2 = 4z,\ z = x,\ z = 2x$
7	$x^2 + y^2 = 9,\ z = 5x,\ z = 0$	22	$z = a^2 - x^2,\ x + y = a$, $y = 2x,\ z = 0,\ y = 0$
8	$x^2 + y^2 - z = 0,\ x = 0, y = 0, z = 0$ $x = a,\ y = b\ \ (a > 0, b > 0)$	23	$x^2 + y^2 + z - 4 = 0,\ z = 0$
9	$2 - x - y - 2z = 0,\ y = x^2,\ y = x$	24	$y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x}, x + z = 4,\ z = 0$
10	$z = 0,\ z = 3 - x^2 - y^2$	25	$z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1, z = 0$
11	$z = 4x^2 + 2y^2 + 1,\ x + y - 3 = 0$, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$	26	$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 6 - x^2 - y^2$
12	$x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 3,\ z = 0$	27	$x^2 + y^2 = R^2, Rz = 2R^2 + x^2 + y^2, z = 0$
13	$z = xy,\ \ y = \sqrt{x},\ x + y = 2$, $y = 0,\ z = 0$	28	$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 4,\ y = 4$, $z = x^2 + y^2 + 1$
14	$z = x^2 + y^2,\ x = 1,\ y = 0$, $z = 0,\ y = x$	29	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
15	$x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 3,\ z = 0$	30	$x^2 + y^2 - z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0$

Задача 4. Найти центры масс однородных пластинок, ограниченных данными линиями.

№	Линии	№	Линии
1	$y^2 = ax,\ y = x$	11	$ax = y^2,\ x = 2\ (a > 0)$
2	$x^2 + y^2 = a^2,\ y = 0\ (y \ge 0)$	12	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ y = 0\ (y \ge 0)$
3	$y = x^2,\ x + y = 2$	13	$y^2 = 2px,\ y = 0,\ x = x_0$
4	$y - x = 0,\ x + y - 4 = 0,$ $x - 2y - 4 = 0$	14	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x > 0,\ y > 0$
5	$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\ x = 0,\ y = 0$	15	$x^2 + y^2 = a^2,\ x > 0,\ y > 0$
6	$y = x^2,\ y = 2x^2,\ x = 1,\ x = 2$	16	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ y \ge 1$
7	$y^2 = ax,\ x = 0,\ x = a,\ y = 0$	17	$y = 2x^3,\ y^2 = 2x,$
8	$y = \sqrt{2x - x^2},\ y = 0$	18	$x^2 + y^2 = 13,\ xy = 6,\ x = 0$
9	$\rho = a(1 + \cos\varphi)$	19	$ay = x^2,\ y = 2\ (a > 0)$
10	$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi\ \left(-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right)$	20	$y^2 = 4x + 4,\ y = -2x + 4$

Найти моменты инерции относительно осей координат однородных площадок, ограниченных линиями.

№	Линии	№	Линии
21	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ x = 0,\ y = 0$	26	$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),\ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$
22	$y = \sqrt{4x},\ x + y = 3,\ y = 0$	27	$\rho = 2a\cos\varphi$
23	$0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$	28	$\rho = a(1 - \cos\varphi)$
24	$x^2 + y^2 = a^2,\ x = 0,\ y = 0$ $(x > 0, y > 0)$	29	$x = 0,\ y = 0,\ x = a,\ y = b$
25	$x = 0,\ y = 0,\ x = a,\ y = b$	30	$x^2 + y^2 = a^2$

Задача 5. Применяя формулу Остроградского – Грина, вычислить

$$\oint_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

№	*P*(*x*; *y*)	*Q*(*x*; *y*)	*l*
1	$2(x^2+y^2)$	$(x+y)^2$	Контур треугольника $A(1; 1)$, $B(2; 2)$, $C(1; 3)$
2	$\frac{x}{x^2+y^2}$	$\frac{y}{x^2+y^2}$	$(x-1)^2+(y-1)^2=1$
3	$xy+x+y$	$xy+x-y$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
4	$xy+x+y$	$xy+x-y$	$x^2+y^2=ax$
5	x^2	y^2	$x^2+y^2=4$
6	$(x+y)^2$	$-(x^2+y^2)$	Контур треугольника $A(1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(2; 5)$
7	$-x^2y$	xy^2	$x^2+y^2=R$
8	$e^x(1-\cos y)$	$e^x(\sin y-y)$	$0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\sin x$
9	$\sqrt{x^2+y^2}$	$y(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))$	$x=1,\ x=4,$ $y=0,\ y=2$
10	$6xy+5y$	$3x^2+5x$	$y=0,\ x=3,\ y=\sqrt{x}$
11	$\frac{y}{x}$	$2\ln x$	$y=0,\ x=1,$ $y=4-2x$
12	$\frac{1}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$	$\frac{2}{y}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$	$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ y=x,$ $y=\sqrt{3}x,\ y>0$
13	$\frac{x}{x^2+y^2}$	$-\frac{y}{x^2+y^2}$	$x^2+y^2=R$
14	$(1-x^2)y$	$x(1+y^2)$	$x^2+y^2=R$
15	$(y+x)$	$(y-x)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
16	$e^{y^2-x^2}\cos 2xy$	$e^{y^2-x^2}\sin 2xy$	$x^2+y^2=R^2$
17	$x+y$	$-2x$	$x=0,\ y=0,\ x+y=5$
18	yx^3+e^y	xy^3+xe^y-2y	$x^2+y^2=R^2$
19	$2xy-y$	x^2	$y=x^2,\ x=y^2$
20	x^2+y^2	x^2-y^2	Контур треугольника $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$

№	$P(x;y)$	$Q(x;y)$	l
21	y^2	$(x+y)^2$	Контур треугольника $A(2;0)$, $B(2;2)$, $C(0;2)$
22	y	$x+y$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
23	$\frac{1}{y}$	$-\frac{1}{x}$	Контур треугольника $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C(2;2)$
24	x^2-y^2	x^2+y^2	$y=\sqrt{R^2-x^2}$, $y=0$
25	$(x+y)^2$	$-(x-y)^2$	$y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$
26	$(x+y)^2$	$-(x^2+y^2)$	Контур треугольника $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$
27	$2xy^2$	$2x^2y-x$	Контур треугольника $O(0;0)$, $A(3;1)$, $B(2;1)$
28	$2xy^2$	$2x^2y+x$	$y=x^2$, $x=y^2$
29	$2xy^3+y$	$3x^2y^2-x$	$x^2+y^2=R^2$
30	y	$x+5y^2$	$y=x^3$, $x=0$, $y=8$

ОТВЕТЫ

1.2.1. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx$. **1.2.2.** $\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x,y)dy =$

$= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x,y)dx$. **1.2.3.** $\int_{-2}^2 dx \int_{|x|/2}^1 f(x,y)dy =$

$= \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$. **1.2.4.** $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

1.2.5. $\int_{-0,5}^{0,5} dx \int_{0,5-\sqrt{0,25-x^2}}^{0,5+\sqrt{0,25-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$. **1.2.6.** $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y)dy =$

$= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$. **1.2.7.** 0,025. **1.2.8.** 26. **1.2.9.** $(\pi a^3)/3$. **1.2.10.** 0,5.

1.2.11. 1. **1.2.12.** $0,5(e-1)$. **1.2.13.** $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

1.2.14. $\int_0^4 dy \int_{\frac{y}{4}}^{y} f(x,y)dx + \int_4^{16} dy \int_{\frac{y}{4}}^{4} f(x,y)dx$. **1.2.15.** $\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)dx +$

$+ \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)dx$. **1.2.16.** $\int_0^1 dy \int_{0,5y^2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)dx +$

$+ \int_1^2 dy \int_{0,5y^2}^{2} f(x,y)dx$. **1.2.17.** $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$. **1.2.18.** $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

1.2.19. 32. **1.2.20.** $1\frac{11}{21}$. **1.2.21.** $20\frac{5}{6}$. **1.2.22.** 47/105. **1.2.23.** $-4\frac{1}{12}$.

1.2.24. 14.

1.3.1. 126π. **1.3.2.** 0. **1.3.3.** $36\pi^4$. **1.3.4.** $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 2\pi$.

1.3.5. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho = \pi\frac{a^3}{6}$. **1.3.6.** $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \rho d\rho = \pi\frac{a^2}{2}$.

1.3.7. $\pi R^2 h$. **1.3.8.** $\pi(1-e^{-a^2})$. **1.3.9.** 126π. **1.3.10.** 0. **1.3.11.** $-6\pi^2$.

1.3.12. $(3\pi a^4)/2$. **1.3.13.** $\pi(\ln 4 - 1)/4$. **1.3.14.** $\int_1^2 udu \int_3^5 f(u,uv)dv$.

1.3.15. $\int_0^{1/(1-v)} udu \int_{1/2}^{e/(1+e)} f(u-uv,uv)dv$. **1.3.16.** $\frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv$.

1.3.17. Замена $xy = u$, $x/y = v$; $(\ln 3)/2$. **1.3.18.** 3/160. **1.3.19.** 4.

1.5.1. $(15/8) - 2\ln 2$. **1.5.2.** 32/3. **1.5.3.** 16/3. **1.5.4.** $(e + 2)/2e$. **1.5.5.** $\sqrt{2}-1$. **1.5.6.** $(e-2)^2/2$. **1.5.7.** $\pi a^2/2$. **1.5.8.** 3π. **1.5.9.** $((\pi/4) + 2)a^2$. **1.5.10.** $(4\pi)/3 - \sqrt{3}$. **1.5.11.** $2 - (\pi/4)$. **1.5.12.** $8\pi + 9\sqrt{3}$. **1.5.13.** $(3\sqrt{3}-\pi)a^2/3$. **1.5.14.** $\pi a^2/4$. **1.5.15.** $(\pi + 2\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}))/6$. **1.5.16.** $\sqrt{7}/2 + \arcsin(\sqrt{14}/8)$.

1.6.1. 128/3. **1.6.2.** 5/6. **1.6.3.** $8a^3/15$. **1.6.4.** 549/144. **1.6.5.** $abc/6$. **1.6.6.** 144. **1.6.7.** $3\pi a^3$. **1.6.8.** $45\pi/32$. **1.6.9.** $\pi(e-1)/e$. **1.6.10.** 36. **1.6.11.** $\pi a^3/3$. **1.6.12.** $8\pi\ln 2$. **1.6.13.** 1/2. **1.6.14.** 1/16. **1.6.15.** 36. **1.6.16.** 3/4. **1.6.17.** π. **1.6.18.** 211/66.

1.7.1. $2\sqrt{2}\pi$. **1.7.2.** $14\pi/3$. **1.7.3.** $9\sqrt{3}$. **1.7.4.** $\pi a^2\sqrt{3}/4$. **1.7.5.** 4. **1.7.6.** $2\sqrt{2}\pi$. **1.7.7.** $16(\sqrt{8}-1)/3$. **1.7.8.** $2\sqrt{2}\pi$. **1.7.9.** 32arcsin(1/2). **1.7.10.** $24\sqrt{2}$. **1.7.11.** $2\pi a^2$. Проектировать на плоскость Oyz. **1.7.12.** $\pi\beta R^2\sin\alpha/180$; $\pi R^2/6$.

1.8.1. $a^2(2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}))/3$. **1.8.2.** $2\pi a^2\delta$. **1.8.3.** $2k\pi\ln(b/a)$. **1.8.4.** (–1; 0). **1.8.5.** (8/3; 8/5). **1.8.6.** (26/25; 7/25). **1.8.7.** $(0; 4a/3\pi)$. **1.8.8.** (4; 8/3). **1.8.9.** (3; 15/8). **1.8.10.** (10/3; 2). **1.8.11.** $(5a/6; 0)$. **1.8.12.** $(128/7\pi; 128/7\pi)$. **1.8.13.** $I_x = 4/3$; $I_y = 13/3$. **1.8.14.** $16 - 5\pi$. **1.8.15.** 18; 18. **1.8.16.** $\pi ab^3/4$; $\pi a^3 b/4$. **1.8.17.** 8/3; 2/3. **1.8.18.** $\pi/4$; $\pi/4$.

2.2.5. 18,5. **2.2.6.** 8. **2.2.7.** 1/12. **2.2.8.** 4/3. **2.2.9.** $4\pi/3$. **2.2.10.** 11. **2.2.11.** 156. **2.2.12.** $\pi^2/16 - 1/2$. **2.2.13.** $2e - 5$. **2.2.14.** 11/486.

2.3.1. $\pi a^2 b(a^2/2 + b^2/3)$. **2.3.2.** 60π. **2.3.3.** $753{,}3\pi$. **2.3.4.** $16\pi/3$. **2.3.5.** 64π. **2.3.6.** $4/9$. **2.3.7.** $\pi a^8/2$. **2.3.8.** $4\pi a^5/15$. **2.3.9.** 1. **2.3.10.** $8\pi(2\sqrt{2} - 1)/9$. **2.3.11.** $496\pi/315$. **2.3.12.** $\pi a^3/6$. **2.3.13.** $6\ln 2$. **2.3.14.** $765(15+16\ln 2)/512$.

2.5.1. $19\pi/6$. **2.5.2.** $\pi/6$. **2.5.3.** 16. **2.5.4.** $6(3\pi - 4)$. **2.5.5.** 4. **2.5.6.** $3\pi + 8$. **2.5.8.** 24. **2.5.9.** $2/3$. **2.5.10.** $16\pi/3$. **2.5.11.** 32π. **2.5.12.** $\pi h a^4$. **2.5.13.** 81π. **2.5.14.** 4π. **2.5.15.** $6\pi a^2$. **2.5.16.** $(4/3, 1/2, 16\sqrt{3}/15)$. **2.5.17.** $(4, 4, 4)$. **2.5.18.** $(0, 0, 3)$. **2.5.19.** $(0, 0, 2)$. **2.5.20.** $(3a/8,\ 3b/8,\ 3c/8)$. **2.5.21.** $(0, 0, a/3)$. **2.5.22.** $I_{xy} = abc^3/60$; $I_{yz} = a^3bc/60$; $I_{xz} = ab^3c/60$. **2.5.23.** $I_{xy} = 4\pi$; $I_{yz} = 100\pi$; $I_{xz} = 36\pi$. **2.5.24.** $I_{xy} = 4\pi$; $I_{yz} = 25\pi$; $I_{xz} = 16\pi$. **2.5.25.** $I_{xy} = 64$; $I_{yz} = 18$; $I_{xz} = 8$. **2.5.26.** $I_{xy} = I_{xz} = 648\pi$, $I_{yz} = 1944\pi$. **2.5.27.** $I_{xy} = I_{xz} = 24\pi$; $I_{yz} = 288\pi$. **2.5.28.** $4\pi(4\sqrt{2} - 5)/15$. **2.5.29.** $\pi h a^2(a^2/4 + h^2/3)$. **2.5.30.** 162. **2.5.31.** $8/5$. **2.5.32.** $48\pi/5$. **2.5.33.** $1250(2 - \sqrt{2})\pi$.

3.2.1. $\dfrac{2152}{45}$. **3.2.2.** $\dfrac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1)$. **3.2.3.** 2π. **3.2.4.** $\operatorname{arctg} 2\pi$. **3.2.5.** 0. **3.2.6.** -2.

3.4.1. а) 6; б) $7\dfrac{1}{3}$. **3.4.2.** 0. **3.4.3.** $-2\pi ab$. **3.4.4.** $\dfrac{39}{40}$. **3.4.5.** 4,5.

3.5.1. 28,5. **3.5.2.** 16. **3.5.3.** 5. **3.5.4.** k. **3.5.5.** $1 + \sqrt{2}$. **3.5.6.** $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{a^2 + b^2}(3a^2 + 4\pi^2 b^2)$. **3.5.7.** $\left(0; \dfrac{2R}{\pi}\right)$. **3.5.8.** $\left(\dfrac{5a}{8}; \dfrac{15a\pi}{256}\right)$.

3.5.9. $\left(\dfrac{2(\operatorname{sh}1 - \operatorname{ch}1 + 1)}{\operatorname{sh}1}; \dfrac{\operatorname{sh}2 + 2}{2\operatorname{sh}1}\right)$. **3.5.10.** $\dfrac{8k\sqrt{2}}{15}\left((1 + 2\pi)^{\frac{3}{2}}(3\pi^2 - 1) + 1\right)$.

3.5.11. $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$. **3.5.12.** $a^2\pi$. **3.5.13.** 4. **3.5.14.** $\dfrac{163}{6}$.

3.6.1. 18. **3.6.2.** 8π. **3.6.3.** 63. **3.6.4.** $xy + \sin(xy) + C$. **3.6.5.** $3x - ye^{xy} + C$. **3.6.6.** $x - e^{x-y} + \sin x + \sin y + C$. **3.6.7.** 22,5. **3.6.8.** 24π. **3.6.9.** $\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСитемс, 2003. – Т. 2. – 448 с.

2 **Гусак, А. А.** Математический анализ и дифференциальные уравнения : справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСитемс, 2003. – 416 с.

3 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

5 Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2007. – Ч. 2. – 396 с.

6 Сборник задач по высшей математике. 2-й курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

7 **Александрова, О. В.** Задачи по высшей математике. Примеры решения типовых задач : учеб. пособие / О. В. Александрова, И. А. Козик. – М. : КУРС, 2022. – 104 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ВАСИЛЬЕВА Татьяна Ивановна
НОВИКОВ Сергей Петрович
СИМОНЕНКО Дмитрий Николаевич

Кратные и криволинейные интегралы

Учебно-методическое пособие

Технический редактор В. Н. Кучерова
Корректор Т. А. Пугач

Подписано в печать 28.02.2023 г. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 2,77. Уч.-изд. л. 4,65. Тираж 500 экз.
Зак № . Изд № 53.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 14.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель