ны вдоль контура, а их распределение и зависимость от времени должны быть таковы, чтобы выполнялись заданные в исходной задаче граничные условия.

С использованием интегральных соотношений для перемещений и усилий, ядрами которых являются найденные функции влияния, задача сводится к решению системы интегральных уравнений относительно фиктивных нагрузок, распределённых вдоль контура. Для её решения предлагается использовать два подхода. Первый из них предполагает применение интегрального преобразования Лапласа по времени, в результате чего задача сводится к граничным интегральным уравнениям с интегрированием вдоль контура пластины относительно изображений по Лапласу искомых фиктивных нагрузок. Второй метод предполагает конечно-разностную аппроксимацию по времени, и на каждом временно́м шаге задача опять сводится к решению граничных интегральных уравнений вдоль контура пластины. Затем проводится аппроксимация контура пластины примыкающими друг к другу прямолинейными элементами. В пределах каждого элемента фиктивные нагрузки распределены постоянно и зависят только во времени. В результате задача сводится к системе алгебраических уравнений относительно либо изображений по Лапласу компенсирующих нагрузок, либо их значений в узлах временной сетки на каждом элементе контура. Решив её, получаем приближённые функции компенсирующих нагрузок на каждом граничном элементе. В случае применения интегрального преобразования Лапласа дополнительно проводятся процедуры построения оригиналов. При этом при невозможности аналитического обращения применяются высокоэффективные техники численного обращения интегрального преобразования Лапласа. Затем из исходных интегральных соотношений с использованием найденных фиктивных нагрузок находится приближенное решение задачи о нестационарных колебаниях пластины, ограниченной произвольным контуром.

Список литературы

1 Волны в сплошных средах / А. Г. Горшков [и др.]. – М. : Физматлит, 2004. – 472 с.

2 **Сердюк, А. О.** Нестационарное напряженно-деформированное состояние анизотропной пластины / А. О. Сердюк, Д. О. Сердюк, Г. В. Федотенков // Упругость и неупругость : материалы Междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 20–21 января 2021 г.). – М. : Гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, 2021. – С. 438–444.

3 Функция влияния нормальных перемещений анизотропной пластины Тимошенко / А. О. Сердюк [и др.] // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XI Междунар. науч.-практ. конф. (Гомель, 25–26 ноября 2021 г.) / под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2021. – С. 185–186.

4 **Сердюк, А. О.** Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины / А. О. Сердюк, Д. О. Сердюк, Г. В. Федотенков // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2021. – Т. 25, № 1. – С. 111–126. – DOI: 10.14498/vsgtu1793.

5 Green's function for an unbounded anisotropic kirchhoff-love plate / A. O. Serdyuk [et al.] // Journal of the Balkan Tribological Association. – 2021. – Vol. 27, no. 5. – P. 747–761.

6 Timoshenko beam and plate non-stationary vibrations / G. V. Fedotenkov // INCAS Bulletin. – 2021. – Vol. 13, Spec. is. – P. 41–56. – DOI: 10.13111/2066-8201.2021.13.S.5.

7 **Фан Тунг Шон**. Нестационарное деформирование пластины, ограниченной произвольным гладким контуром / Фан Тунг Шон, К. А. Кулаженкова, Г. В. Федотенков // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVIII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2. – М. : ТРП, 2021. – С. 135–136.

УДК 620.178

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КАТЯЩЕГОСЯ КОЛЕСА С ТОНКИМ УПРУГИМ ОБОДОМ

Д. А. ЧЕРНОУС
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Е. В. КОДНЯНКО
Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством, Республика Беларусь

В настоящее время в конструкциях различных машин и механизмов широко используются полимерные покрытия, обеспечивающие повышение износостойкости детали, а также защиту от коррозии и других негативных воздействий. Прогнозирование механических параметров пар трения, содержащих полимерные покрытия, требует решения соответствующих контактных задач. В частности, при описании движения автомобильных колес и опор качения, имеющий полимерное покрытие, широко используется модель тела качения в виде жесткого цилиндра с тонким деформируемым ободом. В общем случае для покрытия произвольной толщины точное решение контактной задачи подразумевает использование интегральных преобразований и систем интегральных уравнений. Сложность математического аппарата ограничивает применимость точного решения для практических расчетов узлов трения. В связи с этим при анализе контактного взаимодействия для тонких покрытий используют различные асимптотические приближения [1] и упрощенные модели [2]. Так, в работе [2] предложена методика описания установившегося качения жесткого цилиндра с деформируемым ободом, основанная на использовании модели Винклерова основания. Однако применимость модели Винклерова основания ограничена малыми толщинами покрытий. Более точные оценки параметров контактного взаимодействия обеспечивает асимптотический подход к решению контактной задачи [2]. В известных работах, посвященных использованию асимптотических приближений для тонкого слоя, не учитывается наличие в области контакта зон сцепления и проскальзывания. Подобная ограниченность существующих решений не позволяет, в частности, описать в рамках асимптотического подхода процесс качения колеса, имеющего тонкое покрытие.

В связи с вышесказанным, целью настоящего исследования является разработка методики решения контактной задачи для колеса с тонким упругим ободом, основанной на асимптотическом приближении точного решения задачи теории упругости для полосы и позволяющей подробно описать распределение нормального давления и сдвигового контактного напряжения.

Краевая задача для полосы. Первоначально решается вспомогательная краевая задача теории упругости для тонкой полосы, жестко связанной с условно недеформируемым горизонтальным основанием. Полоса образована изотропным линейно упругим материалом и находится в условиях плоской деформации. Точки свободной от закрепления грани полосы имеют некоторые заранее неизвестные вертикальные и горизонтальные смещения, которые выступают в качестве граничных условий при решении задачи теории упругости в перемещениях. При решении задачи используется асимптотическое приближение второго порядка по малому параметру, равному отношению толщины полосы к некоторому произвольно выбранному характерному размеру области контакта. В результате решения краевой задачи получены выражения для граничных напряжений, действующих на свободной от закрепления грани полосы. Данные выражения представляют собой дифференциальные уравнения, связывающие между собой нормальное давление, сдвиговое граничное напряжение, вертикальное и горизонтальное смещения точек границы полосы. Полученные уравнения используются при решении контактной задачи для колеса с тонким упругим ободом.

Контактная задача для колеса. В качестве упрощенной модели колеса рассматривается жесткий цилиндр, имеющий тонкий упругий обод, жестко соединенный с поверхностью цилиндра. Цилиндр находится в контактном взаимодействии с недеформируемой горизонтальной шероховатой поверхностью. Известен коэффициент трения между опорной поверхностью и упругим ободом. Коэффициент трения сцепления и скольжения принимаются равными. К центру цилиндра приложены известные вертикальная (направленная к опорной поверхности) и горизонтальная (параллельная поверхности) силы. Вертикальные смещения точек внешней поверхности обода в области контакта будут определяться вертикальным смещением (осадкой) центра жесткого цилиндра. В области контакта выделяются зона сцепления и зоны проскальзывания. В зоне сцепления выполняется условие постоянства (независимости от продольной координаты) продольной компоненты тензора деформаций. Следовательно, в данной зоне относительное (относительно точек внутренней поверхности обода) горизонтальное смещение прямо пропорционально продольной координате и определяется двумя подлежащими определению константами. Используя выведенные при решении краевой задачи соотношения, при известных зависимостях от горизонтальной координаты смещений точек в области контакта, можно получить соответствующие зависимости для контактного давления и сдвигового контактного напряжения. В зоне проскальзывания для сдвигового контактного напряжения выполняется закон трения Кулона. Полученные при решении краевой задачи для полосы соотношения позволяют в этом случае составить дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами для горизонтального смещения в зоне проскальзывания. Постоянные интегрирования в решении данного уравнения также подлежат определению. Таким образом, использование асимптотического подхода позволяет вывести аналитические выражения для контактных напряжений и смещений в области контакта. Входящие в данные выражения константы, координаты границ области контакта и границ раздела зон сцепления и проскальзывания определяются из граничных условий и условий равновесия колеса.

Результаты расчета. В качестве тестового примера рассматривается вертикальное смещение (осадка) центра составного цилиндра под действием только вертикальной силы. При этом в области контакта выделяются центральная зона сцепления и две симметрично расположенные зоны проскальзывания. В зоне сцепления горизонтальные смещения отсутствуют. Результаты использования разработанной методики сопоставлены с расчетными оценками, полученными на основе модели Винклерова основания и конечно-элементной модели контактного взаимодействия. Конечноэлементная модель реализована в программном продукте ANSYS. Показано, что использование асимптотического приближения второго порядка обеспечивает приемлемое (менее десяти процентов погрешности) соответствие результатам конечноэлементного моделирования в диапазоне значений относительной толщины покрытия до 0,5. При этом относительная толщина определяется как отношение толщины к полуширине области контакта. При использовании модели Винклерова основания соответствующий диапазон значений относительной толщины составляет до 0,15. Погрешность предложенного варианта решения контактной задачи зависит от значения коэффициента Пуассона материала обода. Наибольшее отклонение аналитических прогнозов от оценок, полученных методом конечных элементов, соответствует диапазону значений коэффициента Пуассона больше 0,45.

Также решена задача о стационарном качении моделируемого колеса под действием заданной горизонтальной силы. При этом зона сцепления распространяется до границы области контакта, соответствующей направлению движения колеса. В этой зоне относительные горизонтальные смещения точек поверхности обода линейно зависят от продольной координаты. Получены расчетные распределения контактного давления, сдвигового контактного напряжения и относительного горизонтального смещения точек в области контакта. Показано, что применимость ранее использованной методики, базирующейся на модели Винклерова основания, ограничена значениями относительной толщины обода менее 0,1.

Разработана новая аналитическая методика решения контактных задач для тел качения, имеющих тонкий упругий обод, которая основана на использовании асимптотического приближения второго порядка для тонкой полосы. Сопоставление аналитических расчетных оценок с данными конечно-элементного анализа позволило установить диапазоны значений параметров контактной поры, в которых правомерно использование разработанной методики.

Список литературы

1 **Jaffar, M. J.** Asymptotic behaviour of thin elastic layer bonded and unbonded to a rigid foundation / M. J. Jaffar // Int. J. Mech. Sci. – 1989. – Vol. 31. – P. 229–235.

2 **Черноус, Д. А.** Расчет контактного сдвигового напряжения для колеса с деформируемой периферией / Д. А. Черноус, Е. В. Коднянко // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2021. – Вып. 14. – С. 83–89.

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ТОЛЩИНАМИ НЕСУЩИХ СЛОЕВ

А. В. ЧЕРНЯК

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

При работе трехслойных конструкций, содержащих жесткие и прочные внешние несущие слои и менее жесткий срединный заполнитель, отмечаются хорошие прочностные и жесткостные показатели при минимуме их весовых характеристик. Поэтому становится очевидной потребность в разработке эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния данного типа конструкций.

Деформирование и колебания трехслойных элементов конструкций уже были исследованы в работах многочисленных авторов. Так, динамическое деформирование трехслойных пластин рассматривалось в работах [1–7], деформирование трехслойных стержней и оболочек при квазистатических нагрузках – в работах [8–14].