УКД 539.3

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОМЕНТНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
Московский авиационный институт (НИУ); МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

МАЙ КУОК ЧИЕН
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Как частный случай полученных в [1] начально-краевых задач для однородных моментных упругих анизотропных оболочек при равенстве нулю тензора кривизны срединной плоскости Π построены соответствующие соотношения для пластин в криволинейной системе координат ξ^1, ξ^2. Они включают уравнения движения

$$\begin{gathered}\rho h\ddot{u}^i=\nabla_j T^{ji}+q^i,\rho h\ddot{w}=\nabla_j T^{j3}+q,\rho I\ddot{\psi}^i=\nabla_j M^{ji}-T^{3i}+m^i,\rho I\ddot{\psi}_3=\nabla_j M^{j3}-N+m,\\ hJ\ddot{\omega}_i=g_{ik}\nabla_j R^{jk}-\pi_{ik}\left(T^{3k}-T^{k3}\right)+\tilde{m}_{Mi},hJ\ddot{\omega}=\nabla_j R^{j3}+\pi_{ik}T^{ik}+\tilde{m}_M,I=h^3/12,\\ IJ\ddot{\varphi}_i=g_{ik}\left(\nabla_j S^{jk}-R^{3k}\right)-\pi_{ik}\left(M^{3k}-M^{k3}\right)+\tilde{m}_{2Mi},IJ\ddot{\varphi}_3=\nabla_j S^{j3}-N_\omega+\pi_{ij}M^{ij}+\tilde{m}_{2M};\end{gathered}\tag{1}$$

физические соотношения

$$\begin{gathered}T^{ij}=h\left(C^{ijkl}\xi_{kl}+C^{ij33}\psi_3+D^{ijkl}\eta_{kl}+D^{ij33}\varphi_3\right),M^{ij}=I\left(C^{ijkl}\zeta_{kl}+D^{ijkl}\lambda_{kl}\right),\\ T^{i3}=h\left(C^{i33l}\xi_{3l}+C^{i3k3}\xi_{k3}+D^{i33k}\varphi_k+D^{i3k3}\eta_{k3}\right),T^{3i}=h\left(C^{3i3l}\xi_{3l}+C^{3ik3}\xi_{k3}+D^{3i3k}\varphi_k+D^{3ik3}\eta_{k3}\right),\\ M^{i3}=I\left(C^{i33l}\zeta_{3l}+C^{i3k3}\zeta_{k3}+D^{i3k3}\lambda_{k3}\right),M^{3i}=I\left(C^{3i3l}\zeta_{3l}+C^{3ik3}\zeta_{k3}+D^{3ik3}\lambda_{k3}\right),\\ N=h\left(C^{33kl}\xi_{kl}+C^{3333}\psi_3+D^{33kl}\eta_{kl}+D^{3333}\varphi_3\right);\end{gathered}\tag{2}$$

$$\begin{gathered}R^{ij}=h\left(D^{ijkl}\xi_{kl}+D^{ij33}\psi_3+B^{ijkl}\eta_{kl}+B^{ij33}\varphi_3\right),S^{ij}=I\left(D^{ijkl}\zeta_{kl}+B^{ijkl}\lambda_{kl}\right),\\ R^{i3}=h\left(D^{i33l}\xi_{3l}+D^{i3k3}\xi_{k3}+B^{i33k}\varphi_k+B^{i3k3}\eta_{k3}\right),S^{i3}=I\left(D^{i33l}\zeta_{3l}+D^{i3k3}\zeta_{k3}+B^{i3k3}\lambda_{k3}\right),\\ R^{3i}=h\left(D^{3i3l}\xi_{3l}+D^{3ik3}\xi_{k3}+B^{3i3l}\varphi_l+B^{3ik3}\eta_{kl}\right),N_\omega=h\left(D^{33kl}\xi_{kl}+D^{3333}\psi_3+B^{33kl}\eta_{kl}+B^{3333}\varphi_3\right);\end{gathered}\tag{3}$$

кинематические соотношения

$$\begin{gathered}\xi_{ij}=\nabla_i u_j-\pi_{ij}\omega,\xi_{i3}=\nabla_i w-\pi_{ki}\omega^k,\xi_{3i}=\psi_i+\pi_{ki}\omega^k,\zeta_{ij}=\nabla_i\psi_j-\pi_{ij}\varphi_3,\zeta_{i3}=\nabla_i\psi_3-\pi_{ki}\varphi^k,\zeta_{3i}=\pi_{ki}\varphi^k,\\ \eta_{ij}=\nabla_i\omega_j,\eta_{i3}=\nabla_i\omega,\lambda_{i3}=\nabla_i\varphi_3,\lambda_{ij}=\nabla_i\varphi_j;\end{gathered}\tag{4}$$

естественные граничные условия

$$\begin{gathered}u_i\big|_{\Gamma_u}=u_{i0},\psi_3\big|_{\Gamma_u}=\psi_{30},\omega\big|_{\Gamma_\omega}=\omega_0,\ \varphi_i\big|_{\Gamma_\omega}=\varphi_{i0},w\big|_{\Gamma_u}=w_0,\psi_i\big|_{\Gamma_u}=\psi_{i0},\omega_i\big|_{\Gamma_\omega}=\omega_{i0},\varphi_3\big|_{\Gamma_\omega}=\varphi_{30},\\ T^{ji}\nu_j\big|_{\Gamma_p}=T^i_{(0)},M^{j3}\nu_j\big|_{\Gamma_p}=M_{(0)},R^{j3}\nu_j\big|_{\Gamma_m}=R_{(0)},S^{ji}\nu_j\big|_{\Gamma_m}=S^i_{(0)},T^{j3}\nu_j\big|_{\Gamma_p}=T_{(0)},M^{ji}\nu_j\big|_{\Gamma_p}=M^i_{(0)},\\ R^{ji}\nu_j\big|_{\Gamma_m}=R^i_{(0)},S^{j3}\nu_j\big|_{\Gamma_m}=S_{(0)}.\end{gathered}\tag{5}$$

Здесь по повторяющимся латинским индексам, которые принимают значения 1 и 2, проводится суммирование; точки означают, дифференцирование по времени t; $\mathbf{u}=u_i\mathbf{э}^i,\boldsymbol{\psi}=\psi_i\mathbf{э}^i,\boldsymbol{\omega}=\omega_i\mathbf{э}^i,\boldsymbol{\varphi}=\varphi_i\mathbf{э}^i,w,\psi_3,\omega,\varphi_3$ – кинематические параметры пластины; $\mathbf{э}^1,\mathbf{э}^2$ – базис системы координат; g_{ik} и π_{ik} – метрический и дискриминантный тензоры; ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования; h – толщина пластины; ρ и J – плотность и массовая мера инерции при вращении материала пластины; $T^{ij},M^{ij},T^{i3},T^{3i},M^{i3},M^{3i},N$ и $R^{ij},S^{ij},R^{i3},S^{i3},R^{3i},N_\omega$ – внутренние силовые факторы; $\mathbf{q}=q^i\mathbf{э}_i,\mathbf{m}=m^i\mathbf{э}_i,\mathbf{m}_M=\tilde{m}^i_M\mathbf{э}_i$ и $\mathbf{m}_{2M}=\tilde{m}^i_{2M}\mathbf{э}_i,q,m,\tilde{m}_M,\tilde{m}_{2M}$ – внешние нагрузки; $C^{\alpha\beta\gamma\delta},D^{\alpha\beta\gamma\delta},B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2,3)$ – компоненты тензоров физических характеристик материала; $\boldsymbol{\nu}=\nu_i\mathbf{э}^i$ – единичный нормальный к боковой поверхности пластины вектор; $\Gamma=\partial\Pi=\Gamma_u\bigcup\Gamma_p=\Gamma_\omega\bigcup\Gamma_m$ (пары кривых Γ_u,Γ_p и Γ_ω,Γ_m могут иметь общими только точки); $u_{i0},w_0,\psi_{i0},\psi_{30},\omega_{i0},\omega_0,\varphi_{i0},\varphi_{30}$ и $T^i_{(0)},T_{(0)},M^i_{(0)},M_{(0)},R^i_{(0)},R_{(0)},S^i_{(0)},S_{(0)}$ – заданные функции.

Для замыкания начально-краевой задачи к (1), (5) добавляются соответствующие гиперболическому типу системы уравнений начальные условия.

В случае изотропного материала физические соотношения (2), (3) с использованием (4) существенно упрощаются и приобретают вид

$$T_{ij}/h=(\mu+\alpha)\nabla_i u_j+(\mu-\alpha)\nabla_j u_i-2\alpha\pi_{ij}\omega+\lambda g_{ij}(\mathrm{div}\mathbf{u}+\psi_3);$$
$$M_{ij}/I=(\mu+\alpha)\nabla_i\psi_j+(\mu-\alpha)\nabla_j\psi_i-2\alpha\pi_{ij}\varphi_3+\lambda g_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{\psi};$$
$$T_{i3}/h=(\mu-\alpha)\psi_i+(\mu+\alpha)\nabla_i w-2\alpha\pi_{ki}\omega^k, M_{i3}/I=(\mu+\alpha)\nabla_i\psi_3-2\alpha\pi_{ki}\varphi^k; \quad (6)$$
$$T_{3i}/h=(\mu+\alpha)\psi_i+(\mu-\alpha)\nabla_i w+2\alpha\pi_{ki}\omega^k;$$
$$M_{3i}/I=(\mu-\alpha)\nabla_i\psi_3+2\alpha\pi_{ki}\varphi^k, N/h=\lambda\mathrm{div}\mathbf{u}+(\lambda+2\mu)\psi_3;$$
$$R_{ij}/h=(\gamma+\varepsilon)\nabla_i\omega_j+(\gamma-\varepsilon)\nabla_j\omega_i+\beta g_{ij}(\mathrm{div}\boldsymbol{\omega}+\varphi_3);$$
$$S_{ij}/I=(\gamma+\varepsilon)\nabla_i\varphi_j+(\gamma-\varepsilon)\nabla_j\varphi_i+\beta g_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}, R_{i3}/h=(\gamma+\varepsilon)\nabla_i\omega+(\gamma-\varepsilon)\varphi_i, S_{i3}/I=(\gamma+\varepsilon)\nabla_i\varphi_3; \quad (7)$$
$$R_{3i}/h=g_{ik}R^{3k}/h=(\gamma-\varepsilon)\nabla_i\omega+(\gamma+\varepsilon)\varphi_i, N_\omega/h=\beta\mathrm{div}\boldsymbol{\omega}+(\beta+2\gamma)\varphi_3,$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе; α, β, γ, ε – дополнительные физические параметры среды при наличии моментных эффектов [2].

При этом уравнения движения с помощью (6), (7) преобразуются в две независимых системы уравнений в «перемещениях» (кинематических параметрах):

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}=(\lambda+\mu-\alpha)\mathrm{graddiv}\mathbf{u}+(\mu+\alpha)\Delta\mathbf{u}-2\alpha[\mathbf{n},\mathrm{grad}\omega]+\mathbf{q}/h,$$
$$J\ddot{\omega}=(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega+(\gamma-\varepsilon)\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}+2\alpha(\mathrm{rot}_n\mathbf{u}-2\omega)+\tilde{m}_M/h,\ r^2=I/h, \quad (8)$$
$$J\ddot{\boldsymbol{\varphi}}=(\gamma+\varepsilon)\Delta\boldsymbol{\varphi}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\mathrm{graddiv}\boldsymbol{\varphi}-\left[r^{-2}(\gamma+\varepsilon)+4\alpha\right]\boldsymbol{\varphi}-r^{-2}(\gamma-\varepsilon)\mathrm{grad}\omega+\tilde{\mathbf{m}}_{2M}/I;$$
$$\rho\ddot{w}=(\mu-\alpha)\mathrm{div}\boldsymbol{\psi}+(\mu+\alpha)\Delta w+2\alpha\mathrm{rot}_n\boldsymbol{\omega}+q/h,$$
$$\rho\ddot{\boldsymbol{\psi}}=(\lambda+\mu-\alpha)\mathrm{graddiv}\boldsymbol{\psi}+(\mu+\alpha)\Delta\boldsymbol{\psi}-r^{-2}\{(\mu+\alpha)\boldsymbol{\psi}+(\mu-\alpha)\mathrm{grad}w+2\alpha[\mathbf{n},\boldsymbol{\omega}]\}+\mathbf{m}/I, \quad (9)$$
$$J\ddot{\boldsymbol{\omega}}=(\gamma+\varepsilon)\Delta\boldsymbol{\omega}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\mathrm{graddiv}\boldsymbol{\omega}-4\alpha\boldsymbol{\omega}+2\alpha[\mathbf{n},\boldsymbol{\psi}-\mathrm{grad}w]+\tilde{\mathbf{m}}_M/h.$$

Первая из них описывает движение в срединной плоскости, а вторая – изгиб.

Отметим, что при $\alpha=0$ (8) и (9) переходят в построенные в [3, 4] уравнения движения упругих пластин с учетом независимого поворота нормального волокна и его обжатия.

Список литературы

1 **Май, Куок Чиен**. Начально-краевые задачи для моментных упругих оболочек / Куок Чиен Май, Д. В. Тарлаковский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 1. – М. : ТРП, 2021. – С. 150–151.

2 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

3 **Михайлова, Е. Ю.** Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек / Е. Ю. Михайлова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. – 2018. – Т. 160, No. 3. – С. 561–577.

4 **Михайлова, Е. Ю.** Общая теория упругих оболочек : учеб. пособие / Е. Ю. Михайлова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков. – М. : Изд-во МАИ, 2018. – 112 с.

УДК 539.3: 624.131

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРУНТОВ В РЕЗОНАНСНОЙ ЗОНЕ

Е. Ю. ТРАЦЕВСКАЯ

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь

При расчете устойчивости сооружений, передающих динамические нагрузки на основания, нужно учитывать, что свободные колебания системы «фундамент – грунт» при возмущающей нагрузке постоянной интенсивности могут изменяться в большом диапазоне частот в связи как с