УДК 539.31

СОПОСТАВЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН БОЛЬШОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ В РАМКАХ МОДЕЛЕЙ КИРХГОФА И ТИМОШЕНКО

А. О. СЕРДЮК, Д. О. СЕРДЮК
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Г. В. ФЕДОТЕНКОВ
Московский авиационный институт (НИУ);
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Пластины широко распространены в качестве элементов конструкций в аэрокосмической и атомной отрасли, а также в общем машиностроении. Неотъемлемым этапом проектирования новых и перспективных агрегатов является проведение стационарных и нестационарных расчетов подобных элементов конструкций. Развитие аддитивных технологий, технологий трехмерной печати полимерами, технологий производства полимерных композитных материалов с пространственным армированием требует разработки новых математических моделей и методов расчетов элементов конструкций из анизотропных материалов. Кроме того, известно, что заготовки листовой стали, полученные технологией листового проката, также обладают анизотропией свойств.

В настоящей работе объектом исследования является тонкая пластина большой протяженности и постоянной толщины h. Материал пластины с плотностью ρ упругий и анизотропный с одной плоскостью симметрии, совпадающей со срединной плоскостью пластины. На пластину воздействует нестационарная нагрузка p с переменной во времени амплитудой. В начальный момент времени t пластина находится в невозмущенном состоянии. Движение пластины рассматривается в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, ось x_3 ортогональна к срединной плоскости пластины (рисунок 1).

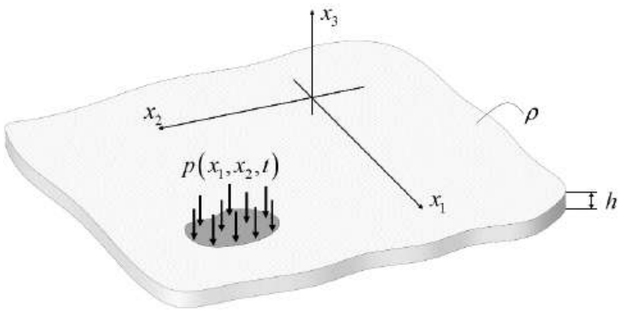

Рисунок 1 – Тонкая упругая анизотропная пластина большой протяженности

В качестве моделей пластин рассмотрены пластина по гипотезам Кирхгофа и пластина по теории Тимошенко, учитывающие соответственно шесть и девять независимых компонент тензора упругих постоянных для рассматриваемой симметрии упругой среды. Постановка задачи включает в себя уравнения движения в перемещениях и начальные условия.

Целью работы является сопоставление нестационарного нормального перемещения анизотропных пластин большой протяженности в рамках моделей Кирхгофа и Тимошенко в ответ на воздействие единичной сосредоточенной по координатам и времени нагрузки, математически описываемой дельта-функциями Дирака (сопоставление фундаментальных решений).

Фундаментальное решение для анизотропной пластины Кирхгофа [1] построено с применением интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственным координатам. Оригинал преобразования Лапласа найден аналитически, а оригинал по Фурье найден численно с применением метода интегрирования быстро осциллирующих функций.

Фундаментальное решение для анизотропной пластины Тимошенко [2] построено с применением прямых и обратных интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Оригинал по Лапласу найден аналитически с помощью теоремы о вычетах. Для построения оригинала по Фурье использован метод, основанный на связи интеграла обращения преобразования Фурье с рядом Фурье на переменном интервале.

Для численного исследования рассмотрена анизотропная пластина толщиной h = 0,002 м, плотностью ρ = 1500 кг/м^3, выполненная из углепластика, который имеет следующий тензор упругих постоянных (упругие постоянные в ГПа) [3]:

$$C=\begin{pmatrix} 95,5 & 28,9 & 4,03 & 0 & 0 & 44,7 \\ 28,9 & 25,9 & 4,65 & 0 & 0 & 15,6 \\ 4,03 & 4,65 & 16,3 & 0 & 0 & 0,54 \\ 0 & 0 & 0 & 4,4 & -1,78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,78 & 6,45 & 0 \\ 44,7 & 15,6 & 0,54 & 0 & 0 & 32,7 \end{pmatrix}.$$

На рисунке 2 представлены фундаментальные решения для нормального перемещения анизотропной пластины Тимошенко и анизотропной пластины Кирхгофа в моменты времени 1 мкс, 2 мкс и 1 мс, 2 мс соответственно (сплошная линия – решение для пластины Тимошенко, точки –решение для пластины Кирхгофа).

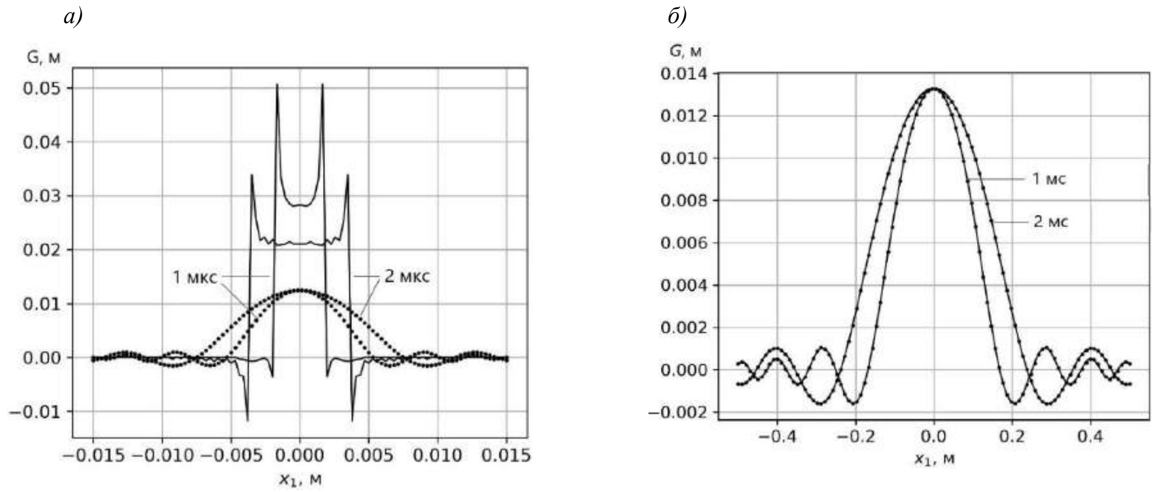

Рисунок 2 – Фундаментальные решения для нормального перемещения:
а – в момент времени 1 мкс и 2 мкс; *б* – в момент времени 1 мс и 2 мс

Из результатов, представленных на рисунке 2, *а*, видно, что в моменты времени 1 мкс и 2 мкс, когда возмущения проходят расстояния, соизмеримые с несколькими толщинами пластины, фундаментальные решения для нормальных перемещений имеют существенные отличия. При этом функции имеют характерные виды для рассматриваемых моделей пластин [4]. Из рисунка 2, *б* видно, что с течением времени фундаментальное решение для нормального перемещения анизотропной пластины Тимошенко приобретает вид, характерный для анизотропной пластины Кирхгофа.

Из оценки фундаментальных решений очевидно, что функции нормальных перемещений в случае действия произвольных нестационарных нагрузок для модели пластин Тимошенко будут давать отличный от модели пластин Кирхгофа результат только в моменты времени, за которые волна проходит расстояние, соизмеримое с несколькими толщинами пластины.

Реализация алгоритмов и построение приведенных изображений выполнены при помощи языка программирования *Python*. Стоит отметить, что вычисления для модели пластины Кирхгофа по соотношениям [1] занимают гораздо больше машинного времени, чем для модели пластины Тимошенко [2].

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-19-00217).

Список литературы

1 **Сердюк, А. О.** Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины / А. О. Сердюк, Д. О. Сердюк, Г. В. Федотенков // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2021. – Т. 25, № 1. – С. 111–126. – DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1793.

2 Функция влияния нормальных перемещений анизотропной пластины Тимошенко / А. Сердюк [и др.] // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XI Междунар. науч.-практ. конф. В 2 ч. Ч.2. – Гомель : БелГУТ, 2021. – С. 185– 186.

3 **Игумнов, Л. А.** Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропной теории упругости / Л. А. Игумнов, И. П. Марков, В. А. Пазин // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Сер. Механика. – 2013. – № 1 (3). – С. 115–129.

4 **Вахтерова, Я. А.** Нестационарная динамика балок и пластин : учеб. пособие / Я. А. Вахтерова, Д. О. Сердюк, Г. В. Федотенков. – М. : МАИ, 2021. – 104 с.